ALGUNAS IDEAS SOBRE EL INFINITO: ARGUMENTOS DE LOS ALUMNOS DE ESCUELA MEDIA

Patricia Lestón
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín. V. González"
Ciudad de Buenos Aires. (Argentina)
Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada CICATA (México)
patricialeston@yahoo.com.ar

RESUMEN

El siguiente trabajo tiene por objetivo estudiar las reacciones de los alumnos de escuela media al enfrentarse a las contradicciones que surgen entre las ideas intuitivas y las ideas matemáticas del infinito. A fin de lograr este objetivo, se intentará analizar la argumentación que el alumno de escuela media puede lograr respecto a las imágenes mentales que se ha hecho respecto de una temática.

El contrato didáctico impuesto por la situación escolar y la tradición de rigor de la matemática obligan al alumno a respetar los formatos y estructuras de la comunicación de ideas matemáticas. Sin embargo, en determinadas circunstancias las imágenes mentales no pueden ser puestas en palabras o términos de acuerdo a estas restricciones. Es por eso que se ha buscado a lo largo del diseño de la actividad llevar a los alumnos a expresarse de manera “no matemática”, con el fin de poder observar, lo más fielmente posible, lo que realmente piensan y conjeturan en relación al infinito.

La actividad se plantea en dos etapas. En la primera parte se permite que las alumnas respondan a preguntas abiertas sobre la base de la resolución de situaciones sencillas que no presentan dificultades al nivel en que las alumnas están trabajando. En esta etapa se desea establecer las ideas intuitivas con que las alumnas cuentan sobre la comparación entre los cardinales de conjuntos finitos e infinitos y algunos de sus subconjuntos propios.

En la segunda parte se plantea a través de un ejemplo la biyección como una posibilidad para comparar conjuntos cuando estos son demasiado grandes o infinitos; y se intenta con el final de la actividad que las alumnas contradigan las conclusiones alcanzadas anteriormente. Las preguntas abiertas que aquí se presentan tienen por objetivo no sistematizar el tipo de respuesta, sino llevarlas a expresarse a través de un texto, una argumentación presentada en lenguaje natural.

INTRODUCCIÓN: OBJETIVO

El siguiente trabajo tiene por objetivo estudiar las reacciones de los alumnos de escuela media al enfrentarse a las contradicciones que surgen entre las ideas intuitivas y las ideas matemáticas del infinito. Con el fin de lograr este objetivo, se intentará analizar la argumentación que el alumno de escuela media puede lograr respecto a las imágenes mentales que se ha hecho respecto de una temática.

El contrato didáctico impuesto por la situación escolar y la tradición de rigor de la matemática obligan al alumno a respetar los formatos y estructuras de la comunicación de ideas matemáticas. Sin embargo, en determinadas circunstancias las imágenes mentales no pueden ser puestas en palabras o términos de acuerdo a estas restricciones. Es por eso que se ha buscado a lo largo del diseño de la actividad llevar a los alumnos a expresarse de manera “no matemática”, con el fin de poder observar, lo más fielmente posible, lo que realmente piensan y conjeturan en relación al infinito.

PLANTEO DEL PROBLEMA

Al enfrentarse con los conjuntos infinitos, uno de los primeros obstáculos epistemológicos que aparecen es el de poder reconocer que en estos conjuntos el todo puede ser igual a una de sus partes. Este es uno de los puntos iniciales que nos muestran que estos conjuntos tienen características muy distintas de las que se puede hallar en los conjuntos finitos, y que, en particular, pueden contradecir lo que obtenemos de nuestra intuición.

La finalidad matemática de esta actividad es presentar a los alumnos con una serie de situaciones que los conduzcan a reconocer esta peculiaridad.

CARACTERÍSTICAS DEL GRUPO CON EL QUE SE LLEVÓ A CABO LA ACTIVIDAD

La actividad se resolvió en un grupo de 5º año de escuela media (17-18 años) en la Ciudad de Buenos Aires, Argentina. El grupo está formado por doce alumnas y tienen en su educación una orientación de Bachillerato en Ciencias, con una carga horaria en 4º y 5º año de seis horas cátedra de 40 minutos cada una de matemática por semana.

