LA FAMILIA DE LOS NÚMEROS METÁLICOS Y SU HIJO PRÓDIGO: EL NÚMERO DE ORO [1]

Claudia Minnaard, ***, Viviana Julia Condesse**, ****
**Universidad CAECE, **Universidad de Buenos Aires*
****Universidad Nacional de Lomas de Zamora*
minnaard@uolsinectis.com.ar
vjcondesse@hotmail.com

RESUMEN

Los números metálicos aparecen tanto en los sistemas usados en el diseño de las construcciones por la civilización romana hasta los más recientes trabajos de caracterización de caminos universales al caos (Spinadel, 1995).

El más famoso de la familia es el número de oro que ha sido utilizado ampliamente en muchas culturas antiguas como base de proporciones. Otros familiares son el número de plata, el número de bronce, el número de cobre, el número de níquel y otros muchos más.

En el presente trabajo se muestran diversas aproximaciones a esta familia de números utilizando algunas de sus características comunes: son irracionales cuadráticos, son límites de sucesiones de Fibonacci, se pueden descomponer en fracciones continuas.

Asimismo se proponen actividades tanto para nivel medio como para nivel terciario.

INTRODUCCIÓN

Los números metálicos aparecen tanto en los sistemas usados en el diseño de las construcciones por la civilización romana hasta los más recientes trabajos de caracterización de caminos universales al caos (Spinadel, 1995).

El más famoso de la familia es el número de oro que ha sido utilizado ampliamente en muchas culturas antiguas como base de proporciones. Otros familiares son el número de plata, el número de bronce, el número de cobre, el número de níquel y otros muchos más.

---

[1] Revista Iberoamericana de Educación (versión digital), 10 de marzo del 2007.

¿Cuáles son algunas de las características de estos números?

1. *Son todos irracionales cuadráticos*

Lo que implica ser solución de una ecuación cuadrática

2. *Son todos límites de sucesiones de Fibonacci*

Si consideramos la sucesión de Fibonacci

1, 1, 2, 3, 5 , 8, 13 , 21, ...

En la cual $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} & \text{si n} \geq 3 \end{cases}$

Puede demostrarse que el número de oro $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$

3. *Se pueden descomponer en fracciones continuas*

Teniendo en cuenta estas características, nuestro propósito es acercarnos a los números metálicos en los distintos niveles de enseñanza. Este acercamiento se busca a través de distintos caminos: mediante conceptos algebraicos, cálculo combinatorio, conceptos geométricos y análisis de funciones.

DESARROLLO

Desde un punto estrictamente matemático, podemos definir número irracional utilizando el concepto de fracción continua simple. Pero, ¿qué es una fracción continua? Es una expresión de la forma:

$$a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \cfrac{b_3}{\cdots\cdots\cdots}}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots + \cfrac{b_{n-2}}{a_{n-1} + \cfrac{b_{n-1}}{a_n}}$$

En general los a_i y b_i pueden ser números reales o complejos. Sin embargo si cada $b_i = 1$ y cada a_i es un entero positivo para i>1 ; entonces la fracción continua se denomina *fracción continua simple:*

$$a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\cfrac{1}{a_n}}}}$$

que en forma abreviada se representa [a_1, a_2, a_3, ….. ,a_n]

Los a_i son los términos de la fracción continua simple. Si el número de términos es finito, la fracción continua simple se denomina finita; y se denomina infinita si lo es el número de términos.

Todo número real puede expresarse como una fracción continua simple. Si el número es racional, se expresa mediante una fracción continua simple finita; si el número es irracional, se representa mediante una fracción continua simple infinita.

Tomemos algunos ejemplos.

