RECÍPROCO DE PITÁGORAS[1]

Mario Dalcín
Instituto de Profesores Artigas.
Montevideo. (Uruguay)
filomate@adinet.com.uy

RESUMEN
BUSCAMOS RESCATAR DEL OLVIDO AL RECÍPROCO DE PITÁGORAS Y ALGUNOS DE SUS ANTECEDENTES.

INTRODUCCIÓN

En el papiro de Kahun, de alrededor del 2200 a. C., se encuentran las cuatro ternas pitagóricas siguientes:

$$6^2 + 8^2 = 10^2$$

$$12^2 + 16^2 = 20^2$$

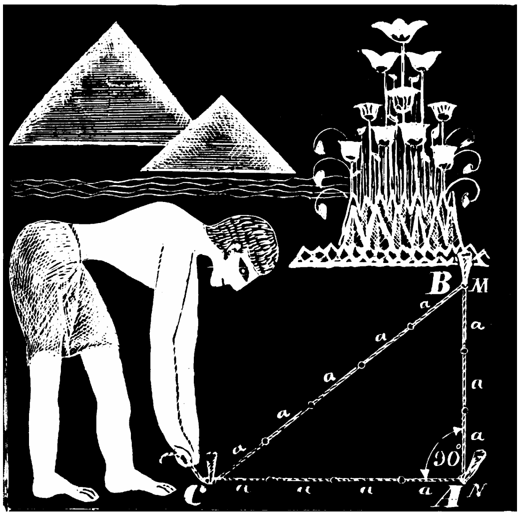
$$(1\ ½\ )^2 + 2^2 = (2\ ½\ )^2$$

$$(3/4)^2 + 1 = (1\ ¼\ )^2$$

Todas remiten a la terna $3^2 + 4^2 = 5^2$, en el caso de las dos primeras se obtienen a partir de esta por sucesivas duplicaciones, las dos últimas por sucesivas divisiones entre dos.

---

[1] El presente trabajo fue realizado en el marco del curso *Enseñar geometría con su historia-Desde los orígenes hasta la Edad Media*, impartido por las profesoras Irene Zapico y Silvia Tajeyan. El curso fue organizado por Soarem y se realizó en la modalidad virtual en los meses marzo-abril de 2007.



Para algunos historiadores esto es indicio de que los egipcios estaban en conocimiento tanto del teorema de Pitágoras como de su recíproco, al menos en el caso del triángulo de lados 3, 4, 5 y que este conocimiento era usado para la construcción de ángulos rectos mediante una cuerda a la que se le ataban once nudos igualmente espaciados.

Otros autores sostienen que para trazar perpendiculares no es necesario recurrir al triángulo de lados 3, 4, 5.

> *"Basta construir dos oblicuas iguales a partir de la recta en la que se quiere levantar la perpendicular y unir el punto de intersección de estas dos oblicuas con el centro de esta recta."*
>
> (Rey, 1959, pág. 150)

Más contundente aún, Sarton (1970) nos dice:

> *"La referencia más curiosa a la matemática egipcia es la de Demócrito de Abdera (V a. C.), trasmitida desgraciadamente por un testimonio muy posterior: uno de los Padres de la Iglesia, Clemente de Alejandría (155-220). Según Clemente, Demócrito declaró:*
>
> *He vagabundeado por más lugares que cualquier hombre de mi tiempo, investigando en los sitios más apartados. He visto la mayoría de los cielos y de las tierras, y he oído a gran número de hombres sabios. Pero nadie me ha superado en composición y en demostración, ni aquellos entre los egipcios llamados harpedonaptai, con todos los cuales he vivido en el exilio hasta los ochenta años.*

