(ESEL) - EQUIVALENCIA EN SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Norma Beatriz Di Franco[1], *Claudia Liliana Gentile*[2]
[1]*Universidad Nacional de La Pampa*
[2] *Tercer Ciclo Ruralizado - Ministerio de Cultura y Educación de La Pampa*
Prov. de La Pampa (Argentina)
claudiagentile@cpenet.com.ar - ndifranco@hotmail.com

RESUMEN

Esta propuesta se concreta a partir de haber comenzado a indagar autores en seminarios de maestría cuyas conceptualizaciones nos ponían en sintonía con planteos en los que recurrentemente nos hemos encontrado como docentes en matemática, vinculados a la enseñanza y el aprendizaje de cuestiones algebraicas en la escolaridad básica. El trabajo se enmarca en un análisis no extensivo en bibliografías específicas, de didáctica de la matemática, en libros de texto de circulación en nuestros ámbitos laborales y, particularmente, en el diseño y ensayo de una secuencia de enseñanza para el tratamiento de la equivalencia de sistemas de ecuaciones lineales en dos variables. Nos interesa la relación entre marcos algebraicos y gráficos. Si bien la propuesta fue pensada para Polimodal, presentamos algunas interpretaciones sobre las respuestas y consideraciones realizadas por un grupo de alumnos avanzados de las carreras de Profesorado y Licenciatura en Matemática, con los cuales ensayamos previamente. Categorías conceptuales como equivalencia entre sistemas de ecuaciones lineales en dos variables, reduccionismo metodológico, relación entre marcos algebraicos y gráficos, denotación y sentido, guiaron nuestro análisis. La conservación de un conjunto solución demanda que la enseñanza se ocupe de la concepción de conservación de soluciones en un gráfico a diferencia de la conservación del gráfico, que distinga la conservación de la igualdad numérica y la obtención de ecuaciones con el mismo conjunto solución así como las diferencias entre cómo armar algebraicamente ecuaciones equivalentes y cómo armar sistemas de ecuaciones equivalentes, sin que necesariamente sean equivalentes las ecuaciones que los definen.

ESEL – ENTRE LO ALGEBRAICO Y LO GRÁFICO

Esta propuesta se concreta a partir de haber comenzado a indagar algunos autores en seminarios de maestría cuyos análisis y conceptualizaciones nos ponían en sintonía con planteos en los que recurrentemente nos hemos encontrado como docentes en matemática, vinculados a la enseñanza y el aprendizaje de cuestiones algebraicas en la escolaridad básica. De esa manera fue que nos implicamos con Klimovsky (1999) en su análisis del problema de la reducción, en el marco de un reduccionismo semántico – metodológico, para el desarrollo de este concepto como es la Equivalencia entre Sistemas de Ecuaciones Lineales (ESEL).

Rescatamos para su tratamiento potencialidades y límites que el autor presenta, dentro de este encuadramiento:

> "*Una forma alternativa de reduccionismo, que presenta dificultades análogas a la anterior (del reduccionismo ontológico), es lo que podríamos llamar reduccionismo semántico. En este caso no se intenta afirmar que ciertas entidades son reductibles a otras entidades, sino algo muy distinto: que el lenguaje de la disciplina B, la que se quiere reducir, puede ser traducido al lenguaje de la disciplina básica A. Habitualmente suponemos que el lenguaje tiene mucho que ver con los objetos o entidades a los que nos referimos cuando usamos estructuras o expresiones lingüísticas, pero no todos los lingüistas y metodólogos concuerdan con ello.*" (Klimovsky, 1999)

En la caracterización del reduccionismo metodológico, el autor, señala que en una teoría se emplea un vocabulario que no se usa en la otra. Ahora bien, no se trata de traducir el vocabulario de una al de la otra, ya que, cada teoría tiene sus problemáticas definidas. Lo que importa, es que, en ciertas circunstancias, hay una correlación entre lo que sucede con las entidades de A (una teoría) y las entidades de B (la otra teoría).