En primer lugar, expresemos el número 95/43 como una fracción continua simple. Será finita pues se trata de un número racional. Efectuamos el cociente indicado y trabajando algebraicamente, obtenemos

$$\frac{95}{43}=2+\frac{9}{43}=2+\cfrac{1}{\frac{43}{9}}=2+\cfrac{1}{4+\frac{7}{9}}=2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\frac{9}{7}}}=2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\frac{2}{7}}}=2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{7}{2}}}}$$

$$\frac{95}{43}=2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\frac{1}{2}}}}$$

Quedando escrito en forma abreviada $\frac{95}{43} = [2, 4, 1, 3, 2]$

Si el número es irracional, la descomposición es básicamente la misma, pero expresando el número irracional x,

$x = a_1 + \frac{1}{x_1}$ siendo a_1 el menor de los enteros entre los que está comprendido x

y $0 < \frac{1}{x_1} < 1$

Por ejemplo, sea x = $\sqrt{8}$; como $2 < \sqrt{8} < 3$

$$\sqrt{8} = 2 + (\sqrt{8} - 2) = 2 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{8}-2}} = 2 + \frac{1}{\frac{\sqrt{8}+2}{4}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{8}-2}{4}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{4}{\sqrt{8}-2}}}$$

$$\sqrt{8} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{4(\sqrt{8}+2)}{4}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{8}+2}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + (\sqrt{8}-2)}}$$

Si observamos atentamente hemos obtenido la misma expresión, lo que nos indica que deberíamos repetir el proceso en forma indefinida

$\sqrt{8} = [2, 1, 4, 1, 4, 1, 4, \ldots]$ *o* $\sqrt{8} = \left[2, \overline{1, 4}\right]$ es una fracción continua periódica

Si procediéramos de manera similar, obtendríamos

$\sqrt{5} = \left[2, \overline{4}\right]$ $\sqrt{3} = \left[1, \overline{1, 2}\right]$

Puede probarse que todo irracional cuadrático, es decir que es solución de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ con a,b, c $\in$ Z, puede expresarse mediante una fracción continua periódica y que toda fracción continua periódica representa un irracional cuadrático.

Pero, ¿y nuestra familia de los metálicos? Bueno, todos los números metálicos son irracionales cuadráticos, y eso nos permitirá acercarnos a ellos de diferentes maneras según el nivel en el que nos encontremos.

Si planteamos la ecuación cuadrática $x^2 - bx - 1 = 0$ para distintos valores enteros de b, un alumno de nivel medio encontrará en su solución algunos números metálicos.

Así, si b = 1 $x^2 - x - 1 = 0$ $x_{1-2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \Rightarrow x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ***es el número de oro***

Si b = 2 $x^2 - 2x - 1 = 0$ $x_{1-2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} \Rightarrow x_1 = 1 + \sqrt{2}$ ***es el número de plata***

Si b = 3 $x^2 - 3x - 1 = 0$ $x_{1-2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+4}}{2} \Rightarrow x_1 = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$ ***es el número de bronce***

Un alumno de nivel terciario podrá expresarlo como fracciones continuas. Si tomamos la expresión general

$x^2 - bx - 1 = 0 \qquad donde \quad b > 0$ Operando algebraicamente

$$x^2 = bx + 1$$

$$x = b + \frac{1}{x} \qquad donde \ x \neq 0$$

$$x = b + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{x}}$$

$$x = b + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{x}}}$$

....

Por lo tanto, una de las soluciones de la ecuación cuadrática puede ser expresada como la fracción continua simple infinita que depende únicamente del valor de b. Es decir,

$x = \left[\,\overline{b}\,\right]$

Así, **el número de oro** $\phi = \left[\,\overline{1}\,\right]$

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}} \quad \text{para } x \to \infty$$

el número de plata $1+\sqrt{2} = \left[\,\overline{2}\,\right]$

$$1+\sqrt{2} = 2 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{x}}}} \quad \text{para } x \to \infty$$