> *¿Quiénes fueron estos harpedonaptai o tendedores de cuerdas? ¿Fueron agrimensores o arquitectos? Se ha sugerido que conocían el arte de trazar perpendiculares en el terreno mediante una cuerda dividida por cuatro nudos en la proporción 3, 4, 5. Esto es posible, pero nada lo prueba. Es probable que fueran agrimensores encargados de fijar la orientación adecuada de los edificios, a la cual los antiguos egipcios atribuían profunda importancia religiosa. La ceremonia del "tendido de la cuerda" (término egipcio) era la determinación astronómica del eje de un templo según el meridiano. Un sacerdote o un ayudante tomaba la posición de la estrella polar a través de un bastón con una hendidura; otro, frente a él, con una plomada se iba moviendo hasta que la línea de la plomada y la* estrella coincidieran en la misma dirección. Entonces cada uno plantaba una estaca en el suelo, y una cuerda tendida entre las dos *estacas determinaba el meridiano. Es posible que la dirección perpendicular este-oeste se determinara después mediante una cuerda 3, 4, 5, conforme se ha sugerido arriba, o de otra manera*[2]*. La cooperación de los tendedores de cuerdas podía solicitarse frecuentemente durante la construcción de un gran edificio, o de cualquier otro proyecto arquitectónico. Los mismos tendedores de cuerdas también podían ser empleados, o no, para la redeterminación de los límites de los terrenos después de las creciente. Es notable que no hayamos oído hablar más de ellos en la literatura griega”*
>
> (Sarton, 1970, pp. 139-141)

En el papiro Cairo figuran dos nuevas ternas pitagóricas[3]:

$$5^2 + 12^2 = 13^2$$

---

[2] Por ejemplo: trazar una perpendicular al meridiano por O. Midamos sobre el meridiano OA = OB, luego tómese una cuerda mucho más larga que AB y divídasela en dos partes iguales mediante un nudo en C. Se fija la cuerda en A y B y se lleva entonces el nudo C hacia el este en la mayor medida posible: la línea OC es la perpendicular. Esto resultaría evidente para los egipcios por la comprensión intuitiva de la simetría. Como comprobación la operación podía repetirse hacia el oeste; OC y OD debían ser colineales. La colinealidad se comprobaría fácilmente mediante tres estacas o plomadas. (Sarton, 1970, p. 141, pié de página)

[3] Haciendo un balance del intercambio entre griegos y egipcios: “En general, Egipto fue considerada la cuna de la ciencia de los primeros escritores griegos, y los griegos con ambiciones intelectuales trataban de visitar aquel país y pasar el mayor tiempo posible en él interrogando a los hombres sabios y a los sacerdotes. Es probable que quedasen decepcionados, pues sus esperanzas eran algo ingenuas, ya que los sacerdotes no podrían, o no querrían, comunicar muchos conocimientos a infieles y bárbaros. Con todo, los visitantes griegos algo aprendieron, y sus deseos se agudizaron y concentraron. ¿Qué otra cosa puede esperarse de los maestros? Principalmente inspiración e insinuaciones, puesto que el verdadero conocimiento debe conquistarlo, desde luego, cada hombre por sí mismo. Y en cuanto a la sabiduría, si no está en él, ¿de dónde le vendrá?” (Sarton, 1970, pp. 139-140)

$$20^2 + 21^2 = 29^2$$

En la cultura india también aparecen algunas ternas pitagóricas:

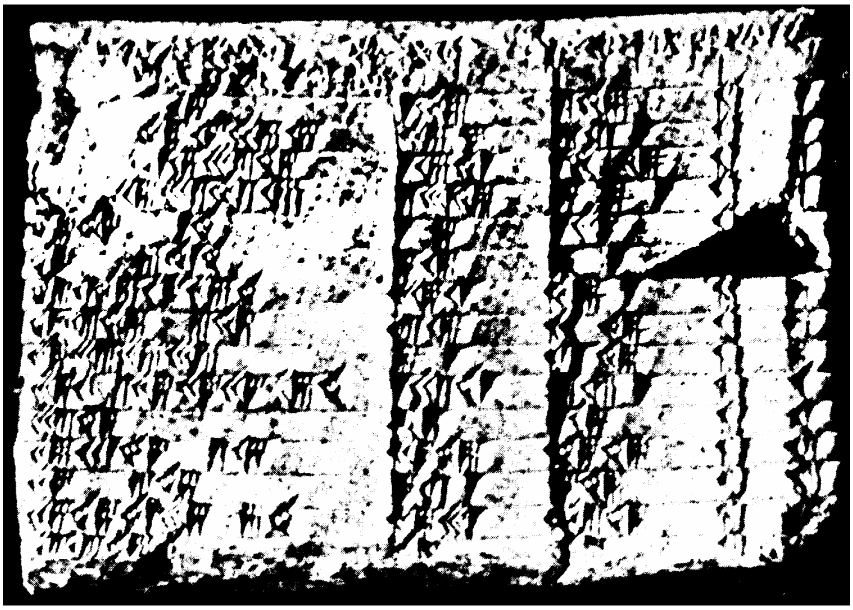
$$3^2 + 4^2 = 5^2$$
$$12^2 + 16^2 = 20^2$$
$$15^2 + 20^2 = 25^2$$

$$5^2 + 12^2 = 13^2$$
$$15^2 + 36^2 = 39^2$$

$$8^2 + 15^2 = 17^2$$

$$12^2 + 35^2 = 37^2$$

En la cultura babilónica ya no aparecen algunas ternas aisladas como hemos visto en los trabajos egipcios o indios, sino que la búsqueda de ternas pitagóricas fue abordada como problema y la respuesta al problema parece estar en la tablilla Plimpton 322 donde figuran 15 ternas pitagóricas.



