RESEÑA HISTÓRICA Y APLICACIONES DE LAS TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS DEL PLANO[1]

Susana Moriena
Facultad de Humanidades y Ciencias – Universidad Nacional del Litoral
Prov. de Santa Fe (Argentina)
smoriena@yahoo.com.ar

TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS EN LA HISTORIA

En este trabajo presentaremos el surgimiento y la evolución de la noción de transformación. Este estudio nos parece importante visto el rol de las transformaciones en la geometría moderna y el esclarecimiento que puede aportar en cuanto al lugar que debe ocupar este tema en la enseñanza de la geometría.

Comenzamos haciendo algunas referencias históricas a la Geometría de Euclides. Esta geometría, más allá de la exposición deductiva que la caracteriza y de una descripción teórica de la realidad, domina todo el período comprendido entre la antigüedad y la geometría de Hilbert a fines del siglo XIX.

Como es sabido, el libro I de los Elementos comienza con una lista de definiciones, postulados y nociones comunes (Euclides, 1991). Estas primeras definiciones dadas por Euclides hacen referencia a cierta percepción de los objetos de la realidad, y su rol es exponer los fundamentos de la geometría basándose en el sentido común. Es decir, corresponden a descripciones idealizadas de objetos del mundo real, o que se puedan concebir a partir de su observación.

En todos los casos, estas proposiciones primordiales: definiciones, postulados, son elementos de los teoremas derivados de ellas. La metodología de Euclides se apoya en una lectura de la figura descripta como si ésta fuera familiar, como su condición de objeto ideal fuera natural.

Analicemos la Proposición 4, que hoy llamamos primer criterio de igualdad de triángulos, donde se describe una práctica utilizando movimientos que perderá su carácter empírico para tomar la forma de teorema: “Si dos triángulos tienen dos lados de uno iguales a dos lados del otro, y tienen iguales los ángulos comprendidos por los lados iguales, tendrán también las respectivas bases iguales, y un

[1] Este trabajo es parte de una tesis de la Prof. Susana Moriena sobre las transformaciones rígidas del plano, siendo el Director, Dr Néstor Aguilera, Investigador del CONICET

triángulo será igual al otro, y los ángulos restantes, a saber: los subtendidos por lados iguales, serán también iguales respectivamente.” (Euclides-Libro I). Estas proposiciones o criterios de igualdad de triángulos son a la vez de orden empírico y fundadores de un método racional, ya que enuncian condiciones de igualdad que van a permitir el desarrollo del método deductivo.

El uso del método de superposición de las figuras, ha dado lugar al debate alrededor del recurso de aplicación de un movimiento o de la idea de desplazamiento natural para superponer las figuras. Estos desplazamientos que intervienen, son desplazamiento de figuras y no transformaciones que operan sobre el espacio como conjuntos de puntos.

Para Euclides, según mi criterio, no hay concepto de transformación, se limita a establecer correspondencia entre los elementos de dos figuras mediante la *superposición* para afirmar la igualdad de las mismas.

Estas diferencias entre la geometría de la observación y la geometría de la deducción, nacida en Grecia, continuará jugando un rol importante en la historia de las matemáticas.

EVOLUCIÓN DE LA NOCIÓN DE TRANSFORMACIÓN

Los problemas de representación de los objetos del espacio y los problemas de sombra fueron preocupación de los pintores y artistas del Renacimiento. La descripción del mundo real se convirtió en el objetivo de la pintura. Los artistas emprendieron el estudio de la naturaleza para reproducirla fielmente en sus lienzos y se enfrentaron al problema matemático de presentar el mundo real tridimensional en un lienzo bidimensional.

Filippo Brunelleschi (1377-1446) (fue el primer artista que estudió y utilizó intensivamente las matemáticas), Leonardo da Vinci (1452- 1519) (quien escribió su obra "Tratatto della pintura" sobre la perspectiva, publicado recién en 1651) y Durero (1471-1528), se preocuparon por una representación exacta de la naturaleza.

De todos los artistas del Renacimiento, el mejor matemático fue el alemán Albert Durero quién escribió un libro sobre geometría: “Instrucción en la medida con regla y compás” (1525), para ayudar a los artistas sobre la perspectiva. (Kline, pág. 314)

Es así como la perspectiva va a transformarse en instrumento de estudio de la geometría.