El nivel académico general del grupo es medio-alto, destacándose las habilidades algorítmicas por sobre las situaciones no estructuradas, como la que se presentó para resolver. La actividad se resolvió en un módulo de dos horas cátedra, pidiendo a las alumnas que trabajaran de forma individual, y se terminó con la etapa de institucionalización.

DISEÑO DE LA ACTIVIDAD

La actividad se plantea en dos etapas. En la primera parte se permite que las alumnas respondan a preguntas abiertas sobre la base de la resolución de situaciones sencillas que no presentan dificultades al nivel en que las alumnas están trabajando. En esta etapa se desea establecer las ideas intuitivas con que las alumnas cuentan sobre la comparación entre los cardinales de conjuntos finitos e infinitos y algunos de sus subconjuntos propios.

En la segunda parte se plantea a través de un ejemplo la biyección como una posibilidad para comparar conjuntos cuando estos son demasiado grandes o infinitos; y se intenta con el final de la actividad que las alumnas contradigan las conclusiones alcanzadas anteriormente. Las preguntas abiertas que aquí se presentan tienen por objetivo no sistematizar el tipo de respuesta, sino llevarlas a expresarse a través de un texto, una argumentación presentada en lenguaje natural.

ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD POR PARTES

Primera Parte

Pregunta 1

1. Considera el conjunto A de los números naturales sin el cero menores que 20

   a. ¿Puedes hacer una lista completa de ellos? Si tu respuesta es sí, hazlo en el espacio dejado a continuación. Si tu respuesta es no, explica por qué.

   $A = \{$

   b. Considera ahora el conjunto A’ de los números pares que pertenecen al conjunto A del punto anterior. ¿Puedes hacer una lista completa de ellos? Si tu respuesta es sí, hazlo en el espacio dejado a continuación. Si tu respuesta es no, explica por qué.

   $A' = \{$

   c. ¿Cuál de los dos conjuntos anteriores tiene mayor cantidad de elementos? Justifica tu respuesta.

bjetivo

La idea de esta sección era proponer a las alumnas con una situación sencilla y familiar que las llevara a recordar algunas de las ideas y formas de expresión de conjuntos, tema enseñado durante el primer año de la escuela media.

Análisis a Priori

Se espera que en esta sección las alumnas no presenten mayores problemas en la resolución de la actividad. Durante la resolución de esta parte, no hay intervención del profesor ni intercambio entre las alumnas sobre lo que están haciendo.

Para la resolución de las preguntas presentadas, los conocimientos que se involucran son únicamente la idea de conjunto (intuitiva como colección) y la comparación entre colecciones para determinar si una es o no mayor que otro. Como nociones matemáticas, basta con saber cuáles son los números naturales.

Análisis a posteriori

En general, la actividad se presentó sin mayores dificultades. Se destacaron estas respuestas y planteos

- Algunas de las alumnas dudaron sobre si incluir o no al 20 en la secuencia de los conjuntos A y A', aunque finalmente lo resolvieron no incluyéndolo
- Todas las alumnas lograron contestar correctamente la tercera pregunta, identificando a A como al conjunto que tiene mayor cantidad de elementos, y entre las respuestas que se dieron están:
    - *El conjunto A tiene más porque son 19 números y el A' tiene 9*
    - *El conjunto A es más grande porque son los pares y los impares*
    - *El conjunto A es más grande porque los de A' son algunos de los que hay en A*

Pregunta 2

2. Considera el conjunto B de los números naturales sin el cero menores que 100.000

    a. ¿Puedes hacer una lista completa de ellos? Si tu respuesta es sí, hazlo en el espacio dejado a continuación (puedes utilizar alguna forma de expresión general, como los puntos suspensivos). Si tu respuesta es no, explica por qué

$B = \{$

b. Considera ahora el conjunto B’ de los números pares que pertenecen al conjunto B del punto anterior. ¿Puedes hacer una lista completa de ellos? Si tu respuesta es sí, hazlo en el espacio dejado a continuación (puedes utilizar alguna forma de expresión general, como los puntos suspensivos). Si tu respuesta es no, explica por qué

$B' = \{$

c. ¿Cuál de los dos conjuntos anteriores tiene mayor cantidad de elementos? Justifica tu respuesta.

