

REPRESENTACIONES GEOMÉTRICAS Y ARGUMENTACIONES EN EL AULA DE MATEMÁTICA

*Haydeé Blanco, Cecilia Crespo Crespo
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín. V. González"
Ciudad de Buenos Aires. (Argentina)*

*Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada CICATA (México)
fblanc@fibertel.com.ar crccrespo@gmail.com*

RESUMEN

Este trabajo presenta los resultados de una investigación en curso, orientada a determinar las dificultades que se observan en la enseñanza y aprendizaje de las representaciones de cuerpos geométricos en el plano, en las clases de geometría de escuela media y las características de las argumentaciones geométricas que realizan los alumnos. Se propone relacionar el concepto de visualización y las representaciones gráficas de objetos tridimensionales en el plano.

Los alumnos presentan serias dificultades para representar en el plano cuerpos geométricos (por ejemplo: cubos o pirámides). Estas dificultades también se reflejan en actividades en las que deben poner en juego la visualización de propiedades geométricas de cuerpos representados o bien de cuerpos que deben imaginar. La Geometría Proyectiva introdujo un cambio de la visión del espacio en Matemática y en el Arte.

El objetivo de la investigación que se está llevando a cabo es describir la influencia del estudio y aplicación de elementos de perspectiva sobre la visualización de objetos tridimensionales y las argumentaciones que realizan al respecto los alumnos de escuela media.

Se intenta ver si las distintas representaciones en el plano de cuerpos geométricos, influyen en las concepciones que tienen los alumnos en cuanto al espacio, y como ayudaría a nuestros alumnos el uso de la perspectiva a lograr un mejor tratamiento de la geometría tridimensional y sus propiedades.

En la experimentación realizada, se detecta, por una parte, la influencia de los prototipos de representaciones geométricas que se utilizan en la enseñanza y por otro las dificultades al tener que presentar explicaciones y argumentaciones de las respuestas dadas.

LA VISUALIZACIÓN Y EL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

La Matemática, en especial la Geometría, puede abordarse en el aula desde distintos enfoques en los que se hace predominar: la experiencia, la intuición o el razonamiento. Cualquiera sea el anclaje teórico al que se haga alusión, lo que se busca es que el alumno aprenda a ver y a interpretar y a partir de allí pueda desarrollar conceptos teóricos. La importancia de las representaciones de cuerpos tridimensionales se plantea cuando es necesario realizar razonamientos sobre los dibujos de estos cuerpos, entrando en juego el proceso de visualización, requerido para el desenvolvimiento en un mundo tridimensional. Este proceso favorece el análisis de las variables que intervienen en el planteo de un problema matemático.

La visualización ha sido abordada desde distintos marcos teóricos. De acuerdo a los conceptos vertidos por Ricardo Cantoral y Gisela Montiel, la visualización no podemos entenderla como el simple acto de ver, sino como “*la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje del que aprende*”. (Cantoral & Montiel, 2002, pp.24).

Para realizar la labor de visualización se requiere de la utilización de nociones matemáticas relacionadas con el campo de lo numérico, gráfico, algebraico, verbal y también de lo gestual. En consecuencia la visualización opera con el funcionamiento de las estructuras cognitivas, las relaciones entre las diversas representaciones de un objeto matemático y además intervienen en una determinada cultura. (Cantoral & Montiel, 2002).

Los conceptos básicos se pueden describir como una asociación de las propiedades que poseen y de los atributos relevantes e irrelevantes (Vinner, 1981). Tenemos tres elementos a considerar:

- *La imagen del concepto:* se refiere al conjunto de estructuras cognitivas que se relacionan con el concepto, que incluyen imágenes mentales, propiedades asociadas y procesos asociados. Se construye a lo largo de los años a través de experiencias de todo tipo y cambia a medida que la persona se encuentra con nuevos estímulos y madura. La imagen del concepto puede no ser coherente en su totalidad. La imagen se forma a través de un grupo de ideas y a diferentes estímulos la persona evoca distintas partes de la imagen. Se define entonces la imagen evocada de un concepto. Los conflictos surgirán sólo en caso que partes contradictorias de la imagen del concepto sean evocadas en simultáneo.
- *La definición del concepto:* se refiere al conjunto de palabras que se usan para especificar ese concepto. Su aprendizaje puede ser memorístico, construido por él, significativo o no. El alumno tendrá entonces una definición personal del concepto y será la forma en la que él explicita la imagen del concepto que él tiene y que será distinta a la definición formal del concepto (aceptada por la comunidad científica).
La definición del concepto genera en cada individuo una imagen del concepto que será coherente o no con la imagen global del concepto.

