# UNA APLICACIÓN DE MÚLTIPLES ESTRATEGIAS A LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN DESDE PERSPECTIVAS ANALÍTICAS Y GEOMÉTRICAS

*José Luis Rey*
Instituto Superior Leonardo da Vinci
*Boulogne, Prov. de Buenos Aires (Argentina)*
*jose_l_rey@arnet.com.ar*

## RESUMEN

Es sabido que sólo algunas formas completan el plano, entendiendo esto como la posibilidad de recubrir el plano sin dejar intersticios. Esto es conocido como recubrimiento de planos y existen estudios al respecto en relación a los denominados teselados.

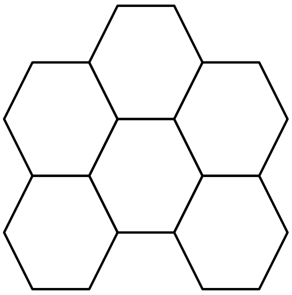
No es esta la orientación del trabajo, pero sí la de determinar cuales de aquellos recubrimientos guardan un especial interés en relación a determinadas aplicaciones y su aplicación a lo que se ha denominado estrategias múltiples. Esto servirá como un posible ejemplo de trabajo en secuencias didácticas donde el centro no se encuentra en los lineamientos curriculares sino en el abordaje desde distintas perspectivas.

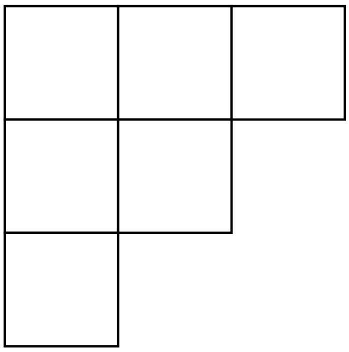
Se presenta el ejemplo y se repasan los lineamientos básicos de esta herramienta de trabajo, que se ha desarrollado en profundidad en trabajos anteriores.

## INTRODUCCIÓN

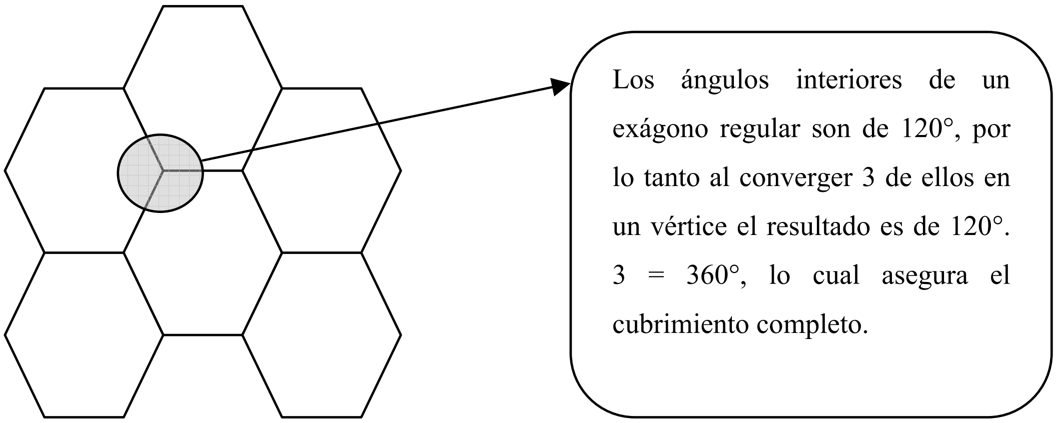
Teniendo en cuenta disposiciones regulares o cuasi-regulares de figuras, es fácil determinar que sólo cumplen con la condición de cubrimiento completo tres de ellas (tomadas como patrón único). Ellas son:

- el exágono regular
- triángulos equiláteros
- cuadrados





Es fácil observar que en los 3 casos ejemplificados en los diagramas, los vértices en los cuales concurren las figuras quedan cubiertos y no se producen huecos, como también se muestra en la figura siguiente con más detalle. Esto es también sencillo de demostrar teniendo en cuenta que los ángulos interiores de estos polígonos deben ser valores divisores de 360°




Esto mismo ocurre en

- el cuadrado donde los ángulos interiores son de 90° (4 . 90° = 360°)
- y en el caso del triángulo equilátero (6 . 60° = 360°)