Objetivo

Con esta parte se espera que las alumnas puedan determinar la posibilidad o no de escribir una lista completa de los números menores de 100.000, de manera que distingan primero entre conjuntos finitos de pequeños y grandes y entre conjuntos grandes e infinitos, situación que suele presentarse al trabajar con conjuntos infinitos.

Análisis a Priori

Se espera que en esta sección las alumnas no presenten mayores problemas en la resolución de la actividad, excepto en la forma de escribir una lista. Durante la resolución de esta parte, no hay intervención del profesor ni intercambio entre las alumnas sobre lo que están haciendo.

Para la resolución de las preguntas presentadas, los conocimientos que se involucran son únicamente la idea de conjunto (intuitiva como colección), la forma de expresión de uso de los puntos suspensivos y la comparación entre colecciones para determinar si una es o no mayor que otro. Como nociones matemáticas, una vez más, basta con saber cuáles son los números naturales.

Análisis a posteriori

En general, la actividad se presentó sin mayores dificultades. Se destacaron estas respuestas y planteos.

- Una de las alumnas no escribió el último número de la lista, presentando a los conjuntos de la siguiente manera:

$B = \{1,2,3,4,...\}$
$B' = \{2,4,6,8,...\}$

- Algunas de las alumnas contestaron que si bien es posible hacer una lista completa para cada uno de los conjuntos, es muy tedioso (difícil, complicado, muy lento, etc.), por lo cual la expresión con puntos suspensivos es un buen substituto.
- Todas las alumnas lograron contestar correctamente la tercera pregunta, identificando a B como al conjunto que tiene mayor cantidad de elementos, aunque en este caso ninguna de las alumnas escribió la cantidad de elementos en cada conjunto, simplemente recurrieron como justificaciones a las siguientes:
    - *El conjunto B es más grande porque son los pares y los impares*
    - *El conjunto B es más grande porque los de B' son algunos de los que hay en B*

Pregunta 3

3. Considera el conjunto C de todos los números naturales sin el cero

    a. ¿Puedes hacer una lista completa de ellos? Si tu respuesta es sí, hazlo en el espacio dejado a continuación (puedes utilizar alguna forma de expresión general, como los puntos suspensivos). Si tu respuesta es no, explica por qué.

    $C = \{$

    b. Considera ahora el conjunto C' de los números pares que pertenecen al conjunto C del punto anterior. ¿Puedes hacer una lista completa de ellos? Si tu respuesta es sí, hazlo en el espacio dejado a continuación (puedes utilizar alguna forma de expresión general, como los puntos suspensivos). Si tu respuesta es no, explica por qué.

    $C' = \{$

    c. ¿Cuál de los dos conjuntos anteriores tiene mayor cantidad de elementos? Justifica tu respuesta.

<u>Objetivo</u>

En esta parte se presenta a las alumnas con un conjunto infinito ya conocido y trabajado por ellas. Durante el segundo año de escolaridad, las alumnas cubren la unidad de conjuntos numéricos y se estudian las propiedades de infinitud, densidad, existencia o no de primer elemento, no existencia de último elemento, continuidad, etc. Para ellas no es sorpresa saber que este conjunto es infinito, aunque no se han estudiado otras características de estos conjuntos.

Análisis a Priori

Se espera que en la primera y segunda pregunta de esta sección las alumnas no presenten mayores problemas en la resolución de la actividad, excepto en la forma de escribir una lista infinita, aunque ya habiendo escrito las anteriores se supone que podrán resolverlo de manera independiente. Con respecto a la tercera pregunta, se espera que las alumnas den como respuesta que el conjunto de todos los números naturales tiene mayor cantidad de elementos que el conjunto de los números naturales pares, de acuerdo a lo contestado hasta el momento y de acuerdo a lo que indica la intuición. Se espera también que algunas alumnas no logren contestar la pregunta por la imposibilidad de contar los elementos de ambos conjuntos.