Se concluye que los conflictos son causados por la enseñanza.

Se definen los factores potenciales de conflicto a la parte de la imagen o definición de un concepto que pueden entrar en conflicto con otras partes cuando son evocadas juntas generando un factor de conflicto cognitivo.

Dentro de los factores potenciales de conflicto se consideran aquellos en los cuales la imagen de un concepto contradice a la definición formal del concepto, lo que impide el aprendizaje formal, dado que es imposible formar una imagen del concepto asociada a esa definición.

Un grupo de operaciones mentales o físicas como ciertas operaciones lógicas. O sea el alumno comprende e interpreta modelos visuales y, por otra parte, refleja en imagen visual información recibida en forma simbólica.

SOBRE PROTOTIPOS Y REPRESENTACIONES

Al referirnos a representaciones geométricas, es preciso hacer referencia a investigaciones que se han realizado acerca de prototipos o modelos (Rey, 2004).

Con la intención de mejorar la comprensión de ciertos conceptos, en muchas ocasiones se recurre en la enseñanza a ejemplos que modelizan el concepto, lo cual es necesario, pero como toda abstracción tiene sus ventajas y desventajas. La incorporación de estos conceptos es tan firme que llegan en ocasiones a transformarse en obstáculos.

Hay muchos problemas que enfrentar en el manejo del espacio, y con seguridad los ejemplos de los artistas nos dan ideas de cómo nos gustaría abordar el espacio bidimensional.

Se observa una gran cantidad de dificultades no sólo en el ámbito de la Geometría, como las referidas a la comprensión del lenguaje matemático mismo, o sea, reconocer términos propios de la materia, uso de distintas notaciones, símbolos, etc. También podemos señalar dificultades de tipo visual, debidas, principalmente a los *prototipos*. Estos ejemplos especiales a los que se recurre intentan modelizar el concepto que se quiere estudiar. Si bien es necesario su uso, se presentan ventajas y desventajas.

Estos ejemplos pueden transformarse en obstáculos para la construcción del concepto. Los *prototipos* ofrecen una visión más o menos completa del concepto, el riesgo que se corre es considerar a los mismos como único ejemplo válido del objeto tratado, si no se logra una apropiada abstracción de las características del objeto matemático que se está construyendo.

Podemos mostrar ejemplos clásicos: triángulos isósceles apoyados en el lado desigual, triángulos rectángulos cuya base es siempre uno de los catetos (siempre desiguales), el cuadrado siempre apoyado sobre uno de sus lados, el cubo de la misma forma que el cuadrado, la pirámide de base cuadrada siempre apoyada sobre dicha base, etc. Estos ejemplos se presentan como la definición del objeto analizado.

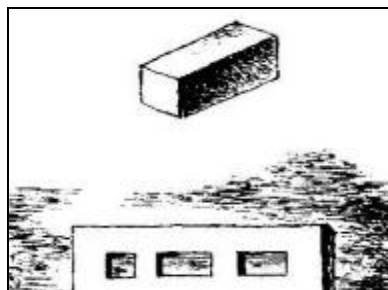
DIFICULTADES PARA REPRESENTAR E INTERPRETAR REPRESENTACIONES

Dadas las dificultades observadas en cuanto a la representación gráfica de cuerpos geométricos en el plano, se realizó una experimentación con alumnos de 4° Bachiller, para evidenciar los problemas existentes y determinar sus características. El grupo con el que se realizó la experiencia constaba de 40 alumnos.

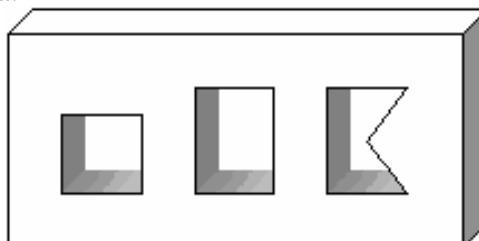
La siguiente secuencia de actividades fue presentada al grupo, solicitándoles su resolución individual:

- 1.- Dibuja un cubo**
- 2.- Dibuja una pirámide**
- 3.- Un tapón para tres orificios**

Ejemplo: En una tabla se han practicado tres orificios. De un material cualquiera se hizo un tapón que sirve para tapar los tres orificios, es el siguiente:



Veamos ahora una tablilla con 3 agujeros: uno cuadrado, otro rectangular y otro con el formato indicado en la figura:



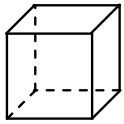
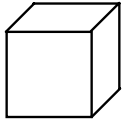
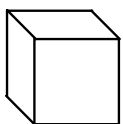
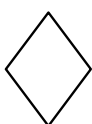
La pregunta es:

¿Puede existir un tapón cuya forma sea tal que permita tapar estos tres agujeros? O sea, idea la forma de los tapones para esta tablilla. Se trata, en esencia, de hacer una pieza a partir de sus tres proyecciones.