INTEGRACIÓN DE LOS MÉTODOS PROYECTIVOS A LA GEOMETRÍA

El arquitecto e ingeniero francés Gerard Desargues (1591-1661), ha sido un precursor de la idea de transformación en geometría y de la utilización de propiedades invariantes.

Sus trabajos se inscriben particularmente en el marco de la teoría de las cónicas, consideradas como secciones planas de un cono de revolución con un plano que lo interseca y luego, gracias a las perspectivas, son también interpretadas como proyecciones perspectivas de un círculo sobre un plano no paralelo al plano que contiene al círculo. Una cónica es así una proyección del círculo que sirve de base al cono a partir del vértice del cono sobre un plano secante.

La transformación permite demostrar que una relación verdadera en el círculo lo es en una cónica cualquiera.

Pascal (1623- 1662), siguiendo a Desargues, retoma los métodos proyectivos de este último para redactar su tratado de las cónicas.

Como Desargues, Pascal continúa expresando las cónicas como "imágenes de la circunferencia del círculo" estableciendo de nuevo el lazo con la perspectiva.

Resumiendo, “En este período histórico las transformaciones geométricas aparecen como instrumentos implícitos de transferencia de propiedades. Las únicas transformaciones utilizadas son las proyecciones, pero quedan en el contexto de las cónicas, y no son consideradas como objetos de estudio en sí mismas, sino como simples relaciones entre dos figuras donde prima la noción de invariante”. (Jahn, pág.36)

IMPORTANCIA DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

La geometría analítica o más precisamente el "método de las coordenadas" ha sido introducido en el siglo XVII paralelamente por Fermat (1601-1665) y por Descartes (1596- 1650) como un método general para resolver problemas geométricos y particularmente para estudiar las curvas y superficies.
Considera al plano como un conjunto de puntos, asociados a esos puntos del plano pares ordenados y a las curvas, ecuaciones. “Es ésta una de la vetas mas ricas y fructíferas del pensamiento matemático que jamás se hayan encontrado” (Kline, pág. 401)

En Geometría Analítica, el estudio de las propiedades de las curvas se realiza sobre el estudio de las propiedades algebraicas de las ecuaciones correspondientes, permitiendo la interpretación de los problemas geométricos a través del álgebra. (Descartes, Libro III)

Pero la idea fundamental de ecuación de una curva es puesta en evidencia de manera más clara por Fermat. Su método se funda en el reconocimiento de una correspondencia biyectiva entre los puntos del plano y sus coordenadas y asocia las ecuaciones a las curvas.

Es decir, la Geometría Analítica reemplaza las leyes geométricas (o sus propiedades) de las figuras por leyes algebraicas sobre las coordenadas de sus puntos. Es precisamente esta relación analítica entre puntos y coordenadas que nos permite reconocer a la figura como conjunto de puntos.

Según Jahn (Jahn, pág. 45), los autores Piaget y García en su obra "Psicogénesis e historia de las ciencias" (1983) concluyen que "la noción de transformación tiene su origen innegable en la Geometría Analítica".

EL DESARROLLO DE LA GEOMETRÍA USANDO EL MÉTODO DE LAS TRANSFORMACIONES

"Una de las características principales de la geometría que se desarrolló durante la segunda mitad del siglo XIX, fue el entusiasmo con que estudiaron los matemáticos una gran variedad de transformaciones.

Las más conocidas fueron las que constituyen el grupo de transformaciones que define la llamada geometría proyectiva. Los orígenes de esta geometría estaban ya, en realidad, en las obras de Pascal y de Desargues, pero hasta comienzos del siglo XIX no se produjo su desarrollo sistemático, desarrollo debido especialmente a Poncelet. (1788- 1867). (Boyer, pág.661)

Jacob Steiner (1796-1863) llevó más lejos el desarrollo sintético de la geometría proyectiva. Es el primero de la escuela de geómetras alemanes que adoptó ideas francesas, fundamentalmente de Poncelet, y favoreció los métodos sintéticos.