Durante la resolución de esta parte, no hay intervención del profesor ni intercambio entre las alumnas sobre lo que están haciendo.

Para la resolución de las preguntas presentadas, los conocimientos que se involucran son únicamente la idea de conjunto (intuitiva como colección), la forma de expresión de uso de los puntos suspensivos y la comparación entre colecciones para determinar si una es o no mayor que otro. Como conceptos, basta con saber cuáles son los números naturales.

Análisis a posteriori

Las alumnas pudieron resolver las dos primeras preguntas correctamente, argumentando que es imposible escribir una lista de todos los números naturales (o de todos los números naturales pares) dado que son infinitos, aunque intentaron algunas expresiones como las siguientes (algunas de ellas incorrectas):

- $C = \{1,2,3,4,5,...\}$ $C' = \{2,4,6,8,10,...\}$
- $C = [1;+\infty)$ $C' = [2;+\infty)$
- $C = \{1,2,3,4,5,...,+\infty\}$ $C' = \{2,4,6,8,10,...,+\infty\}$

Una de las alumnas expresó que debe leerse al símbolo de más infinito como *"y se sigue así sucesivamente"*

Con respecto a la tercera pregunta, aparecieron tres respuestas bien distintas:

- *El conjunto C es mayor que C' dado que tiene a todos los naturales, no sólo a los pares*
- *No sabemos cuando terminan ni C ni C' pero seguramente C es mayor porque C' es una parte de C y en C quedan los impares si saco los pares para llevarlos a C', si siguen quedando, entonces C es más grande, tenía más elementos en él.*
- *No se pueden comparar, los dos son infinitos, así que no se puede saber.*

Segunda Parte

Pregunta 1

Dados dos conjuntos A y B cualesquiera, se sabe que al compararlos de acuerdo a su cantidad de elementos, se presenta entre ellos una de las siguientes relaciones:

$$cantidad\ de\ elementos\ de\ A > cantidad\ de\ elementos\ de\ B$$

$$cantidad\ de\ elementos\ de\ A < cantidad\ de\ elementos\ de\ B$$

$$cantidad\ de\ elementos\ de\ A = cantidad\ de\ elementos\ de\ B$$

1. Presenta un ejemplo para cada uno de estos casos, proponiendo un conjunto A y un conjunto B que se puedan comparar.

Objetivo

Esta primera pregunta de la segunda parte pretende llevar a las alumnas a una nueva forma de comparar tamaños de conjuntos. Con esta primera actividad se espera primero que reconozcan que siempre se da una de estas tres relaciones entre dos conjuntos, ya sean finitos o infinitos.

Análisis a Priori

Se espera que las alumnas respondan esta pregunta sin mayores complicaciones, aunque puede ocurrir que intenten trabajar con conjuntos infinitos, dado que es el último tipo de conjuntos con el que han trabajado en la parte anterior.

Durante la resolución de esta parte, no hay intervención del profesor ni intercambio entre las alumnas sobre lo que están haciendo.

Para la resolución de la pregunta presentada, los conocimientos que se involucran son únicamente la idea de conjunto (intuitiva como colección) y la comparación entre colecciones para determinar si una es o no mayor que la otra.

Análisis a posteriori

En esta parte se esperaron varias respuestas incorrectas, dado que, como era esperado, muchas alumnas buscaron ejemplos dentro de los conjuntos infinitos, además de desconocer notaciones correctas para utilizar. Algunas de las respuestas más notables fueron:

- Algunas alumnas presentaron colecciones finitas de números, bien pequeñas y fácilmente comparables, presentando los conjuntos por extensión, y considerando el menor de los conjuntos como un subconjunto del mayor de los dos presentados en los casos de desigualdad. Por ejemplo:

$$\{1,2,3,4,5\} > \{1,2,3\}$$
$$\{5,6,7,8,9,10\} < \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$$
$$\{1,2,3\} = \{4,5,6\}$$