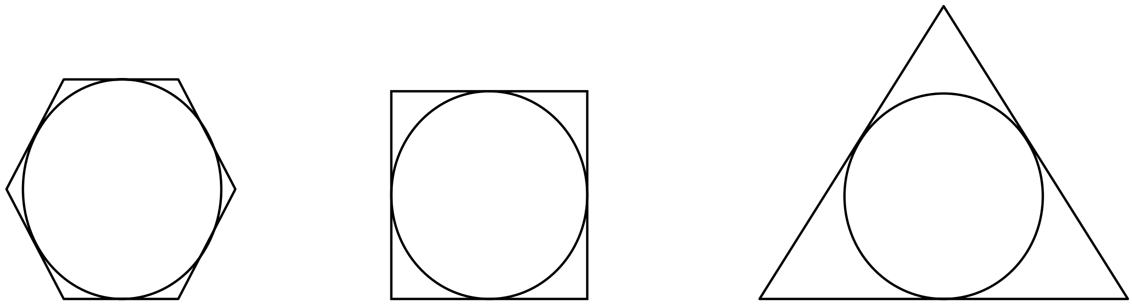
Además se trata de los únicos casos en que esto ocurre. En todos los demás se producen "huecos".

## LA PROPUESTA

A partir de esta introducción la propuesta se encamina hacia una perspectiva un poco más compleja. Sabiendo que estas tres formas son las que permiten un cubrimiento del plano, lo cual implica un aprovechamiento máximo del lugar disponible, se reorienta la actividad hacia otra cuestión.

La idea es la de poder determinar cual de las formas antes mencionadas (circunscribiéndonos a éstas debido a su aprovechamiento del plano) es la que mejor aprovecha el espacio interior teniendo en cuenta que debe insertarse dentro de ellas una forma circular.

Concretamente, partiendo de un círculo de tamaño idéntico, cuál de las tres formas mencionadas es la que hace un aprovechamiento más adecuado. Esto se podría traducir en los esquemas siguientes.



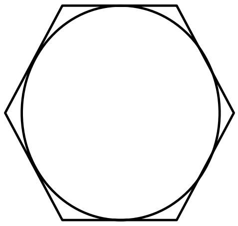
En los tres esquemas se propone un círculo de medidas idénticas el cual queda encerrado por las tres figuras mencionadas. Se pretende establecer cuál de las tres resulta más económica teniendo en cuenta la cantidad de material a utilizar (suponiendo ésta una condición básica si se tratara de una estructura sólida)

## PRIMER ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN

Una estrategia básica es la de calcular la relación entre la cantidad de material utilizado (lo que podría establecerse con un indicador como el perímetro) y el espacio ocupado, o bien el espacio sin ocupar (área ocupada o bien área libre respectivamente)

En el caso del exágono a partir de un círculo de radio R sabemos que el lado del mismo coincide con R de ello se deduce que el perímetro será $p = 4 . \sqrt{3} R$ y el área ocupada será el área del círculo es decir $A = \pi.R^2$

Con lo cual la relación cantidad de material sobre área ocupada se podría indicar como:

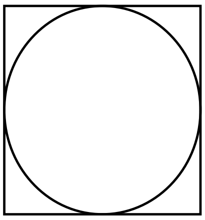


$I = p/A = 4 .\sqrt{3}\ R / \pi.R^2$
$I = 4.\sqrt{3}\ /\pi R$

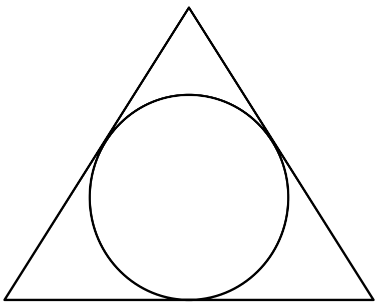
En el caso del cuadrado será el perímetro $p = 8 R$ ya que cada lado equivale a 2R y el área del círculo es la misma, con lo cual coincide con el valor anterior $A=\pi R^2$

El índice entonces tomará la forma:

$I = p/A$
$I = 8R / \pi R^2$
$I = 8 / \pi R$



En el caso del triángulo, tal vez el más complejo de los cálculos, el perímetro estará relacionado con



$P = 6 \sqrt{3}\ R$
$A = \pi R^2$

$I = (6 \sqrt{3}\ R) / \pi R^2$

$I= 6 \sqrt{3} / \pi R$

Ahora bien la idea es confrontar los tres indicadores para podes establecer cuál es el orden de aprovechamiento