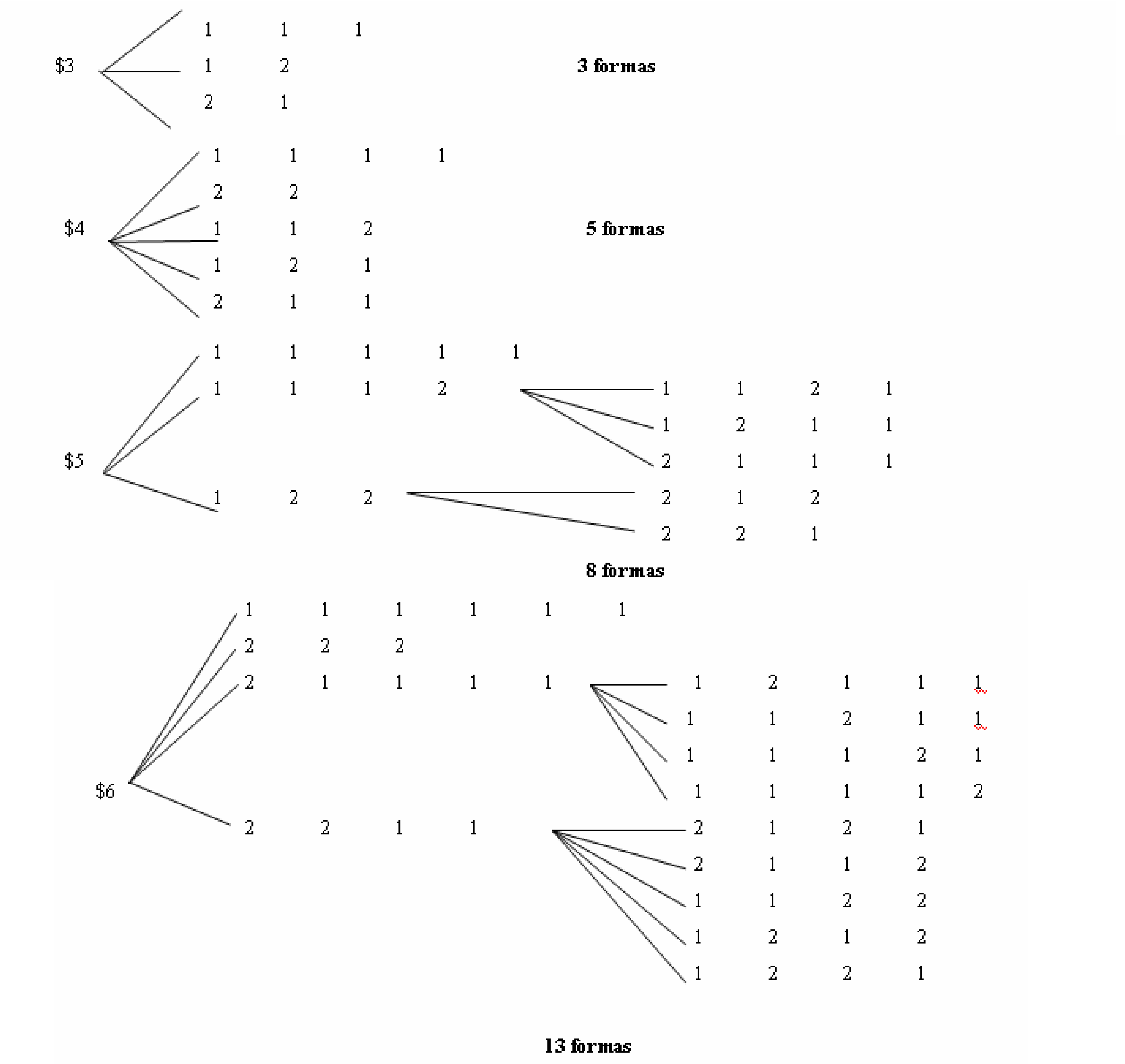
el número de bronce $\frac{3+\sqrt{13}}{2} = \left[\,\overline{3}\,\right]$

$$\frac{3+\sqrt{13}}{2} = 3 + \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{x}}}} \quad \text{para } x \to \infty$$

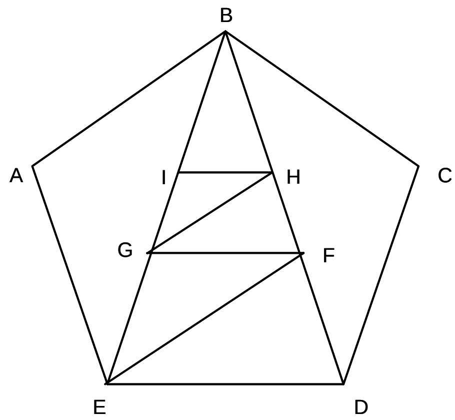
Si pensamos en alumnos de los últimos años de la escuela secundaria básica o en los primeros años del polimodal, podremos presentar a algunos de los números irracionales, sin recurrir a la formalización, a través del cálculo combinatorio o geométrico.

