LA INGENIERÍA DIDÁCTICA, UN RECURSO IMPORTANTE PARA DESARROLLAR PRÁCTICAS ARGUMENTATIVAS EN EL AULA DE MATEMÁTICAS

Liliana Homilka
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín. V. González"
Ciudad de Buenos Aires. (Argentina)
Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada CICATA (México)
lhomilka@yahoo.com.ar

RESUMEN

En este trabajo se reporta una experimentación realizada con alumnos recién ingresados a la carrera de profesorado de matemática, con la finalidad de analizar las estrategias de argumentación que presentan ante una problemática geométrica de características no habituales en las situaciones problemáticas que se les presentan. La experiencia consta de una etapa de trabajo individual y otra en grupo para observar las influencias de las actividades colaborativas en la argumentación matemática.

Introducción

Las investigaciones realizadas desde la aproximación socioepistemológica evidencian que los alumnos construyen conocimientos que son el producto de la interacción con sus compañeros, con sus historias de vida o con su ambiente escolar y cultural.

Si uno quiere desestabilizar una noción enraizada es necesario que el alumno pueda invertir sus concepciones dentro de situaciones numerosas e importantes para él, con condiciones informacionales diferenciadas para que un salto cualitativo en su forma de pensar y de explicar la matemática sea necesario.

Los significados que se van construyendo en cada práctica se manifiestan a partir de los argumentos que se dan, los cuales nos muestran cómo el alumno reorganiza su conocimiento matemático. En especial, el conocimiento geométrico, depende de la formación que ha recibido el individuo.

“La problemática de la demostración en el aula de matemática, debe enmarcarse dentro de otra problemática más amplia: el desarrollo y evaluación de las distintas prácticas argumentativas que se realizan en este ámbito.

Los distintos tipos de argumentaciones en la clase de matemática permiten que los alumnos adquieran el dominio de formas de razonamiento que si bien pueden aplicarlas inicialmente a un dominio formal, posteriormente les permitan enriquecer su manera de razonar ante problemáticas de diverso origen"

(Crespo Crespo, 2005).

Los problemas que se le presenten al alumno tendientes a desarrollar su pensamiento geométrico, deben propiciar las construcciones de figuras que le posibiliten construir las nociones matemáticas que en ellos están involucradas, de modo tal, que sea la situación matemática que realiza la que lo lleve al autoconvencimiento de la actividad matemática realizada. (Adquisición de conceptos y rigor lógico es sus deducciones matemáticas).

"El tipo de argumentaciones convincentes en la matemática sufren una interesante evolución según el grado de desarrollo y conocimiento del sujeto que las formula." (Crespo Crespo, 2005).

NIVELES DE ARGUMENTACIÓN

En cada actividad matemática deben tenerse en cuenta las causas que conducen a dar ciertas respuestas, el tipo de explicaciones dadas tanto orales como escritas para representar una idea matemática, como también la influencia que las ideas culturales y sociales juegan en la formación de conceptos matemáticos. Esto permitirá comprender las razones y explicaciones que hacen que un individuo actúe de cierta manera frente a un contenido matemático. Es aquí dónde el pensamiento matemático se relaciona con la didáctica de la matemática en la búsqueda de una respuesta a los interrogantes planteados por la educación y el diseño de secuencias didácticas orientadas a lograr argumentaciones correctas en el aula. Por ello, al enfrentarse el alumno ante un desafió matemático nuevo debe ser capaz de a convencerse a si mismo de lo que ha realizado, convencer a sus compañeros de sus resultados y luego, defender sus ideas de forma de convencer a su profesor.

Algunos autores han propuesto niveles específicos en el desarrollo del rigor, proponiendo, por ejemplo, tres estadios para la elaboración de un razonamiento convincente:

- El convencimiento propio.
- El convencimiento de un amigo
- El convencimiento de un enemigo

A partir de esta clasificación y sin llegar a estos extremos, pensamos que podemos hablar en el aula de tres niveles en la elaboración de las argumentaciones:

- El convencimiento propio
- El convencimiento del par
- El convencimiento del interlocutor no par

Por otra parte, Balacheff identifica tres tipos de situaciones en las que son necesarios los procesos de validación, tanto en la actividad de los matemáticos como en el aula: decidir, convencer y saber (Balacheff, 2000).