Para simplificación de cálculos se utilizará el operador $\pi R$ para eliminar los denominadores, quedando así solo la necesidad de comparar los valores $4 . \sqrt{3}$ ; 8 y $6 \sqrt{3}$, y de ello surge claramente que:

$$4 . \sqrt{3} < 8 < 6 \sqrt{3}$$

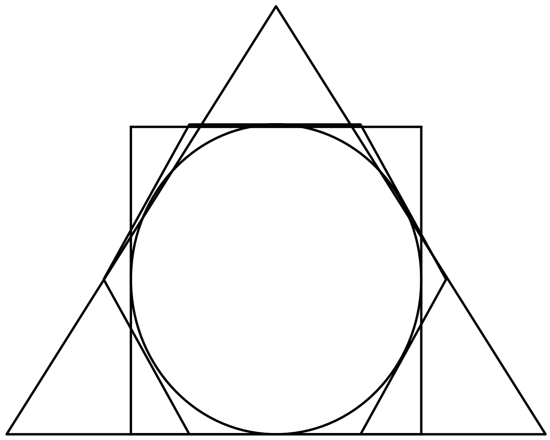
lo cual se puede nuevamente traducir en

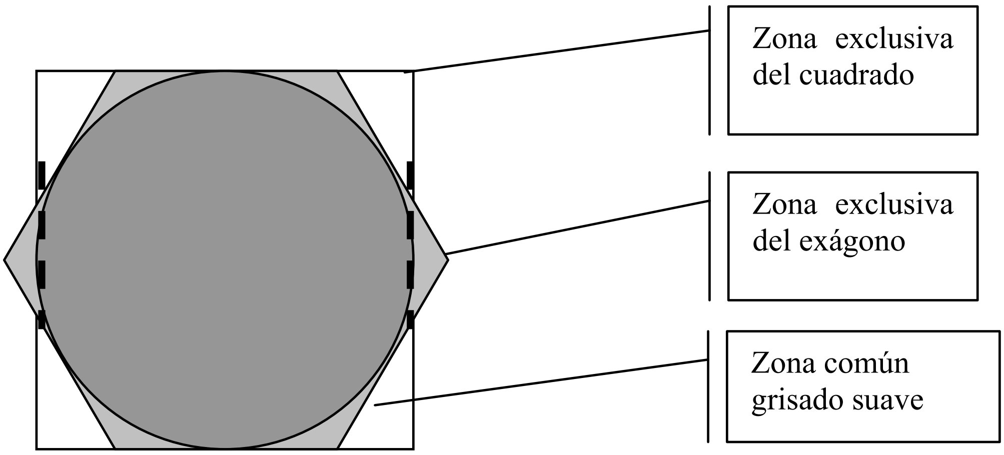
$$Ie < Ic < It$$

Es decir que el menor índice es el correspondiente al exágono, siguiéndolo el cuadrado y finalmente el triángulo. En otras palabras el aprovechamiento es máximo en el caso del exágono

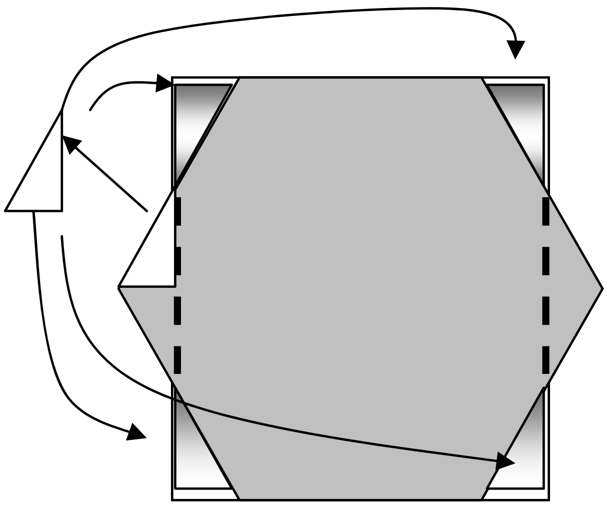
**UNA SEGUNDA ESTRATEGIA**

En este caso se han superpuesto las tres figuras incluyendo también el círculo común. En esta superposición se puede observar claramente al menos, que el caso del triángulo dista del caso del cuadrado y del exágono con lo cual, si descartamos el triángulo, queda sólo por relacionar el caso del cuadrado y el exágono, lo cual se muestra en la siguiente figura.