Poseemos varias estampillas de $1 y de $2. Encuentra todas las formas posibles de ubicar las estampillas en el sobre (siempre alineadas) en el caso que el franqueo correspondiente sea de: $3, $4; $5; $6; $7 y $8. ¿Te animas a indicar (sin escribirlas) cuántas posibilidades hay en el caso de un franqueo de $9 y de $10?. Arma el cociente de a dos términos consecutivos de la sucesión, observas alguna particularidad?

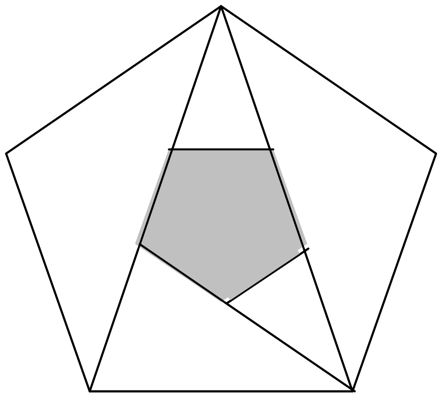
Resolviendo el problema, se obtiene para los distintos franqueos, las siguientes posibilidades:



Una aplicación geométrica para alumnos del nivel medio, consiste en la manipulación de tangramas distintos al tangram chino tradicional. Esta opción está basada en la construcción del tangram a partir de un pentágono regular al que se le trazan dos diagonales, un segmento de una tercera diagonal y segmentos paralelos a los lados y a esta última diagonal. Al cortar por los segmentos trazados en el pentágono se obtienen siete triángulos.



El problema consiste con cinco de esos triángulos formar el pentágono original con un hueco, también de forma pentagonal, ubicado en el centro; y establecer la relación entre la diagonal del pentágono hueco y el lado y la diagonal del pentágono original.



De la manipulación de las figuras es posible establecer la relación d’ = d – l (siendo d y d’ las diagonales del pentágono original y del hueco, respectivamente, y l el lado del pentágono original) y, por semejanza de triángulos:

$$\frac{d}{l}=\frac{l}{d'}\Rightarrow\frac{d}{l}=\frac{l}{d-l}\Rightarrow d(d-l)=l^2\Rightarrow d^2-dl-l^2=0$$

Siendo la solución positiva de la ecuación:

$$d=\frac{l+\sqrt{l^2+4l^2}}{2}\qquad\Rightarrow\qquad d=l\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

Un alumno de nivel terciario con conocimientos de análisis puede acercarse al Número de Oro a través del estudio de funciones.

McMullin y Weeks (2005) proponen una interesante relación entre el número de oro y los polinomios de cuarto grado.

Muchos polinomios de cuarto grado tienen tres “ondas” y por lo tanto dos puntos de inflexión. Si consideramos la recta que pasa por los puntos de inflexión, esta recta determina tres regiones en la curva. El área de estas regiones, si las consideramos de izquierda a derecha, está en relación 1 : 2 : 1
Si buscamos las otras intersecciones entre la recta y la curva estas tienen como abscisas

$$x_I=(\frac{1+\sqrt{5}}{2})a+(\frac{1-\sqrt{5}}{2})b$$

(1)

$$x_D=(\frac{1+\sqrt{5}}{2})b+(\frac{1-\sqrt{5}}{2})a$$

Siendo *a* y *b* las abscisas de los puntos de inflexión.
Como vemos el número de oro y su conjugado nuevamente hacen su aparición.