El problema de hallar ternas pitagóricas daría para mucho más, simplemente lo mencionamos para dar cuenta de la sofisticación de algunos aspectos de la matemática babilónica.

EL RECÍPROCO DE PITÁGORAS

La demostración de Euclides (*Elementos*, Libro I, Proposición 48)

Teorema I.48 (T.D.)

"Si en un triángulo el cuadrado de uno de los lados es igual a los cuadrados de los dos restantes lados, el ángulo comprendido por esos dos lados restantes del triángulo es recto".

48.1 Sea, pues, en el triángulo ABG el cuadrado del lado BG igual a los cuadrados de los lados BA, AG. (Hip.)

48.2 Digo que el ángulo BAG es recto. (Tes.)

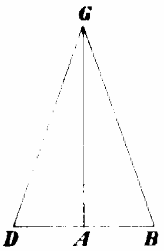
DEMOSTRACION.

48.31 Desde el punto A trácese el AD perpendicular a la recta AG. (T.I.11)

48.32 y hágase la AD igual a la BA. (T.I.2)

48.33 y trácese la DG. (P.I.)

48.41 Ahora bien puesto que la DA es igual a la AB (48.32)



48.42 será también igual el cuadrado de DA con el cuadrado de AB. (D.I.22;N.II.)

48.43 Añádase el cuadrado común AG; (D.I.)

48.44 Por tanto: los cuadrados de los lados DA, AG son iguales a los cuadrados de los lados BA, AG. (N.II)

48.45 Mas el cuadrado del lado DG es igual a los cuadrados de los lados DA, AG, porque el ángulo DAG es recto; (T.I.47)

48.46 además el cuadrado del lado DG es igual a los cuadrados de los lados BA, AG, por hipótesis; (48. 1)

48.47 luego el cuadrado del lado DG es igual al cuadrado del lado BG, (N.I.)

48.48 de modo que también será igual el lado DG con el BG. (D.I.22; N.I.)

48.49 Y puesto que el lado DA es igual con el AB (48.32)

48.50 y el AG es común (D.I.;48.31 & 32 & 33)

48.51 las dos rectas AG, serán iguales a las dos BA, AG; (N.I.)

48.52 y la base DG es igual a la base BG; (48.48)

48.53 luego el ángulo DAG será igual al BAG; (T.I.8)

48.54 mas el ángulo DAG es recto, (T.I.11)

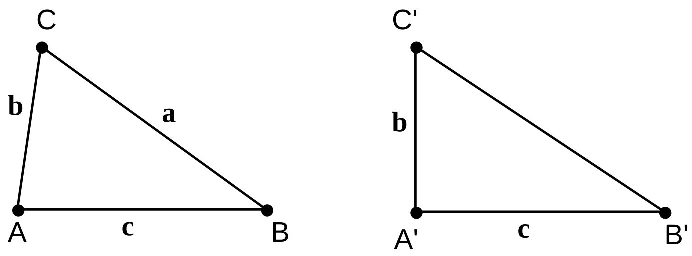
48.55 luego también el BAG es recto. (N.I.Syll.P.)

48.12 Por tanto: si en un triángulo el cuadrado de uno de los lados es igual a los cuadrados de los lados restantes, el ángulo comprendido por esos dos lados restantes del triángulo es recto.

Que es lo que se había de demostrar.(31)

FIN del LIBRO PRIMERO

La idea de la demostración de la Proposición 48, que cierra el Libro I de los *Elementos* de Euclides es construirse un triángulo rectángulo A’B’C’ con los lados adyacentes al ángulo recto iguales a los lados más cortos del triángulo ABC de partida donde se cumple que la suma de cuadrados de dos de ellos es igual al cuadrado del tercero: $b^2 + c^2 = a^2$.