En este caso la experimentación se orienta a la verificación de el nivel de autoconvencimiento primero y posteriormente la defensa de la resolución realizada, argumentando para convencer simultáneamente a pares, sus compañeros, y a un interlocutor no par, el docente.

Características del curso en donde se realizo la experimentación

Los alumnos que participaron de la experiencia pertenecen al primer año del profesorado de matemática del Instituto Nacional Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González", de Buenos Aires. La misma se realizó en el curso de ingreso, cuyos contenidos se relacionan y complementan con otras instancias curriculares de primer año como las de Análisis I y Geometría I y se articulan también con Geometría II. Este curso de doce horas semanales (cada una de 40 minutos) complementa y brinda herramientas a utilizar en otras materias, como así también permite el desarrollo del pensamiento geométrico y algebraico. La modalidad de trabajo, permite la resolución de problemas, posibilitando la profundización a partir de un tratamiento dinámico de los contenidos correspondientes a la currícula del nivel medio que por diversas razones no se los aborda o en algunos casos, se hace un tratamiento aislado de los mismos.

Se trata de un grupo heterogéneo, cuyas edades oscilan entre los 18 y 40 años, provienen de diferentes escuelas y modalidades, desde bachilleratos, escuelas de adulto, o tras abandonar carreras universitarias como la de ingeniería y ciencias económicas. Muchos de ellos no han estudiado desde que completaron la escuela media, son aplicados, se esfuerzan por estudiar, pero tiene algunos conceptos olvidados, por lo que a veces se les dificulta la comprensión y resolución de situaciones problemáticas.

LA ACTIVIDAD PROPUESTA

En el encuentro anterior al de la experimentación, se insiste en reiteradas oportunidades que traigan regla, compás, escuadra, lápices de colores, transportador, debido a que muchos alumnos no lo hacen regularmente.

Se comienza el encuentro explicando que la forma de trabajo será diferente a la que están acostumbrados (el planteo y discusión de dudas sobre los problemas de la guía, se realizará en la última hora de la clase).Se explicita que, habrá una instancia de trabajo individual, en la que es muy importante que cada uno resuelva la situación de la forma que pueda y que no trate de mirar lo que hacen los compañeros que tiene al lado, es preferible que antes de comunicarse con ellos, lo haga con los docentes; que luego habrá una instancia de trabajo grupal en donde podrá intercambiar opiniones con sus pares.

Se elige uno de los problemas presentado por la profesora coordinadora de los cuatro cursos, se reformula como será presentado a los alumnos y se determina la forma en que será trabajado en el aula. Por lo cual, se realiza un *análisis a priori* sobre el problema seleccionado.

Para ello, se ha tenido en cuenta los conceptos teóricos abordados y tratados en el curso, y las actividades que se han realizado durante el mismo.

Esta actividad didáctica, apunta a que los alumnos identifiquen a partir de la experiencia de la construcción, y de las decisiones que tomen a lo largo del desarrollo de la misma, que no es suficiente considerar solamente los lados para caracterizar un paralelogramo, además, les da la posibilidad de que exploren las relaciones entre datos y propiedades (la triangular), puedan realizar su formulación y validación para establecer cuándo es posible o no la construcción de un paralelogramo. La intención es que el alumno descubra en qué casos y bajo qué condiciones la construcción es o no única.

Por lo general, es una dificultad para el alumno comprender que un problema puede tener una, infinitas o ninguna solución.

Los conocimientos previos necesarios para abordar la problemática son: Triángulos, Cuadriláteros, elementos que los caracterizan (lados, ángulos, diagonales), trazado de paralelas, noción de circunferencia, habilidad para el debate, estrategias de argumentación y validación.