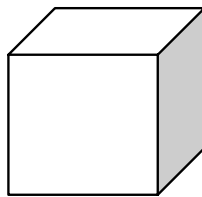
Describe y dibuja.

Resultados de la experimentación

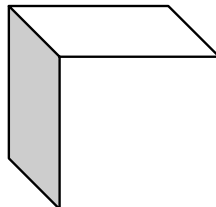
Los alumnos resolvieron las actividades presentadas. En las respuestas se encontraron ciertas regularidades que se resumen en los siguientes cuadros.

Actividad 1					Total
Cantidad de respuestas	25	10	4	1	40

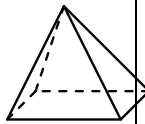
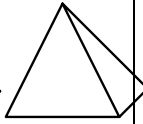
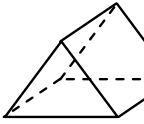
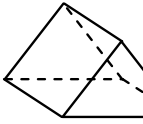
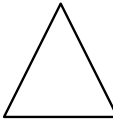
Resultó notable la presencia de cubos orientados de dos maneras. Preguntando a los alumnos, hicimos las siguientes observaciones: observamos que en el caso de alumnos zurdos, dibujaban el cubo y la pirámide con inclinación hacia la izquierda. Posteriormente, solicitando a personas tanto diestras como zurdas el diseño de un cubo, se observó que en su mayoría la orientación de los cubos dada por los diestros es:



Mientras que los zurdos, por lo general presentan:



En relación a la segunda actividad presentada, los resultados pueden resumirse de la siguiente manera:

Ejercicio 2						Otros	Total
Cantidad de respuestas	7	17	4	3	5	4	40

También observamos pirámides orientados de dos maneras, como figura en el cuadro, de acuerdo a las razones antes mencionadas.

Por otra parte, algunos alumnos confundieron cuerpos en el espacio con figuras en el plano. Este hecho se puso de manifiesto en las presentaciones de figuras planas como representaciones de cuerpos tridimensionales. Sin embargo la cantidad de estudiantes que tuvieron esta dificultad fue menor de la que se esperaba. Una de las causas de este resultado fue descubierta al interrogar a los alumnos en las entrevistas que tuvieron lugar con posterioridad a la experimentación realizada: este grupo ha tenido como asignatura Dibujo, y en ella se han abordado explícitamente las representaciones planas de cuerpos geométricos tridimensionales. A pesar de esto, se observa en los resultados de la experimentación que ciertas dificultades subsisten.

Llamó la atención al dibujar la pirámide que, de 40 alumnos 7 dibujaron “carpas” (prismas de base triangular) como se observa en la tabla de la actividad 2. Esta representación surge como una extensión de la representación de un cubo, ya que los estudiantes “representaron” las caras delantera y trasera de la pirámide y luego unieron el vértice que no pertenece a la base.

Otra característica notable es que la totalidad de los estudiantes que intervinieron en la experimentación representaron pirámides de base cuadrada, no apareciendo ninguna pirámide cuya base sea otro polígono.

La presencia de prototipos se ponen de manifiesto en esta experimentación en la aparición de ciertas representaciones características de los libros de texto, como las posiciones de los cubos o pirámides, con una base apoyada, y en la presencia de cubos y pirámides transparentes en algunos casos. Teniendo en cuenta este análisis, entre las dificultades que se presentan a los alumnos respecto de la comprensión de conceptos en un contexto geométrico, vemos que son

debidas a la comprensión del lenguaje matemático mismo, así como también a aquellas cuestiones de tipo visual debidas entre otros factores a los prototipos o modelos.

En el caso de la tercera actividad, lo que se buscó fue comparar de qué manera logran los estudiantes representar y describir cuerpos geométricos no standard, o sea que no se trata de cuerpos que aparezcan explícitamente en los diseños curriculares, pero que pueden obtenerse de operar con otros conocidos.