Como conclusión, podemos decir entonces que la obra de Poncelet desarrolla y difunde el método de las transformaciones. Sus trabajos suscitaron investigaciones en Francia, Alemania, etc., e inspiraron obras tan diversas como las de Möbius, Steiner, Plücker, Gergonne, Chasles. Las investigaciones de Chasles se refieren en gran parte a la teoría de las transformaciones. Busca la transformación más general que poseen los invariantes proyectivos, además de conservar las rectas, se conservan las razones dobles de cuatro puntos alineados.

LAS TRANSFORMACIONES EN LA GEOMETRÍA A FINES DEL SIGLO XIX

A fines del siglo XIX, la modernización de la geometría profundiza la necesidad de clasificación de las propiedades invariantes y de familia de transformaciones ligadas a esas propiedades. En esta estructuración aparece la noción de grupo que tiene su origen en el estudio de las sustituciones de las raíces de una ecuación algebraica, desarrollada por Galois (1811- 1832).

Klein (1849- 1925) en sus visitas a París donde se habían desarrollado ya las sugerencias de Lagrange (1736- 1813) sobre la teoría de grupos, quedó profundamente impresionado por las posibilidades unificadoras que encerraba el concepto de grupo y se dedicó durante la mayor parte de su vida a desarrollar, a aplicar y a profundizar este concepto.

Estas ideas sobre las relaciones entre la Geometría y la teoría de grupo conducirá a Klein en el Programa de Erlangen (1872) a proponer un estudio sistemático de esas relaciones, describiendo a una geometría como el estudio de aquellas propiedades de las figuras que permanecen invariantes bajo la acción de un grupo concreto de transformaciones.

Llamaremos grupo principal de las transformaciones del espacio, al conjunto de todas estas transformaciones; las propiedades geométricas no son alteradas por las transformaciones del grupo principal.

Por lo tanto, cualquier clasificación de los grupos de transformaciones se convierte en una clasificación de las geometrías.

"El programa Erlangen libera el pensamiento geométrico de toda intuición, enriquece la geometría abstracta". (Jahn, p. 48). En resumen, una geometría es el estudio de las propiedades invariantes por un grupo operado sobre un espacio y ese grupo determina la estructura de la geometría. Así, para Klein, las transformaciones actúan sobre un espacio y no solamente sobre las figuras. "Considerar al espacio como objeto de estudio geométrico es el otro punto importante que se desprende del análisis del programa de Erlangen" (Jahn, p. 49).

CONCLUSIONES

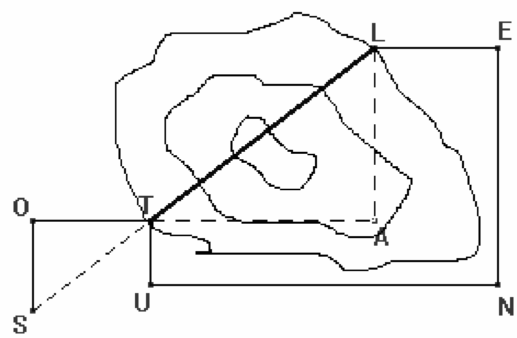
A partir del momento en que las transformaciones fueron consideradas como grupos, se comenzó a reconocer su alcance en geometría. El mérito de este acercamiento se debe a Klein, quien considera que las propiedades geométricas se clasifican y se caracterizan por las transformaciones que las dejan invariantes, a cada tipo de transformaciones corresponde una geometría.

EJEMPLOS DE PROBLEMAS QUE SE RESUELVEN UTILIZANDO TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

(Seleccionados con la colaboración del estudiante José Díaz, alumno del Profesorado de Matemática de la FHUC de la Universidad Nacional del Litoral)

Aplicaciones de la Homotecia

En el siglo VI a.C., el tirano Polícrates ordenó a Eupalinos la construcción de un túnel, que se conserva en parte actualmente, para llevar agua atravesando el monte Castro. La longitud del túnel era de 1 km, debiéndose perforar desde las dos laderas del monte. El error que se cometió en el centro, donde las dos mitades debían encontrarse, fue de 10 m en dirección horizontal y 3 m en dirección vertical. Dado este error; ¿cómo se debería plantear el problema usando transformaciones geométricas para que las perforaciones se encuentren en el punto medio?