Los contenidos matemáticos que la actividad permite trabajar son: ángulos, búsqueda de relaciones, construcción con regla y compás, elementos y propiedades de los paralelogramos formulación y comprobación de conjeturas, valoración del trabajo en grupo en la resolución de problemas, movimientos en el plano, relaciones entre los datos del problema y la cantidad de soluciones.

PRIMERA ETAPA: INSTANCIA DE TRABAJO INDIVIDUAL.
SU ANÁLISIS A PRIORI:

Utilizando regla, escuadra y compás, construí un paralelogramo en el cual un lado mida 4cm. y el otro 6cm. ¿Habrá un solo paralelogramo que cumpla con estas condiciones?

- Tiene la intención de que los alumnos identifiquen que no es suficiente considerar solamente los lados para caracterizar un paralelogramo, al realizar la construcción pedida, podrán reconocer o descubrir que a los datos iniciales hay que agregarle otro dato. (El ángulo comprendido entre los lados, la longitud de la diagonal)

Se considera como hipótesis, que los alumnos sólo conocen la definición *"Todo cuadrilátero que tiene dos pares de lados paralelos se llama paralelogramo"* y que están acostumbrados a una única figura. La "imagen que ellos pueden tener de un paralelogramo" es la que les quedó de la escuela primaria o de la que se formaron en reiteradas situaciones escolares en el nivel medio, en donde los docentes, por lo general, les presentan la misma.

- La experiencia geométrica vivida en la escuela secundaria o la no vivida, les impiden concebir al ángulo o a la diagonal como variables si se conocen los lados.

- Es muy probable, que muchos planteen dos soluciones, el paralelogramo "tradicional" y el rectángulo, en este ultimo caso, al considerar que el ángulo entre los dos lados puede ser recto, pueden anticipar la respuesta sin necesidad de realizar la construcción.

- Como se espera que algunos alumnos no utilicen giros, o se apoyen en una circunferencia, es que se propone la construcción empleando compás. (En la etapa dos, cobra vida esta idea)

- Si se da como dato faltante la diagonal, debido a que muchos tienen poca experiencia geométrica, es posible que algún alumno considere la longitud de la diagonal como la suma de 4+6, que realice la construcción, En un algún momento de la actividad, tendrán que decidir si es posible o no, esto lo hará dudar. Aquellos alumnos que la realicen y digan que se puede hacer el paralelogramo, forzaran las medidas, argumentaran que los errores se deben a las mediciones, con esta regla de acción no hay en lo actuado la posibilidad de reflexión alguna. (Actuación del docente si es necesario, o dejarlos pasar a la etapa siguiente y que entre ellos lo discutan, dependerá de lo que se observe en el aula).

- Otros, afirmaran que no es posible tal construcción producto de varios intentos pero no podrán argumentar por que no es posible y otros darán la respuesta correcta a partir de considerar las relaciones entre lados y diagonal, aplicando la propiedad triangular.

- En la etapa de devolución el docente deberá dar algunas pistas, como por ejemplo, que construyan primero el triángulo que forma la diagonal con los lados y que luego completen el paralelogramo, para que se convenzan de la imposibilidad. De esta manera, formularan y validaran la propiedad.
- Si el alumno considera que el dato faltante es la diagonal cuya longitud sea $\sqrt{52}$ entonces, la construcción es única. Lo mismo ocurre si mide el ángulo determinado por los lados y determina como tercer dato su valor.

- Se cree poco probable que algún alumno considere a la altura como el tercer dato.

- En el trabajo individual, el docente debe observar como realizan los alumnos la construcción, qué instrumentos geométricos utilizan, muchos alumnos preguntaran al docente si lo que han hecho está bien, a partir de lo observado se responderá con otra pregunta, por ejemplo ¿por qué es única la construcción?, para que el estudiante piense y elabore respuestas mas fundadas o ¿por qué no ha utilizado el compás?, empleando ese instrumento, puede ser que encuentre otras respuestas o argumentos mas sólidos.