Surge el tema de la explicación en la medida en que la reducción de una teoría a otra implica lograr la explicación de las leyes de una en términos de la otra, con el auxilio de reglas que vinculan las afirmaciones realizadas en el vocabulario de A con otras que se formulan en el vocabulario de B. Y aunque, advierte el autor, la noción de explicación científica es más profunda y general que la reducción, traducir y explicar se vinculan en el reduccionismo metodológico.

En esta propuesta nos centramos en la reducción de la equivalencia entre sistemas de ecuaciones lineales en dos variables, en los campos de lo algebraico y lo gráfico. Diríamos entonces, por ejemplo: un sistema de ecuaciones es equivalente a otro cuando se producen transformaciones algebraicas válidas, que se reduce a: los sistemas son equivalentes cuando las gráficas correspondientes a esos sistemas muestran el mismo conjunto solución. Cada transformación en el sistema de ecuaciones tiene su correspondencia en el sistema gráfico asociado. La contradicción o transformación no válida en un sistema de ecuaciones se traducirá en la obtención de gráficos que no conserven el conjunto solución.
Desde otra perspectiva, la conceptualización de la ESEL realizada por Kostrikin (1980) señala para dos sistemas lineales:

> "*Se llaman equivalentes si ambos son simultáneamente incompatibles, o bien son compatibles y tienen las mismas soluciones." Continúa: "un indicio suficiente de la equivalencia de sistemas se contiene en la siguiente afirmación. Dos sistemas lineales son equivalentes, si uno so obtiene del otro aplicando una sucesión finita de transformaciones elementales.*"(Kostrikin ,1980:27)

En ámbitos de la Didáctica de la Matemática, Mabel Panizza y Jean Philippe Drouhard explicitan que los problemas con respecto a las ecuaciones lineales no radican solamente en conocer bien el concepto de solución o el concepto de intersección de rectas. Se trata del conocimiento del tratamiento específico de las escrituras algebraicas, de los gráficos cartesianos, así como de la coordinación entre ambos registros.

> *"La solución de un sistema de dos ecuaciones lineales en dos variables en el registro de las escrituras algebraicas corresponde a una intersección de rectas en el registro de los gráficos cartesianos. El hecho de que lo que se mantiene constante mediante la resolución del sistema por transformación en un sistema equivalente es la intersección y no las rectas que representan las ecuaciones originales suele plantear problemas serios en la enseñanza"* (Panizza M. & Drouhard J-Ph., 2003).

Un análisis particularmente señalado se inscribe en la relación entre las nociones de denotación y sentido, que Drouhard expresa recuperadas de Frege. En tal planteo, los enunciados $3x – 5 = 2x – 6$ y $x = -1$ denotan la misma función, la que asigna el valor verdadero en -1 y falso en cualquier otro número real. Matemáticamente diríamos que se trata de ecuaciones equivalentes. Es el sentido el que cambia, en tanto ambos casos denotan el mismo conjunto pero lo expresan de manera diferente. Al resolver ecuaciones los alumnos no tienen en la mayoría de los casos la noción de que algunas operaciones algebraicas que realizan conservan la denotación y otras no. En este caso particular delimitaríamos que dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes en tanto ambos sean simultáneamente incompatibles o denoten el mismo conjunto solución aunque lo expresen de manera diferente.

Los autores nos advierten acerca de este problema que se presenta cuando las operaciones realizadas no conservan la denotación y para el cual se requiere un análisis que tenga en cuenta condiciones sobre dichas operaciones a fin de dar la solución del problema original. En particular, el significado de la "verificación" de una solución es diferente en uno u otro caso: si las ecuaciones que se obtienen en los sucesivos pasos son equivalentes, la verificación es una manera de controlar que uno hizo bien las cuentas; en cambio, si las ecuaciones no son equivalentes la verificación constituye una parte del proceso de resolución.

didáctica del Álgebra de Carmen Sessa (2005). En sus reflexiones acerca de las formas de entrar al álgebra a través de la generalización expresa la intencionalidad de promover en los alumnos la construcción de referencias, sentidos y herramientas de control para las transformaciones algebraicas. Señala dos vías posibles: problemas en los cuales el contexto extramatemático ha comandado la construcción de equivalencia de expresiones algebraicas y otros en contextos intra-matemáticos en los cuales la noción de equivalencia operacionalizó las transformaciones algebraicas. Identificadas con esta segunda alternativa, ratificamos la importancia otorgada a las diferentes acepciones de equivalencia, en particular la equivalencia en sistemas de ecuaciones lineales. Por otro lado, la investigadora nos alerta sobre los posibles efectos de un tratamiento aritmético de los sistemas de ecuaciones lineales en sus análisis de casos en los libros de texto.