Aplicaciones de la Simetría Axial

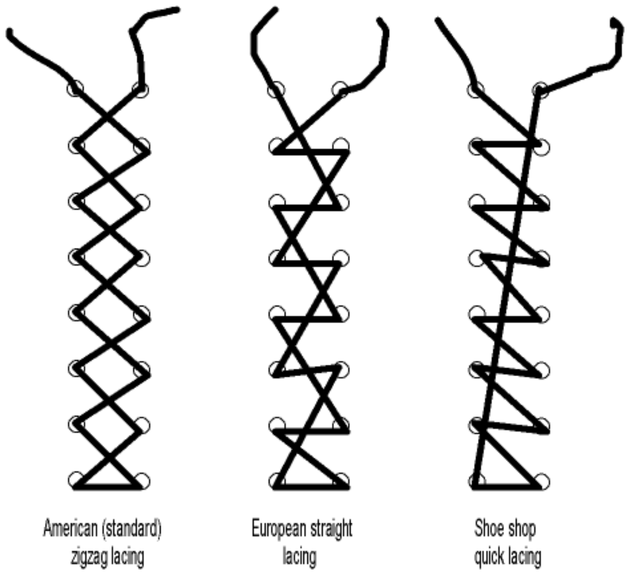
- ✓ Conocida la dirección de una ruta y la ubicación de dos pueblos que están situados a ambos lados de dicha ruta, se quiere construir dos caminos que pase cada uno por uno de los pueblos de tal manera que equidisten de la ruta principal.
- ✓ Dado una mesa billar ABCD con dos bolas; P y Q. Se quiere tirar P contra la banda DC, de tal manera que rebote y golpee a Q.

El Problema del Cordón

¿Cómo deben ser atadas las zapatillas? Esta pregunta aparentemente simple, que se nos presenta en la vida diaria, puede provocar una discusión apasionada – y en muchos casos, llamar a una respuesta matemática.

Son conocidas por lo menos tres maneras comunes de atar las zapatillas, según el dibujo, se tiene: Zigzag americano (o estándar), Europeo recto, y el de zapatería.

El estilo del cordón que una persona utiliza depende de una variedad de factores, extendiéndose desde la estética hasta la comodidad.



Zig-Zag Americano   Europeo Corto   De Zapatería

Los patrones del cordón pueden ser absolutamente complejos, y diversos patrones requieren diversas longitudes del cordón.
Uno puede preguntarse; *¿qué patrón del cordón requiere los cordones más cortos?*. Esa era la pregunta abordada por Juan H. Halton, informático en la Universidad de Carolina del Norte en la colina de la capilla.
En el problema del cordón, usted tiene que encontrar la trayectoria más corta desde el ojal superior en un lado al ojal superior en el otro lado, pasando a través de cada ojal apenas una vez.

El colgante más barato

En variados casos las personas se encuentran frente a situaciones problemáticas donde esta debe poner en marcha la imaginación y sus habilidades geométricas para resolverlas, aquí es donde se puede decir que es necesaria (lo que llamaría); Geometría Económica.
Como ejemplo se puede citar un problema de diseño, donde se debe economizar en el uso de materiales.
Cierta joyería desea diseñar un nuevo colgante de forma triangular, con medidas previstas. El diseño a seguir, según nuevas tendencias, es de forma triangular. Dentro del mismo se colocará un detalle, también de forma triangular, con rubíes en el contorno.
Al fabricante se le ha dado la orden de minimizar los gastos. ¿Cómo debe ser el triángulo interior para que este ocupe la menos cantidad de rubíes, y este resulte más económico?

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Boyer, Carl B. (1996). Historia de la Matemática. Madrid: Alianza Universidad.

Descartes, R. (1997). *La Geometría*. México: Editorial Limusa. (Versión en Español de la obra original en francés con el título “La Geómetrie”)

Euclides (1991). *Elementos de I – IV. (*Traducido por María Luisa Puertas Castañon.) Madrid: Editorial GREDOS.

Kline, M. (1994). El *pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. Tomos: 1, 2, 3. Madrid: Alianza Universidad.

Klein, F. (1991). *Le programme d’Erlangen*. Paris: Éditions Jacques Gabay.

Jahn, A. (1998). *Des transformations des figures aux transformations ponctuelles*. Francia: Université Joseph Fourier.