Con lo cual el problema se reduce a determinar la cantidad de lugar desperdiciado que en base al esquema podemos resumirla en los cuatro triángulos blancos (para le cuadrado) y los dos triángulos grisados que sobresalen del cuadrado (para el exágono)

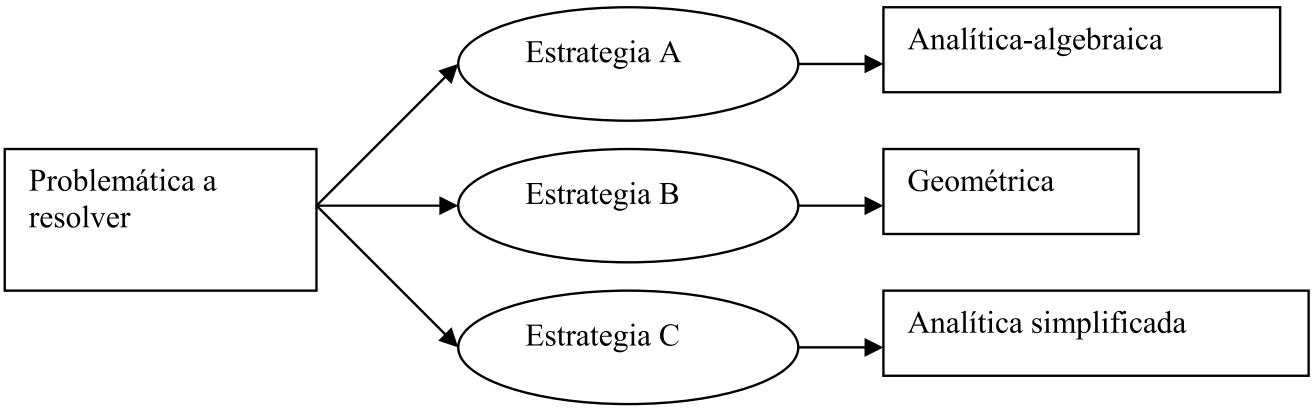


En este caso se toma el triángulo indicado y se lo superpone en las cuatro esquinas observándose claramente que la superficie del triángulo tomado como patrón no cubre las cuatro esquinas completamente, mostrando que el área sobrante del exágono es menor que el área sobrante del cuadrado

## UNA TERCERA ESTRATEGIA

Dado que el indicador utilizado es la relación entre perímetro de la figura y área aprovechada, y como se vio en el primero de los métodos de resolución, no es necesario utilizar el área del círculo, ya que es constante, con lo cual, el análisis se reduce directamente al caso de los polígonos con la condición que el radio del círculo coincide con la apotema del exágono, también con la mitad del lado del cuadrado, y en el caso del triángulo se puede descartar directamente debido a que incluso visualmente se puede determinar que es el más_desfavorable de los 3

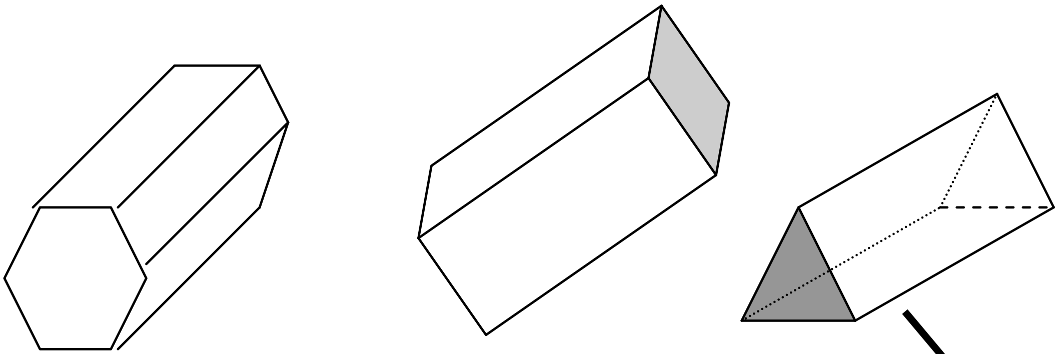
## UNA SÍNTESIS DEL EJEMPLO




## ALGUNAS VARIANTES DEL PROBLEMA

Este problema puede profundizarse realizando algunas de las siguientes modificaciones