Actividad 3	Dibuja bien	Dibuja parcialmente bien	Dibuja mal	No dibuja	Total	% sobre total
Describe bien	2	1			3	8%
Describe parcialmente bien	8	4			12	30%
Describe mal	2	1	11		14	35%
No describe	3	4	1	3	11	27%
Total	15	10	12	3	40	100%
% sobre total	37%	25%	30%	8%	100%	

En este caso, se detectaron mayores dificultades en la representación, si se compara con los otros dos cuerpos con los que se trabajó en las actividades precedentes. Sin embargo, las mayores dificultades se presentaron al intentar describir y argumentar las características de ese cuerpo y cómo podría obtenerse.

Cuando se les preguntó por qué no describían comentaron que no sabían como expresarlo, como nombrar los elementos de los distintos cuerpos. El hecho de que no se tratara de un cuerpo conocido, que tuviera un nombre conocido por los estudiantes se constituyó en un obstáculo que muchos de los alumnos no pudieron superar.

Como nos aclara (D'Amore, 2005) refiriéndose a la interpretación de "contrato didáctico". En primer lugar la escuela es "directiva y evaluativa". En este caso le pedimos al alumno que dibuje y describa, y el alumno piensa que debe hacerlo con "rigor", de acuerdo a lo que supone espera el maestro. En segundo lugar el alumno estima que en Matemática debe hacer "cálculos", por lo tanto lo que se les pedía no era Matemática.

CONCLUSIONES EXTRAÍDAS DE LA EXPERIMENTACIÓN

A partir de los resultados de la experimentación realizada, se detecta claramente la presencia de prototipos de representaciones de cuerpos tridimensionales, como el cubo o la pirámide. También se notan influencias de prototipos "diestros" y "zurdos", dejando abierta la posibilidad de estudio y detección de estos.

Podemos mostrar representaciones no clásicas, observando que, en esos casos, los alumnos presentan dificultades para su reconocimiento como tales, mostrando que "aprenden" las representaciones prototípicas, pero no por eso logran una verdadera comprensión del espacio y de sus representaciones bidimensionales.

En el trabajo con representaciones planas, deben tenerse en cuenta ciertas dificultades en el trazado e interpretación de las mismas. En el caso de un cuerpo tridimensional como el cubo, por ejemplo, debemos tener en cuenta que:

- los lados se cruzan en la representación y no es así,
- las caras se superponen y esto no es real,
- los lados no parecen congruentes y sí lo son,
- los ángulos no son rectos y en la realidad lo son.

Es muy importante tener en cuenta que estos ejemplos son las *representaciones del objeto*. Y recordar que los objetos geométricos son entes abstractos y factibles de comprender a partir de sus definiciones y, sus representaciones, son la concretización de un objeto que no lo es y por lo tanto no cumple con las características totales del mismo.

Para modelizar conceptos geométricos es importante:

- trabajar sobre las definiciones de los mismos
- dar gran cantidad de ejemplos
- efectuar descripciones verbales de los objetos definidos.

Referencias bibliográficas

- Cantoral, R. y Montiel, G. (2003). Visualización y polinomios de interpolación. Enseñanza de la Matemática. Asociación Venezolana de Educación Matemática, Vol. 11, Núm. 1, 24 – 38.
- Cantoral, R. y Montiel, G. (2003). Una presentación visual del polinomio de Lagrange. Números. Vol pp. 6. Revista Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas.
- Conti, F. (1993). *Cómo reconocer el arte del Renacimiento*. España: EDUNSA, Ediciones y Distribuciones Universitarias, S. A. Barcelona.
- Crespo Crespo, C.; Ponteville, Ch. (1995). Geometría: Los problemas a lo largo de la historia. En Farfán, R. (Ed.) *Memorias de la IX Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa* (Vol.1, pp 383-387) - La Habana (Cuba).
- Crespo Crespo, C. y otros (2000). El proceso de visualización en la enseñanza de la Geometría. Presentado en *XLV Reunión de Educación Matemática*. UMA. Rosario (Argentina).
- D'Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática*. Barcelona: Editorial Reverté.
- Rey, J. L. (2004). *Dificultades conceptuales generadas por los prototipos geométricos ó cuando los modelos ayudan, pero no tanto*. En *Premisa*. Año 6, núm 22; *Revista de la Sociedad Argentina de Educación Matemática*.
- Santaló, L. (1993). *La Geometría en la formación de Profesores*. Buenos Aires: Red Olímpica.
- Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics* 12, 151-169.