Analizar la reducción de los gráficos a los sistemas de ecuaciones en marcos algebraicos y viceversa comenzó a significarnos la posibilidad de pensar en beneficios orientados a la construcción de referencias y sentidos, a promover la elaboración de estrategias de control sobre lo que se produce.

La actividad se sintetizó, entonces, en una búsqueda conceptual sobre la ESEL en bibliografías específicas de álgebra, en investigaciones en didáctica de la matemática, en el análisis de libros de texto actuales de circulación en nuestro medio laboral, bibliografías de nuestra formación de grado y, particularmente, en el diseño y ensayo de una propuesta de tratamiento de la ESEL para su enseñanza en polimodal. Para este último cometido elaboramos una secuencia didáctica y, si bien estaba planteada para polimodal, probamos el esquema con unos 10 alumnos avanzados en carreras universitarias afines, con el objeto de hacer nuestro primer rastreo de cuestiones conceptuales vinculadas.

ACERCA DE LA SECUENCIA:

La propuesta de una secuencia didáctica fue planteada para primer año de Polimodal. Partíamos del supuesto que los alumnos ya habrían discutido cuestiones relativas a la determinación de un sistema de ecuaciones, a la utilización de las soluciones de una ecuación con dos variables para la construcción del gráfico asociado y al uso, por ejemplo, de algún graficador que permita la comparación rápida de muchos casos. No descartábamos dificultades como las planteadas por Carmen Sessa (1999) acerca de las soluciones de una ecuación en dos variables.

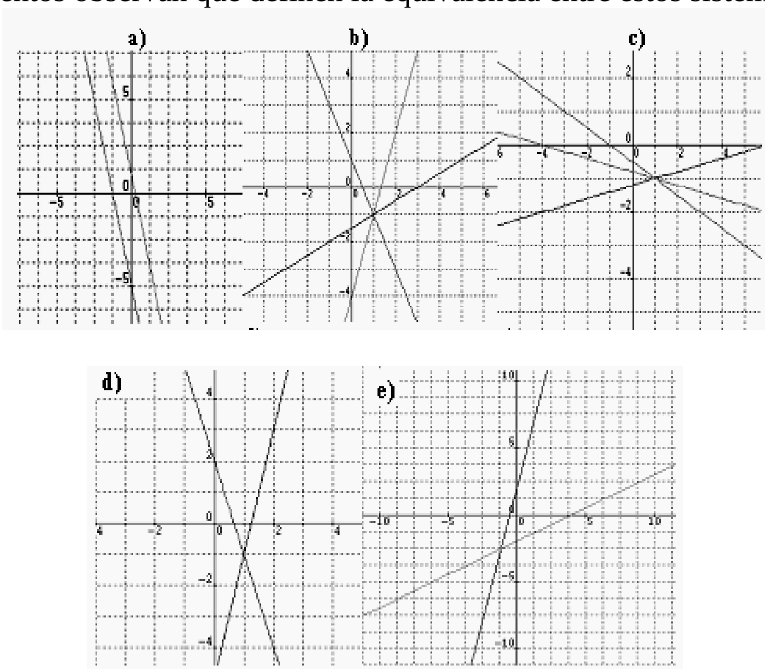
Pensamos en hacer un ensayo de la secuencia con alumnos avanzados en sus profesorados o licenciaturas en matemáticas, quienes pudieran darnos alguna respuesta a las consignas, sus opiniones acerca de para qué estaría propuesto cada ítem de la secuencia y sus apreciaciones en cuanto a grados de complejidad, utilidades, posibilidades de vínculos con otros conceptos, entre otras consideraciones.