- modificando la forma inicial de la figura interior (en el caso indicado fue un círculo) transformándolo en un problema tridimensional, el círculo puede transformarse en esfera o cilindro y las otras figuras en prismas (hexagonal, rectangular o triangular respectivamente)



- Transferencia a problemas de optimización de envases (un ejemplo)

**ESTRATEGIAS MÚLTIPLES**

Es un diseño que se caracteriza por:

- **selección de los objetos matemáticos a construir**
  esto estará claramente definido a partir del ciclo y nivel así como de lo planificado por el docente y por los lineamientos curriculares vigentes

- **selección de una secuencia de problemas que permitan abordar dicho objeto mediante herramientas matemáticas conocidas**
  la selección de problemas no es aquí un aspecto innovador ya que este tipo de tarea se desarrolla normalmente en cualquier tarea de diseño de actividades complementarias en la construcción de objetos matemáticos

- **los problemas deben preferentemente poder ser abordados desde distintas estrategias**
  la diferencia con un diseño tradicional se ubica en este punto, ya que la intencionalidad está centrada en la selección de aquellos problemas que permitan la construcción de dichos objetos pero permitiendo la posibilidad de abordarlos desde distintas estrategias, utilizando distintas herramientas ya construidas, aplicando conocimientos ya adquiridos

- **la interacción de distintas estrategias integrándose a modo de gran estructura**
  la posibilidad de trabajar la resolución de una determinada problemática desde distintas estrategias brinda una serie de beneficios ya que el alumno podrá establecer conexiones entre herramientas que ya posee, encontrando nuevas relaciones, y generando de esta manera una red conceptual sólidamente construida

- **problemáticas que surjan a partir de situaciones conocidas por los alumnos y significativas para ellos**
  la selección de problemáticas es crucial, no sólo por los objetos a construir, sino además por la significatividad que dicha selección pueda generar en el alumno. Una adecuada selección permitirá una motivación extra por parte del grupo. Se parte de conocer sus experiencias e intereses, lo cual necesariamente depende del desarrollo de un buen diagnóstico inicial

- **aplicación a situaciones dentro y fuera del campo de la matemática**
  la transferencia a situaciones de aplicación fuera del ámbito mismo de la matemática genera una probable motivación extra para la posterior construcción de dichos objetos y la integración de los mismos.

## ALGUNAS CONCLUSIONES

La construcción de conceptos y procedimientos que se transformen (mediante estrategias adecuadas) en competencias no es tarea sencilla, pero en la medida en que se observan los resultados obtenidos, la participación dinámica y motivada por parte de los alumnos (aún aquellos considerados difíciles o no participantes en general), se va descubriendo que las estrategias que fueron elegidas fueron adecuadas.

Más allá de resultados específicos, y de una evaluación del proyecto en términos de logros no sistemáticos – ya que todo ello no formaba parte de una evaluación formal para el desarrollo de sus estudios- el proyecto se puede considerar como altamente positivo en esta primera etapa de realización.

Quedan seguramente muchos aspectos que mejorar, profundizar e incluso cambiar. Pero justamente esto debe ser así, los proyectos no se multiplican como “productos envasados”, son parciales, temporales, cambiantes..., exactamente como los grupos con quienes nos encontramos año tras año.

El desafío está planteado.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Rey, J. L. (2002). *Abejas, panales y matemática. Otra visión del clásico problema.* En Boletín de la Sociedad Argentina de Educación Matemática (SOAREM) , Año 4, número 13; mayo 2002.

Rey, J. L. (2004). *Obstáculos emergentes del uso de prototipos en la construcción de conceptos en geometría*. Taller a cargo en la I JRIEM. Primeras Jornadas regionales sobre Innovaciones en Educación Matemática. En Actas de la I JRIEM. San Isidro, abril 2004

Rey, J. L. (2005). *Algunas consideraciones sobre la formación de imágenes mentales*. Comunicación breve CAREM V. Octubre 2005, Bs As

Rey, J. L. Bellome, G. (2005). *Resolución de problemas desde múltiples estrategias*. Comunicación breve CAREM V. Octubre 2005, Bs As

Rey, J. L.; Bellome, G. y Zuvialde, M. de los A. (2006). Múltiples estrategias para la resolución de problemas. *Revista Novedades educativas* 182, febrero 2006; Ediciones Novedades Educativas