La experimentación de la primera etapa:

El texto repartido a los alumnos es el siguiente:

Primera etapa: instancia de trabajo individual.

Utilizando regla, escuadra y compás, construí un paralelogramo en el cual un lado mida 4cm. y el otro 6cm. ¿Habrá un solo paralelogramo que cumpla con estas condiciones?

Observación: En tu hoja de trabajo deben figurar todos tus intentos de construcción.
Debajo de tus dibujos, responde por escrito la pregunta que se formula, describiendo todas las consideraciones que has hecho para llegar a ella.

Se solicita a los estudiantes que comiencen la actividad propuesta.

Desarrollo de la primera etapa:

En muy poco tiempo, los alumnos realizaron la construcción (figura A), muchos ni siquiera utilizaron los elementos geométricos, en muy pocos casos, se observaba el paralelogramo y el rectángulo.

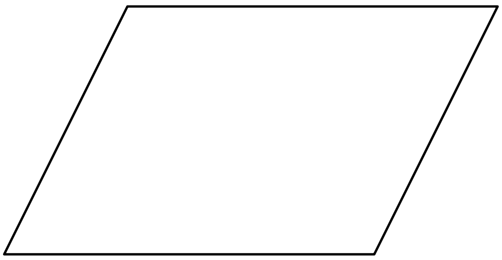


Figura A

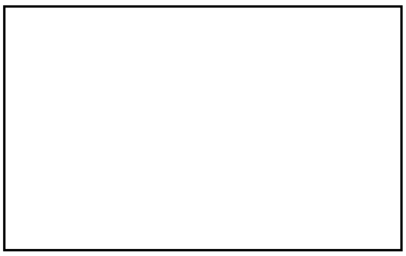


Figura B

Al pasar a escribir la respuesta y describir las reglas de acción que cada uno aplicó, comenzaron a surgir dificultades y se puso en evidencia que no había sido una actividad muy reflexiva para algunos. Otros manifestaban que debían pensar algo y no se les ocurría qué, no sabían qué escribir y por qué, se escucharon comentarios como: *"es única la construcción y no hizo falta el compás*". Otros comentaron que: "*eran dos, porque si el ángulo es recto se forma un rectángulo cuyos lados miden 4 y 6 y que no era necesario hacerlo para determinar la respuesta"*;

Algunos dudaban respecto a la cantidad de soluciones y otros se preocuparon por no encontrar argumentos para justificar lo que habían realizado. Sólo cinco alumnos respondieron que eran muchas las soluciones pero esa conclusión no se desprendía de las dos construcciones (figura A y B). Las dificultades que se les presentaban, dieron origen a que comenzaran a discutir entre ellos, para enriquecer la misma se ordeno un debate, se les planteo que todos tenían razón en la respuesta que daban (una, y muchas soluciones), pero que en este intercambio de ideas debían surgir los argumentos para convencer a los demás de que la respuesta era una solución, y los que consideraban que existen muchas construcciones debían hacer lo mismo.

Uno de los alumnos tomó la palabra y plantea que no existe un único paralelogramo, que si bien no lo pudo dibujar, pensó que si hacia girar un lado el paralelogramo iba cambiando de posición y así obtenía muchos, cosa que provoco un "ah", en esta instancia de la clase se les pregunta que significa muchos y a coro varios dicen infinitas. Bien, ya encontraron dos construcciones, realicen las que faltan o las que consideran necesarias para visualizar que son infinitas. Se recomienda no perder de vista la idea de hacer girar un lado del paralelogramo, que comparen las figuras A y B y observen qué se había modificado y cuáles no cambian.

La intervención del docente es para resaltar que hay dos posturas, que las dos son validas y que en grupo trabajen ambas. A continuación, se les pide que realicen lo que se había pensado como etapa dos, se pone así en marcha la segunda fase.