Como el triángulo A’B’C’ por construcción es rectángulo se cumple el teorema de Pitágoras:

$$(A'C')^2 + (A'B')^2 = b^2 + c^2 = (B'C')^2$$

pero como $b^2 + c^2 = a^2$

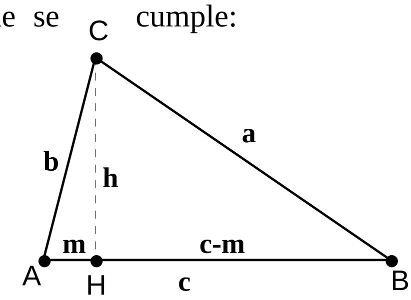
se cumple entonces que B’C’ = a.

De esta manera los triángulos ABC y A’B’C’ son iguales por tener los tres lados iguales, entonces tendrán iguales sus ángulos, por lo que los ángulos CAB y C’A’B’ son iguales y como C’A’B’ es recto también es recto el ángulo CAB.

OTRA FORMA DE VERLO

Partimos de que en el triángulo ABC se cumple: $b^2 + c^2 = a^2$.

Si el ángulo CAB < 90º, al trazar la altura CH el punto H pertenecería al segmento AB y se formarían dos triángulos AHC y BHC rectángulos donde se cumple:



En AHC $h^2 + m^2 = b^2 \rightarrow h^2 = b^2 - m^2$

En BHC $h^2 + (c - m)^2 = a^2 \rightarrow h^2 = a^2 - (c - m)^2$

$$b^2 - m^2 = a^2 - (c - m)^2$$

$$b^2 - m^2 = a^2 - c^2 + 2cm - m^2$$

$$b^2 + c^2 = a^2 + 2cm$$

Por hipótesis $b^2 + c^2 = a^2$

De donde $2cm = 0$

Por lo que $m = 0$

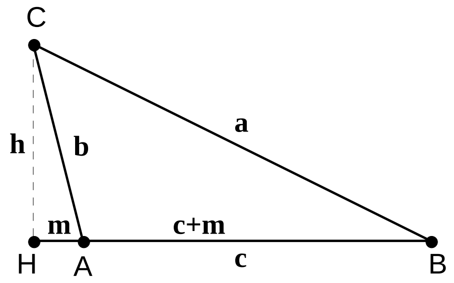
Si el ángulo CAB > 90º, al trazar la altura CH el punto H pertenecería a la semirrecta opuesta a AB y se formarían dos triángulos AHC y BHC rectángulos donde se cumple:

En AHC $h^2 + m^2 = b^2 \quad \rightarrow \quad h^2 = b^2 - m^2$
En BHC $h^2 + (c + m)^2 = a^2 \rightarrow \quad h^2 = a^2 - (c + m)^2$

$$b^2 - m^2 = a^2 - (c + m)^2$$

$$b^2 - m^2 = a^2 - c^2 - 2cm - m^2$$

$$b^2 + c^2 = a^2 - 2cm$$



Por hipótesis $\quad b^2 + c^2 = a^2$
De donde $\quad -2cm = 0$
Por lo que $\quad m = 0$

A MODO DE REFLEXIÓN FINAL

He podido constatar que la totalidad de los estudiantes del curso de Geometría I del profesorado de Matemática del Instituto de Profesores Artigas (Montevideo-Uruguay) de los últimos seis años desconocen el recíproco de Pitágoras. A esto hay que agregar que salvo raras excepciones no lo distinguen del teorema de Pitágoras. Parecería ser que el recíproco de Pitágoras es un resultado que no se menciona en la Enseñanza Media, aspecto llamativo si se tiene en cuenta que el teorema de Pitágoras es de los resultados más recordados por quienes transitaron la misma Enseñanza Media. ¿Cómo integrar el recíproco a la enseñanza? Un paso imprescindible en esa dirección es que sea conocido por los futuros docentes y actuales estudiantes de profesorado. Pensando en dichos estudiantes y en futuros estudiantes de un posible curso de Historia de la Matemática (en un nuevo plan que inicia en el 2008) fue pensado el siguiente trabajo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁGICAS

Euclides (1992). *Elementos de Geometría I-II*. México: UNAM.
Rey, A. (1959). *La ciencia oriental antes de los griegos*. México: Uteha.
Sarton, G. (1970). *Historia de la ciencia. La ciencia antigua durante la edad de oro griega. Vol. I*. Buenos Aires: Eudeba.