En un sistema de ecuaciones lineales, la conservación del conjunto solución o de su denotación se traduce en el concepto de sistemas equivalentes. En un primer momento, como señala Sessa(1999),
En el mismo sentido, Carmen Sessa (1998) recupera de trabajos de Linchevsky y Sfard (1991) que los estudiantes mayoritariamente reconocen la equivalencia de dos ecuaciones cuando se han efectuado transformaciones de una en la otra, no observaban ningún rastro del concepto de conservación del conjunto solución.

En el mismo sentido, la necesidad de dar tratamiento a esta temática está fortalecida también por potencialidad hallada en la concepción de equivalencia, que recuperamos del trabajo acerca de la en los pasos en la resolución de un sistema de ecuaciones lineales expresado algebraicamente, controlar que sistemas sean equivalentes no puede pasar por *comparar* su conjunto solución ya que el mismo no se conoce aún. De allí la importancia para nosotras de proponer diferentes sistemas, no inicialmente desde lo algebraico, que *tengan* las mismas soluciones. O de armar secuencias gráficas acompañando a las secuencias algebraicas en las que el control pasara por *comprobar* gráficamente que se *conserva* el conjunto y no restringir apelando a las propiedades aritméticas que, como ya está analizado, dan cuenta de la conservación de una igualdad antes que de la conservación del conjunto solución.

Una primera actividad entonces: proponer diferentes sistemas, no inicialmente desde lo algebraico, que tengan las mismas soluciones. A cada representación en un sistema de coordenadas cartesianas lo consideramos como el gráfico asociado o reducido del sistema de ecuaciones lineales con dos variables.

> "Los gráficos que se proponen a continuación representan sistemas de ecuaciones lineales. El gráfico b), el c) y el d) representan sistemas de ecuaciones equivalentes.
> ¿Qué elementos observan que definen la equivalencia entre estos sistemas?"



Al indagar para qué estaría puesto este ítem y pedir apreciaciones en cuanto a utilidades, relaciones con otros conceptos, en los protocolos de los entrevistados las respuestas pasaron mayoritariamente por:

> P1: "Creo que el ítem fue puesto para que los estudiantes puedan, a partir de los gráficos identificar cosas que hacen cuando resuelven con operaciones."
> P2 **–** "Fue puesto para introducir el concepto de sistemas de ecuaciones equivalentes a partir del conocimiento previo de lo que es sistema de ecuaciones, pero desde el punto de vista gráfico para que sea visible. Ítem fácil pero habría que agregar algo más para vincular los tres sistemas de ecuaciones que son equivalentes. Permite reconocer cuándo un sistema es equivalente y cuándo no. Nada más."
> P3 **– "**Ítem puesto para diagnosticar."
> P4 **– "**Para evitar el cálculo matemático"
> P5 **– "**Para vincular la resolución gráfica y analítica entre los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas."
> P6 **– "**Para interpretar el concepto. Permite vincular conceptos."
> P7 **– "**Para saber reconocer la solución de un sistema desde el gráfico. este ítem facilita el reconocimiento de lo que significa resolver los ejercicios, sin saber porqué o qué es lo estamos haciendo y saber porqué los sistemas son equivalentes."

En la búsqueda en libros de texto y en carpetas de alumnos, encontramos que la solución de un sistema se presenta siempre como una correspondencia uno a uno, un sistema, una solución, iniciando el tratamiento desde lo algebraico. Sintonizando en ese sentido, en los protocolos no se explicitaron demasiados beneficios depositados en lo gráfico, en la posibilidad de pensar la equivalencia no inicialmente desde lo algebraico, ni necesariamente entre pares de sistemas o entre sistemas con igual cantidad de ecuaciones.

LA SEGUNDA ETAPA DE ESTA ACTIVIDAD:

> "Los sistemas de ecuaciones que siguen corresponden a alguno de los gráficos de la actividad anterior. Determinen qué gráfico corresponde a cada sistema de ecuaciones.
> Expliquen cómo detectar sistemas que son equivalentes.