SEGUNDA ETAPA: INSTANCIA DE TRABAJO GRUPAL

(Se formaran 11 grupos, cada uno de ellos estará conformado por 7 alumnos)

Su análisis a priori

Cada alumno comunicará a los otros integrantes del grupo lo realizado en la etapa anterior.
Luego del intercambio de opiniones, el grupo deberá determinar

> ***¿Cómo hacer para indicar que se pueden construir muchos paralelogramos? ¿Cuántos son? ¿Por qué?***

- La segunda etapa permite que el alumno descubra que si se modifica el ángulo entre los lados se modifica el paralelogramo, pero siguen cumpliéndose las condiciones iniciales.

- Analizar los posibles valores del ángulo, condiciones de existencia.
- Debatir los resultados de las construcciones entre ellos para hacer explicitas sus ideas, las que les permitieron obtener ciertos dibujos, defender sus visiones, confrontarlas con las de sus compañeros y elaborar conclusiones

- Es una forma de profundizar los conceptos a partir de la evolución de la resolución del problema, es una forma de que todos avancen, desde el más débil "intelectualmente" hasta el más avanzado.

- Esta actividad les permitirá descubrir que lo que se ve y lo que se dibuja no es suficiente en geometría.

- En la etapa de devolución, se puede preguntar qué otros elementos se modifican y cuáles se mantienen invariantes. Con lo cual, pueden descubrir que se modifica la altura o las diagonales, reconocer la unicidad o no de la construcción, lo que los lleva a realizar producciones mas argumentativas.

Situación de institucionalización

En función de lo realizado en las dos instancias, se pedirá que cada alumno responda por escrito la siguiente pregunta ¿Cuál es tu conclusión?, resaltando que utilicen libros de textos para enriquecer sus argumentaciones.

La experimentación de la segunda etapa:

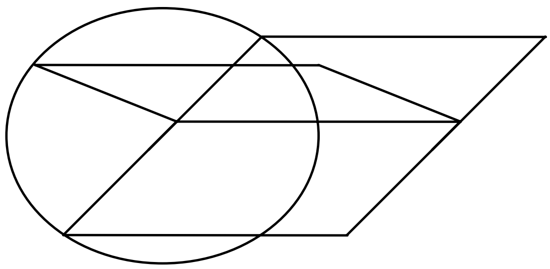
La consigna para cada grupo fue la siguiente:

> ***¿Cómo hacer para indicar que se pueden construir muchos paralelogramos? ¿Cuántos son? ¿Por qué?***

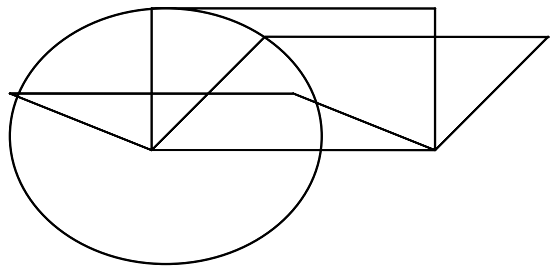
Desarrollo de la Segunda etapa:

Algunos dibujos fueron:

Construcción I



Construcción II



En la puesta en común, se realizaron las construcciones anteriores en el pizarrón, hubo quien manifestó que no eran infinitas ya que para un ángulo de 0º, 180º y 360 º no hay paralelogramo, a partir de este momento determinan los posibles valores del ángulo, algunos resultados fueron los comprendidos en el intervalo (0; 360) y otros los del intervalo (0; 180) U (180; 360).

Esto derivó a que algunos manifestaran que no era necesaria la circunferencia, bastaba con la semicircunferencia para señalar que son infinitos los paralelogramos que se pueden construir.