- Una de las alumnas definió conjuntos numéricos por comprensión, de la siguiente manera

  Divisores de 100 > divisores de 10
  Divisores de 5 < divisores de 50
  Divisores de 8 = divisores de 6

- Otra de las alumnas trabajó con conjuntos no numéricos, también definidos por comprensión

  Consonantes del alfabeto > vocales del alfabeto
  Cantidad de hombres de la Argentina < cantidad de mujeres de la Argentina
  Dedos de la mano = dedos de los pies

- Las alumnas que buscaron ejemplos dentro de los conjuntos infinitos por lo general tuvieron errores, aunque otras lograron ejemplos certeros comparando conjuntos finitos con conjuntos infinitos, como por ejemplo:

  Reales menores que 10 > naturales menores que 10
  Naturales menores que 10 < enteros menores que 10
  Naturales mayores que 10 = enteros mayores que 10

- Otras alumnas confundieron conjuntos con intervalos y presentaron ejemplos dentro de intervalos reales de distinta amplitud, obteniendo respuestas incorrectas.

Preguntas 2 y 3. a)

2. Una forma de comparar conjuntos sin necesidad de contar la cantidad de elementos en cada conjunto es a partir de una relación que se pueda establecer entre ambos. Considera este ejemplo:

> *En la fiesta de entrega de los premios Oscar, los organizadores requieren, por una cuestión de estética, que ninguna silla se encuentre vacía mientras dura la ceremonia. A tal fin, se contratan extras que, vestidos de gala, se encargan de ocupar todos los asientos haya vacíos, ya sea porque hay celebridades ausentes o porque se han retirado antes de tiempo o llegado tarde, o simplemente, han ido al toilette. A fin de saber si el conjunto de las personas es menor que el conjunto de los asientos, basta con observar la sala y determinar si hay asientos vacíos. Si llamamos P al conjunto de las personas y S al conjunto de las sillas y vemos sillas vacías, podemos afirmar que P<S. Si en cambio, hay personas de pie, entonces P>S y los extras deberán pararse para devolver sus sillas a las celebridades, y si todas las sillas se encuentran ocupadas por algún invitado a la ceremonia, entonces se puede decir que P=S.*

3. Considera ahora los conjuntos A y A’ de la primera parte. Podemos comparar la cantidad de elementos estableciendo una relación como en el caso de los premios.

Planteamos la relación: *a cada elemento de A lo relaciono con su doble.*

Tendremos entonces:

$$A = \{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12 \quad 13 \quad 14 \quad 15 \quad 16 \quad 17 \quad 18 \quad 19\}$$

$$A' = \{2 \quad 4 \quad 6 \quad 8 \quad 10 \quad 12 \quad 14 \quad 16 \quad 18\}$$

De esta manera, se observa que la cantidad de elementos de A es mayor que la cantidad de elementos de A’, dado que hay elementos de A que quedan sin relacionar con ningún elemento de A’.

Se puede también hacer una relación similar entre los conjuntos B y B’.

$$
\begin{array}{lcccccccccccccccc}
B = \{ & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & \ldots & 24.999 & 25.000 & \ldots \;\; 99.999\} \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \\
B' = \{ & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & 18 & 20 & 22 & 24 & \ldots & 49.998\} & &
\end{array}
$$

a. ¿Qué puedes decir de los conjuntos B y B’?. Justifica tu respuesta.

Objetivo

Con estas preguntas se espera primero lograr que las alumnas conozcan el método de biyección, trabajado en el ejemplo en una situación no matemática con dos conjuntos muy grandes y difíciles de contar, y segundo, que puedan extrapolar esta forma de relación a conjuntos numéricos, por ahora, finitos. La pregunta intenta que las alumnas logren argumentos similares al presentado para poder observar si luego serán capaces de aplicarlo a conjuntos infinitos.

Análisis a Priori

Se espera que las alumnas puedan contestar esta pregunta sin mayores dificultades, dado que el ejemplo inicial, sencillo y familiar, debería permitirles comprender el funcionamiento del método.