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x \quad y = 4 \\ \frac{1}{2}x \quad y = 3/2 \end{cases} \qquad \begin{cases} -0.5x \quad y = 0.5 \\ 0.2x \quad y = 1.2 \\ -0.2x \quad y = 0.8 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x \ y = 5 \\ 3x + y = 2 \\ 6x + 2y = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x + y = 1 \\ 4x + y = -5 \end{cases}$$

Con respecto a posibles respuestas a la consigna:

P3- “Al primer sistema le asigna el gráfico c). Al segundo sistema el d). Al los otros dos sistemas no le asigna ningún gráfico. A partir de la solución podemos analizar sistemas equivalentes”

P4- “1º sistema gráfico c).

2º sistema gráfico d)

3º sistema gráfico b)

4º sistema no le corresponde ningún gráfico.

P8- “Viendo los gráficos, al primer sistema le asigna el gráfico c). Al segundo sistema el d). Al tercer sistema no le asigna ningún gráfico. Al cuarto sistema le asigna el gráfico a).”

P9- “Los sistemas equivalentes son el 1, 2 y 3. El cuarto sistema:

$$\begin{cases} 4x + y = 1 \\ 4x + y = -5 \end{cases}$$

no corresponde a ningún gráfico. Los detecté tomando la solución de los sistemas equivalentes del apartado anterior ya que el enunciado dice que correspondían a esas gráficas y en los 3 que coincidieran como solución son los equivalentes”

Algunos formularon utilizar la solución del sistema (1, -1) para identificar cuáles eran los sistemas algebraicos que se correspondían con los gráficos, ratificando la verificación como una parte del proceso de resolución y sin determinar, no obstante, qué sucedería si, por ejemplo, hay varios sistemas algebraicos que corresponden al mismo gráfico. Otros proponen que el 4º sistema no corresponde a ningún gráfico (corresponde al a) o que al tercer sistema no le asigna ningún gráfico (corresponde al b y sólo en un intento de comprender observamos que el tercer sistema tiene escritas tres ecuaciones y que los dos gráficos que quedaban tienen dibujadas dos rectas).

En otro caso apela al significado gráfico, no utiliza la denotación de los enunciados antes mencionados ni para planificar su acción ni como elemento de control

P2 - “Al identificar rápidamente que:

$$\begin{cases} 4x + y = 1 \\ 4x + y = -5 \end{cases}$$

es un sistema con rectas paralelas, en consecuencia los otros 3 sistemas correspondían a alguno de los gráficos “equivalentes”. Queda descartado el otro. Son sistemas 3 ecuaciones con 3 gráficos, como un gráfico tiene 2 rectas, seguro que en un sistema una ecuación era una combinación lineal de otras.”

Estas nociones de sentido y denotación permiten identificar muchos aspectos del trabajo matemático, que el experto tiene internalizados y utiliza permanentemente para planificar su acción, como recurso de economía, como elemento de control.

También acompañaba este ítem, junto a las respuestas, el pedido de consideraciones y sugerencias. De los protocolos podemos recuperar:

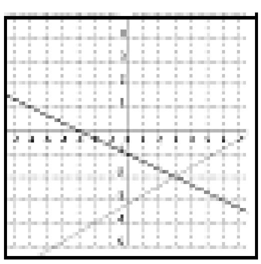
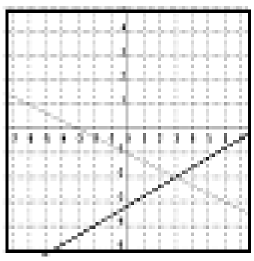
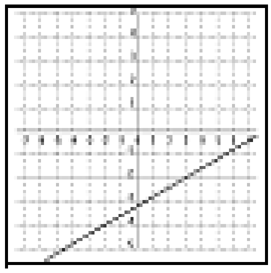
> P1- **“**La intención es quizás que, sin previos cálculos, puedan relacionar sistemas de ecuaciones con los gráficos correspondientes. Lo que yo veía era que tal como esta redactado, se interpreta (al menos yo) que sólo se corresponden con algún gráfico (sólo uno), ¿se entiende?“
> P4- “De lo dado hasta aquí nada contribuye a advertir algebraicamente cuándo los sistemas son equivalentes. Habría que realizar el gráfico y ver en el gráfico si tienen el mismo punto solución.”
> P5- **“**difícil. Faltan aclaraciones o pistas para detectar en forma algebraica cuándo los sistemas son equivalentes.
> Está pensado para generar la necesidad de buscar estrategias algebraicas de detección de sistemas equivalentes.”
> P6- **“**Para vincular la resolución gráfica con la analítica”
> P9- **“**Para tener una idea de la relación gráfico – sistema”
> P10 – **“**A igual que el ejercicio anterior sirve para entender de una forma sencilla que es un sistema de ecuaciones y por qué tiene esa o esas soluciones en el momento que las encontramos.”