El grupo que realizó la construcción I planteo el interrogante de si se debía o no considerar los paralelogramos que son congruentes. Esto llevó a que algunos preguntaran cómo se daban cuenta de eso, y lo explicaron por que se veía una simetría central con centro en el punto que es centro de la circunferencia. Y se estaría contando dos veces la misma construcción a lo cual el ayudante pregunto si eso era indicativo de que no fueran infinitas las construcciones y afirmaron que no, que son infinitas igualmente. Como todos no habían visto en la escuela movimientos en el plano les sugirió que lo discutieran en la clase de geometría I y luego comentaran a que conclusión se llegaba.

Los alumnos acordaron que el ángulo varía en el intervalo (0; 180).

Consideraciones que se realizaron en el pizarrón para elaborar argumentos que señalan que la construcción es única. Manifestaron que había que fijar el valor del ángulo comprendido entre los lados. En esta instancia de la puesta en común se les pregunto si era la única consideración para obtener esa única construcción, solo hay silencio en el aula, se les propone construir un paralelogramo con las siguientes medidas, lados 4 y 6 cm. y la diagonal de 10 cm.

En esta instancia se producen todas las situaciones que se habían pensado en el análisis previo a la aplicación en el aula del problema.

Como cierre, se hizo una síntesis de la experiencia en la que se convencieron de que es necesario leer las consignas del problema, analizar todas las posibilidades para obtener su solución. Muchos comentan que ahora se convencieron y entendieron cuando por ejemplo en álgebra les preguntan sobre las infinitas soluciones que puede haber o ninguna, porque *estaban acostumbrados a que siempre se obtenía un solo resultado como mucho dos en el caso de "las parábolas".*

Se deja como tarea para el hogar la situación de institucionalización que se había pensado dado que el timbre señalaba la finalización de la clase.

CONCLUSIONES

Las actividades permitieron a los alumnos experimentar con la resolución de problemas utilizando construcciones geométricas que involucran la capacidad de visualizar y abstraer cierta información, de vincular información gráfica y lenguaje coloquial.

Les dio la posibilidad de resignificar y/o reconstruir conocimientos previos adquiridos en otras etapas de su escolaridad, resolver las situaciones y clarificar sus conceptos, relacionando los datos con alguno de los elementos que caracterizan el paralelogramo.

Los errores, mejor dicho, las dificultades de los alumnos se debieron en gran parte a la falta de conocimientos previos (elaborar conjeturas, plantear hipótesis, establecer relaciones entre datos y propiedades) pues han olvidado muchas nociones de geometría; a la falta de formalización de ideas, les cuesta mucho expresarlas matemáticamente y especialmente hacerlo por escrito aunque se trate de aquellas que representan nociones paramatematicas, no aprovechan las informaciones de las construcciones, tienen dificultades para la traducción entre el modelo geométrico y el lenguaje coloquial.

Otras de las dificultades observadas son las que persisten por el uso de las figuras llamadas prototipos, rectángulos, paralelogramos, etc. que en determinados momentos de la escolaridad ayudan a la comprensión de conceptos matemáticos se vuelven en obstáculos para la significación de conceptos posteriores. (Rey, 2004). En esta experiencia se resalta, la no aparición de paralelogramos con determinada inclinación de lados, esto se debe, al tratamiento persistente que se realiza en las aulas de presentar ejemplos y modelos denominados prototipos. *Los que intentan incorporar una visión mas o menos completa de las características del concepto geométrico con la* *intención de que el alumno lo construya en cada situación que se lo requiera. Pero que muchas veces actúan como la definición misma del objeto,* (Rey, 2004), de manera que impide ver todas sus propiedades y relaciones entre sus lados, ángulos y demás elementos que lo caracterizan. Esto hace que se pierda de vista en el aula, que todos ellos son sólo representaciones del objeto, por lo que para su conceptualización es necesario recurrir a la incorporación del paralelogramo con diferentes orientaciones y configuraciones, analizando definiciones, propiedades y recurrir a ejemplos visuales y a explicaciones verbales y escritas de del análisis de las construcciones geométricas realizadas por cada alumno.

En las etapas experimentada, se debieron tomar en cuenta las variables involucradas (lados y ángulo comprendido entre ellos), elementos que fueron trabajados por los estudiantes, como también la construcción de la propiedad triangular.