Tomemos un ejemplo:
Sea la función $f(x)=x^4-2x^3-36x^2+5x-1$
Sus derivadas primera y segunda son:

$$f'(x)=4x^3-6x^2-72x+5$$

$$f''(x)=12x^2-12x-72$$

Los puntos de inflexión son I = (-2 , - 123) y D = (3, - 283) . La recta determinada por estos puntos tiene como ecuación y = - 32 x - 187

Los puntos de intersección entre la curva y la recta (que no son puntos de inflexión) tienen como abscisa

$$x_i = \frac{1}{2} - 5\frac{\sqrt{5}}{2}$$

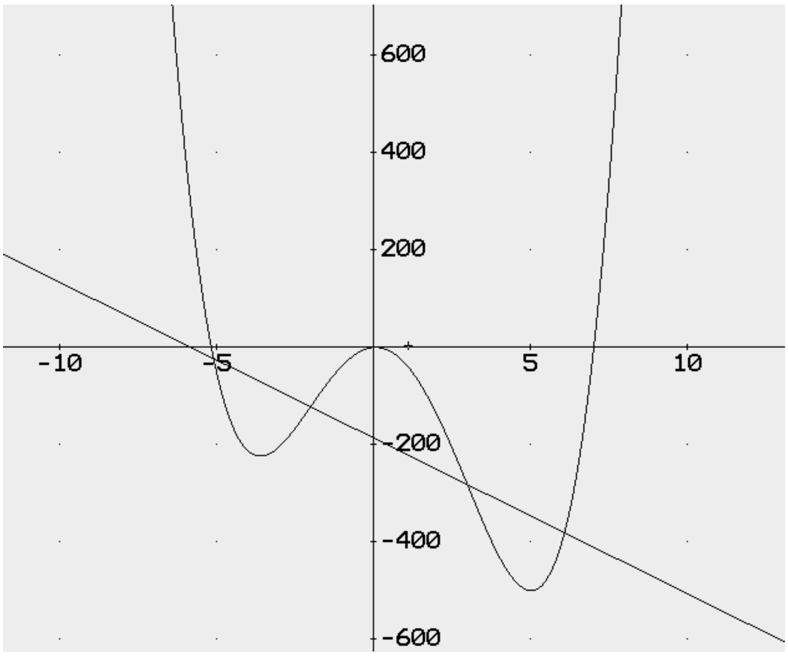
$$x_d = \frac{1}{2} + 5\frac{\sqrt{5}}{2} \quad (2)$$

Aplicando las relaciones vistas anteriormente, recordando que a = -2 y b = 3 resulta:

$$x_i = (\frac{1+\sqrt{5}}{2}) * (-2) + (\frac{1-\sqrt{5}}{2}) * 3 = -1 - \sqrt{5} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{5} = \frac{1}{2} - \frac{5\sqrt{5}}{2}$$

$$x_d = (\frac{1+\sqrt{5}}{2}) * 3 + (\frac{1-\sqrt{5}}{2}) * (-2) = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{5} - 1 + \sqrt{5} = \frac{1}{2} + \frac{5\sqrt{5}}{2} \quad (3)$$

Si comparamos (2) y (3) observamos que se cumplen las relaciones planteadas en (1)



CONCLUSIÓN

Hemos tratado de recoger algunos aportes con respecto a *La Familia de los Números Metálicos*. No podemos dejar de mencionar que dichos aportes son parciales, ya que son tantas las aplicaciones en las que encontramos al número de oro y sus familiares, que sería imposible abarcarlas a todas en este trabajo.

Pero, a través de las actividades y ejemplos propuestos hemos intentado relacionar nuevos conocimientos con conceptos ya existentes en la estructura cognitiva, realizando aprendizajes a partir de la motivación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cólera, J. Guzmán, M et al (1995) *Matemáticas 2*. Editorial Anaya

Iglesias, Lucrecia (1995) *Propuesta Didáctica*. Elementos de Matemática (Universidad CAECE) Vol IX Nº XXXV.

McMullin,L. & Weeks, A. (2005). *The Golden Ratio and Fourth Degree Polynomials.*National Council of Teachers of Mathematics. Disponible en: http://my.nctm.org/eresources/view_article.asp?article_id=7016

Pettofrezzo, A & Byrkit, D (1995) *Introducción a la Teoría de los Números.* Editorial Prentice Hall Internacional.

Spinadel, V. (1995). *La Familia de los números metálicos y el diseño.* Centro de Matemática y Diseño MAy DI. Facultad de Arquitectura, Diseño y Urbanismo. Universidad de Buenos Aires. Disponible en: http://cumincades.scix.net/data/works/att/4856.content.pdf