Los señalamientos más recurrentes están posicionados en la relación de las ecuaciones con el gráfico. No hay disquisiciones con respecto al beneficio gráfico de poder detectar cuándo sistemas son equivalentes sin que sean equivalentes las ecuaciones que los definen, sin que se considere un sistema “derivado” de otro o cuando hay en el mismo sistema ecuaciones equivalentes.

Para la siguiente parte de esta propuesta armamos secuencias gráficas acompañando a las secuencias algebraicas en las que el control pasara por comprobar gráficamente que se conserva el conjunto solución, paso a paso, y no sólo apelando a las propiedades aritméticas que, como ya está analizado y descrito en investigaciones como las de C. Sessa (1998), dan cuenta de la conservación de la igualdad de las ecuaciones que integran el sistema antes que de la conservación del conjunto solución.

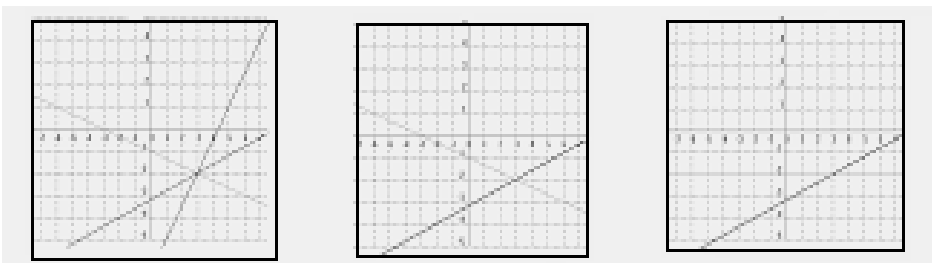
> “Tercera etapa: Presentamos a continuación unos ejemplos de resolución de sistemas de ecuaciones en los que se siguieron los pasos que están presentados en cada secuencia y en los gráficos asociados a cada secuencia. Para resolver cada sistema de ecuaciones se realizaron ciertas transformaciones con el objeto de simplificar el sistema y mantener sus soluciones.

Primer caso:

$$\begin{cases} 4x - 10y = 32 \\ 2x - 5y = 16 \\ x + 3y = -3 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x - 5y = 16 \\ x + 3y = -3 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x - 5y = 16 \\ 2x + 6y = -6 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x - 5y = 16 \\ -11y = 22 \end{cases}$$

Segundo caso:



$$\begin{cases} 2x - 5y = 16 \\ x + 3y = -3 \\ 3x - 2y = 13 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 5y = 16 \\ x + 3y = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x - 10y = 32 \\ 4x + 12y = -12 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x - 10y = 3 \\ 22y = -44 \end{cases}$$

Escriban sus interpretaciones geométricas de cada caso y de la comparación entre casos. Expliquen cuáles fueron los cambios en las ecuaciones en cada secuencia.”

Es interesante analizar para qué se cree que fue elaborado este ítem.

P1-“Puede que quieras que vayan relacionando operaciones numéricas con graficas“

P7–“Para resolver un sistema por medio de operaciones elementales y saber que al aplicar algunas de éstas a una ecuación el sistema sigue siendo equivalente. Me facilita entender porqué las operaciones elementales de un sistema lo transforma pero en otro sistema equivalente así cuando el alumno la utilice entenderá porqué puede obtener la solución del sistema por ese método.”

P8- “Para comprobar que diferentes sistemas se relacionan por medio de operaciones, también están relacionados gráficamente.”

El punto de interés aquí creo que vuelve a quedarse en un marco de ausencias. Acordamos en considerar transformaciones válidas aquellas que desde las representaciones gráficas y desde lo algebraico conservan el conjunto solución. La contradicción o transformación no válida se detectará en la obtención de gráficos que no conserven el conjunto solución.