En el trabajo grupal, a los alumnos les resultó más sencillo la extracción de conclusiones a partir de las construcciones y ellos mismos fueron generando nuevas preguntas como el caso de considerar una circunferencia o una semicircunferencia, o si se consideraban o no los paralelogramos que son congruentes.

Algunas características de la personalidad de cada estudiantes se pusieron de manifiesto en la manera de encarar las tareas o en el rol que desempeñaron en el trabajo grupal, desde la inseguridad, los que siempre dudan o creen que siempre se equivocan, los que tienen baja autoestima, los que pelean y quieren primero probar lo que pueden hacer solos, los que respetan las ideas de otros y los siguen, los que pasivamente copian y se están preguntando por la carrera que han elegido (situación no explicita pero por sus caras y posturas corporales se lo puede inferir).

Los que durante el desarrollo de la clase se van sintiendo más seguros y tienen facilidad para explicar sus ideas, lo que se observo por lo comentarios que algunos hicieron en forma clara y precisa y en los argumentos que utilizaron al explicar a los otros compañeros alguna idea.

Consideramos que se ha cumplido con la finalidad que se perseguía, dado que los alumnos han explorado y descubierto nuevas ideas y una forma de trabajar que le es muy útil dado que les posibilita progresar en su pensamiento geométrico al haber expresado sus ideas y razonamientos a los demás integrantes del curso a medida que transcurría el desarrollo de la clase. Esta práctica que se ha realizado en el aula, debe ser pulida y profundizada por todos los que participamos en esta experiencia, ese es el desafió, pero ya estamos dando los primeros pasos, lo que es muy importante.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Balacheff, N. (2000). *Los procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá: Una Empresa Docente. Universidad de los Andes.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(1), 33-115.

Cantoral, R y Montiel, G.(2001).Funciones: Visualización y pensamiento matemático. México: Prentice.

Crespo Crespo, C. (2005a). *El papel de las argumentaciones matemáticas en el discurso escolar. La estrategia de deducción por reducción al absurdo.* Tesis de Maestría sin publicar. CICATA. IPN, México.

Crespo Crespo, C. (2005b). *Las figuras de análisis en las demostraciones matemáticas por reducción al absurdo*. Presentado en III Congreso Virtual de Enseñanza de la Matemática CVEM 2005. Guadalajara (México).

Crespo Crespo, C., Farfán Márquez, R. (2005). *Una visión de las argumentaciones por reducción al absurdo como construcción sociocultural*. En *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa.* 8 (3), (pp. 287-317)

Chevallard, Y., (1997). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Argentina: Editorial Aique.

Chevallard, Y.; Bosch, M. y Gascón J. (1998). *Estudiar Matemáticas: El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. México: Biblioteca para la actualización del maestro de la SEP

Fabra Lasalvia, M.; Deulofeu Piquet, J. (2000). Construcción de gráficos de funciones: Continuidad y prototipos. En Ricardo Cantoral (Ed). El futuro del Cálculo infinitesimal: Grupo Editorial Iberoamérica.

Lezama, J. (2003). *Un estudio de la reproducibilidad de las situaciones didácticas.* Tesis de Doctorado sin publicar. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, IPN, México

Montiel, G. (2002). *Una caracterización del contrato didáctico en un escenario virtual*. Capítulo 1 y 2. Tesis de maestría sin publicar. Cinvestav del IPN, México.

Rey, J. L. (2004). *Dificultades conceptuales generadas por los prototipos geométricos ó cuando los modelos ayudan, pero no tanto.* En *Premisa. Año 6, núm 22*; *Revista de la Sociedad Argentina de Educación Matemática (SOAREM*).

Ruiz, L. (2000). Ingeniería didáctica. Construcción y análisis de situaciones de enseñanza-aprendizaje. En Beitía G. (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Vol. 14, pp. 122 -130. México: Grupo Editorial Iberoamérica.