Análisis a posteriori

Esta pregunta se respondió correctamente en todos los casos aunque no siempre con los argumentos esperados. Se destacaron estos tres tipos de respuestas:

- *En B hay más cantidad de elementos que en B’ porque hay elementos de B que no se relacionan con nadie*
- *En B hay el doble de elementos que en B’* (no se explica nada más)
- *El conjunto de B’ se acaba primero, por lo cual, quedan elementos de B sin juntarse con ninguno, dado que los de B’ se acabaron, porque eran menos.*

Pregunta 3.

> b. Intenta establecer ahora una relación entre C y C', utilizando la forma de comparación presentada en esta segunda parte. ¿Qué puedes decir? ¿Coincide esta respuesta con lo que planteaste en la primera parte? ¿Por qué?

<u>Objetivo</u>

Con esta pregunta se espera que las alumnas se enfrenten a un conflicto entre lo que pensaban inicialmente guiadas por su intuición y lo que pueden encontrar después de haber establecido una biyección entre los dos conjuntos infinitos. Se espera generar un quiebre en los conocimientos previos para dar paso a un nuevo conocimiento, en este caso, las características especiales de los conjuntos infinitos.

<u>Análisis a Priori</u>

Con respecto a estas preguntas se esperan dos cosas distintas:

- Que las alumnas logren establecer la biyección sin dificultades
- Que las alumnas tengan dificultades para establecer la igualdad de ambos conjuntos

El objetivo final es que se enfrenten con sus propias intuiciones y puedan argumentar sobre la diferencia en sus pensamientos, aunque la justificación formal deberá ser dada luego por el docente

<u>Análisis a posteriori</u>

Con respecto al establecimiento de la relación entre ambos conjuntos, todas las alumnas lograron escribirla, expresando los conjuntos como colección y asociando cada número con su doble.
Con respecto a la comparación entre los dos conjuntos, algunas de las respuestas presentadas fueron las siguientes:

- *Se puede decir que acá en realidad no se sabe bien, porque no sabemos su fin, pero debería pasar lo mismo que con los dos ejemplos anteriores*
- *No, porque cuando los números son infinitos se llega muy lejos, en este caso todos tendrían relación con un número, porque cualquier número por 2 da otro número siempre. Entonces hay la misma cantidad.*
- *No coincide con lo que había dicho antes, porque ahora a todos los números de C les corresponde su doble, entonces tienen la misma cantidad.*
- *Son infinitos los dos así que ninguno tiene más elementos que el otro.*

INSTITUCIONALIZACIÓN

Luego de haber finalizado con la resolución de la actividad, el grupo hizo una puesta en común de las respuestas que habían presentado a cada una de las preguntas de la actividad y se finalizó con la intervención del docente, discutiendo en particular el método de la biyección y la característica entre el todo y las partes de los conjuntos infinitos. Se consideraron otros conjuntos para comparar (naturales e impares, naturales y cuadrados perfecto, naturales y enteros) y poder observar que para los conjuntos infinitos, lo esperado no es lo que ocurre.

CONCLUSIONES

El estudio de los conjuntos infinitos enfrenta a quienes lo aprenden con situaciones inesperadas y contradictorias con lo esperado. No es común que este tipo de temática sea cubierta en la escuela media, aunque los alumnos tratan con el término infinito y los conjuntos infinitos a lo largo de toda su escolaridad. Debido a este tipo de trabajo, los alumnos forman en su mente ideas que quedan desconocidas a menos que sean traídas al aula por una actividad particular diseñada a tal fin.

La resolución de este tipo de secuencias permite comenzar a introducir algunas de las características de los conjuntos infinitos, aunque para su correcto tratamiento es necesario complementar el estudio con otras actividades y conceptos.

Se destaca dentro de esta actividad la posibilidad de construir una de las definiciones de conjunto infinito, y poder comenzar a "corregir" las ideas adquiridas hasta el momento.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 7, No.2, pp. 33-115

D'Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática.* México: Editorial Reverté.

Fischbein, E. (1989). Tacit Models and Mathematical Reasoning. En *For the learning of Mathematics. 9, 2.* (pp. 9 – 14)