Lo que genera dudas es si persiste la concepción por la cual sistemas equivalentes se van obteniendo por transformaciones que hacen que sus ecuaciones sean equivalentes o que una transformación que conserve la igualdad signifique lo mismo que conservar la equivalencia. Es decir, por ejemplo, que aunque se pueda declarar que (d) queda igual y que (f) se obtiene al restar (d) y (e), los sistemas son equivalentes pero 2x+ 6y = -6 no es equivalente a -11y = 22.

$$\begin{cases} 2x - 5y = 16 \text{ (d)} \\ 2x + 6y = -6 \text{ (e)} \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 5y = 16 \text{ (d)} \\ -11y = 22 \quad \text{(f)} \end{cases}$$

UN DETALLE INTERESANTE EN LA ACTIVIDAD 3

Esta actividad proponía:
“Graficá los siguientes pares de sistemas de ecuaciones. Si son equivalentes explicá porqué lo son, desde los gráficos y desde las ecuaciones” y “Proponé un sistema de ecuaciones, equivalente al dado, que corresponda al gráfico en cada caso” (ver ANEXO gráficos y sistemas correspondientes)

Nos posicionamos en que dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes en tanto sean simultáneamente incompatibles o denoten el mismo conjunto solución aunque lo expresen de manera diferente. Concretamente, cuando se tenía que completar con la expresión algebraica de un sistema de ecuaciones que se presentaba gráficamente, en un protocolo se corrigió “un” por “el”, proponiendo que existe una (única) expresión para un sistema equivalente.

P3- “Proponé un sistema de ecuaciones equivalente al dado” se corrigió sobrescribiendo “Proponé el sistema de ecuaciones equivalente al dado”

Las diferentes formas de expresar una ecuación en dos variables, dicho de otro modo, todas las expresiones algebraicas que denotan el mismo objeto o todas las expresiones que darían sistemas indeterminados, que es un caso de equivalencia que estaba incluido en esta secuencia, quedan reducidos a una posibilidad.

Quizás, fortalecido por el tratamiento como correspondencia 1 a 1: un gráfico, un sistema, persista la concepción por la cual la equivalencia conserva el mismo gráfico y no gráficos con el mismo conjunto solución.

Otras actividades de la secuencia (sustituir el sistema de ecuaciones por la suma de todas ellas, sustituir dos de las ecuaciones del sistema por su suma, sustituir una de las ecuaciones del sistema por el resultado de restarle otra, sumarle 3x+1 al primer miembro de cada ecuación, entre otras) nos han permitido detectar la necesidad de revisar las relaciones y las diferencias entre las transformaciones de una ecuación en dos variables en otra equivalente y las transformaciones de un sistema de ecuaciones lineales en otro equivalente.

DE LAS PRIMERAS APROXIMACIONES:

Muchas son las proyecciones de esta propuesta, que iniciarían seguramente al revisar la propia secuencia elaborada. Las primeras aproximaciones a partir de este trabajo nos han permitido analizar:

- Escasa presencia de tratamiento en bibliografías de álgebra, de Didáctica de la Matemática, en libros de texto de circulación en los contextos educativos en los que trabajamos, en los que mayoritariamente se da tratamiento a los sistemas de ecuaciones lineales pero no específicamente a las Equivalencias, aunque se exprese la potencialidad del concepto.
- Como advierte Sandra Mabel Segura de Herrero (2004) en el tratamiento de una secuencia en su trabajo planteada, no asocia el objeto sistema de ecuaciones lineales con los métodos de resolución. Intentamos ir en ese sentido. A diferencia de aquel trabajo, en el que la intención era la de evitar confundir el objeto con los algoritmos, tal lo expresa la autora y adhiriendo a este fenómeno rastreado en investigaciones de Carmen Sessa (1998), en nuestro caso queríamos analizar si era suficiente el tratamiento del concepto de equivalencia para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y para tratamientos conceptuales vinculados futuros.
- En la búsqueda en libros de texto y en carpetas de alumnos, encontramos que la solución de un sistema se presenta como una correspondencia uno a uno, un sistema, una solución, iniciando el tratamiento desde lo algebraico. Sintonizando en ese sentido, en lo relevado en las secuencias resueltas, no se explicitaron demasiados beneficios depositados en lo gráfico, en la posibilidad de pensar la equivalencia no inicialmente desde lo algebraico, ni necesariamente entre pares de sistemas o entre sistemas con igual cantidad de ecuaciones.
- Las nociones de sentido y denotación permiten identificar muchos aspectos del trabajo matemático, que el experto tiene internalizados y utiliza permanentemente para planificar su acción, como recurso de economía, como elemento de control. En caso de tener que detectar gráficos correspondientes a sistemas expresados algebraicamente, las secuencias resueltas no manifiestan utilizar la denotación de los enunciados mencionados ni para planificar su acción ni como elemento de control. Los señalamientos más recurrentes están posicionados en la relación de las ecuaciones con el gráfico. No hay disquisiciones con respecto al beneficio gráfico de poder detectar cuándo sistemas son equivalentes sin que sean equivalentes las ecuaciones que los definen, sin que se considere un sistema “derivado” de otro o cuando hay

en el mismo sistema ecuaciones equivalentes. Quizás, persista la concepción por la cual la equivalencia conserva el mismo gráfico y no gráficos con el mismo conjunto solución.

- Actividades orientadas a las transformaciones de un sistema de ecuaciones lineales en otro equivalente han explicitado la necesidad de revisar las relaciones y las diferencias entre aquellas y las transformaciones de una ecuación en dos variables en otra equivalente.

Por lo que ratificamos la necesidad de realizar un trabajo que tenga en cuenta simultáneamente la denotación y el sentido, y que promueva la flexibilidad para pasar de marcos algebraicos a marcos gráficos, en un contexto integrado de una misma tarea. Ante la importancia de “lograr que se haga matemática que sea matemática”, como postulan Panizza y Drouhard (2003), creemos necesario incluir esta discusión en ámbitos de la enseñanza.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Beth, E.; Piaget, J. (1980). *Epistemología Matemática y Psicología*. Barcelona: Grupo Editorial Grijalbo.

De Guzmán, M.; Colera, J. (1992). *Matemática I C.O.U.* Barcelona: Grupo ANAYA S.A.

De Guzmán, M.; Colera, J. (1993). *Matemática II C.O.U*. Barcelona: Grupo ANAYA S.A.

Foncuberta, J.; Barallobres, G. (1998) *Álgebra. De las ecuaciones a las transformaciones.* Programa de Perfeccionamiento Docente. Buenos Aires: Red Federal de Formación Docente

Kalnin, R. A. (1973). *Álgebra y Funciones Elementales*. Moscú: Editorial Mir.

Klimovsky, G. (1999). *Las Desventuras del Conocimiento Científico*, Buenos Aires: AZ.

Kostrikin, A. (1980). *Introducción al Álgebra*. Moscú: Editorial Mir.

Panizza M.; Drouhard, J-Ph. (2003). *Consideraciones teóricas acerca de la enseñanza de la Matemática*. En *La evaluación en la enseñanza. Un proyecto para las áreas de lengua y matemática*, Palou de Maté, Carmen; De Pascuale, Rita; Herrera Marta; Pastor, Liliana. Buenos Aires: GEEMA (Grupo Editor Multimedial), Argentina.

Panizza, M.; Sadovsky, P.; Sessa, C. (1999). *La ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito.* En Enseñanza de las Ciencias, Vol 17, (3) 453 – 461.

Segura de Herrero, S. M. (2004). *Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica*. Relime Vol.7, (1) 49-78.

Sessa, C. (1998). *Los efectos de un tratamiento aritmético de los sistemas de ecuaciones lineales. Análisis de un caso en un libro de texto*. Buenos Aires: Universidad de Buenos Aires.

------------ (1999). *Problemática Didáctica del Álgebra y la Geometría*, Taller de Resolución de Problemas realizado en la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de La Pampa.

------------ (2005). *Iniciación al estudio didáctico del Álgebra. Orígenes y perspectivas.* Buenos Aires: Del Zorzal

Socas Robayna, M. y otros. (1996). *Iniciación al álgebra.* Madrid: Editorial Síntesis.