DIFICULTADES RELACIONADAS CON LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE LÍMITE

Silvia Vrancken, María Inés Gregorini, Adriana Engler, Daniela Müller, Marcela Hecklein.
Facultad de Ciencias Agrarias. Universidad Nacional del Litoral
Esperanza. Prov. de Santa Fe (Argentina)
svrancke@fca.unl.edu.ar; migrego@fca.unl.edu.ar; aengler@fca.unl.edu.ar; dmuller@fca.unl.edu.ar; mhecklei@fca.unl.edu.ar

RESUMEN

La enseñanza del cálculo constituye uno de los mayores desafíos de la educación actual, ya que su aprendizaje trae aparejado numerosas dificultades relacionadas con un pensamiento de orden superior en el que se encuentran implicados procesos como la abstracción, el análisis, la demostración, etc.

Interesadas por el análisis de los errores y dificultades en el aprendizaje de los contenidos básicos del cálculo de alumnos de carreras universitarias no matemáticas, trabajamos en el proyecto "Errores y dificultades: organizadores didácticos en el aprendizaje del Cálculo en carreras no matemáticas", cuyos objetivos principales son detectar y tipificar errores y dificultades de los alumnos, analizando e interpretando sus causas con el fin de reorganizar el discurso didáctico, diseñando, poniendo en práctica y evaluando secuencias didácticas articuladas en torno a diferentes organizadores que prioricen el tratamiento de los errores.

Con el objetivo de detectar dificultades relacionadas con el concepto de límite y sus diferentes representaciones y evaluar el grado de comprensión alcanzado por los alumnos diseñamos una secuencia de actividades que los alumnos resolvieron luego de desarrollar el tema en clase.

Pretendemos que los errores y dificultades detectadas en este trabajo nos permitan determinar los obstáculos relacionados con el concepto de límite, proponer alternativas para solucionarlos y mejorar el proceso de enseñanza.

INTRODUCCIÓN

Existe una creencia generalizada sobre la simplicidad del proceso de enseñanza. El alumno graba lo que se le trasmite quizás con alguna pérdida de información. En general esto no es así, en muchas ocasiones, los alumnos construyen conocimientos que resultan no adecuados o erróneos.

La enseñanza del cálculo constituye uno de los mayores desafíos de la educación actual, ya que su aprendizaje trae aparejado numerosas dificultades relacionadas con un pensamiento de orden superior en el que se encuentran implicados procesos tales como la abstracción, el análisis y la demostración. A veces se supone que los alumnos fracasan por no llegar con una preparación adecuada, no saben álgebra, no conocen las propiedades de los números, las características de las desigualdades, no saben geometría, etc. Pero los alumnos pueden tener todos estos conocimientos y fracasar en el estudio del cálculo.

Los conocimientos no se apilan unos encima de otros. Un aprendizaje significativo implica rupturas cognitivas, acomodaciones. La construcción del conocimiento no es un proceso continuo, surge de desequilibrios, rupturas con conocimientos anteriores, reconstrucciones.

Distintos filósofos y epistemólogos, como Popper, Bachelard, Russel y Lakatos, entre otros, se han preocupado por estudiar las condiciones que posibilitan conocimientos erróneos así como el papel que desempeñan en el dominio y avance de la ciencia.

Para G. Bachelard el conocimiento científico no se desarrolla en un proceso continuo, sino que resulta del rechazo de formas previas de conocimiento que se constituyen en obstáculos epistemológicos. Las dificultades en el aprendizaje matemático resultan de formas de conocimiento que han sido durante cierto tiempo coherentes y efectivas en los contextos culturales o escolares encontrados por los estudiantes.

Bachelard planteó la noción de obstáculo epistemológico para explicar la aparición de errores. Dicho concepto no se refiere a las dificultades desorganizadas o derivadas de la ausencia de conocimiento, sino a las dificultades directamente vinculadas con las formas de considerar el conocimiento o con los conocimientos mismos.

La noción de obstáculo epistemológico fue retomada por Brousseau para la didáctica de la matemática. Para él, el conocimiento se produce cuando se supera un obstáculo. Estos son en sí un conocimiento que funciona bien en cierto contexto pero mal en otro determinado, dando lugar a errores.

Los obstáculos que se presentan en el sistema didáctico se pueden clasificar de acuerdo a su origen en obstáculos de origen ontogénico (son los que sobrevienen de las limitaciones del sujeto), obstáculos de origen didáctico (provocados por el sistema de enseñanza) y obstáculos de origen epistemológico (son aquellos derivados del rol constitutivo del saber mismo). Reconocer que los errores pueden deberse a causas epistemológicas y didácticas y no sólo de tipo cognitivo es un primer paso para encontrar posibles soluciones.

Interesadas por el análisis de los errores y dificultades en el aprendizaje de los contenidos básicos del cálculo de alumnos de carreras universitarias no matemáticas, trabajamos en el proyecto “Errores y dificultades: organizadores didácticos en el aprendizaje del Cálculo en carreras no matemáticas”, cuyos objetivos principales son detectar y tipificar errores y dificultades de los alumnos, analizando e interpretando sus causas con el fin de reorganizar el discurso didáctico diseñando, poniendo en práctica y evaluando secuencias didácticas articuladas en torno a diferentes organizadores que prioricen el tratamiento de los errores.

Al iniciarse la enseñanza del cálculo se presentan dificultades de diferente naturaleza. En primer lugar aparecen las provocadas por los esfuerzos para superar los modos de pensamiento numérico y algebraico. En este trabajo nos interesan las relacionadas con la conceptualización y formalización del concepto de límite.

La importancia de la enseñanza del concepto de límite radica en que puede ser usado como objeto de conocimiento así como herramienta o útil para otros objetos (continuidad, derivabilidad, entre otros) u otras ciencias (Física, Química, Ingeniería). Douady (1991) señala: “Un concepto es un útil cuando el interés está centrado en su utilidad para resolver un problema. Un concepto es un objeto cuando es considerado en una dimensión cultural como una porción de conocimiento independiente de cualquier contexto y que tiene lugar en el cuerpo de conocimiento científico reconocido”.

Azcárate et.al. (1996) manifiestan, al referirse a los trabajos de Cornu (1991) y Sierpinska (1985) que la enorme dificultad de la enseñanza y del aprendizaje del concepto de límite se debe a su riqueza y complejidad tanto como al hecho de que los aspectos cognitivos implicados no se pueden generar puramente a partir de la definición matemática. Los estudios de Cornu demostraron que los alumnos tienen “concepciones espontáneas personales” que provienen de su experiencia cotidiana. Dichas concepciones son muy resistentes al cambio y permanecen durante mucho tiempo de manera que pueden contener factores contradictorios que se manifiestan según las situaciones.

Son numerosos los obstáculos que antes y después de la enseñanza manifiestan los alumnos con respecto al concepto de límite. En lo que se refiere a este concepto, Cornu (1983) identifica los siguientes obstáculos epistemológicos:

- Sentido común de la palabra límite, lo que induce a concepciones persistentes de límite como barrera infranqueable o como último término de un proceso.
- Sobregeneralización de las propiedades de los procesos finitos a los procesos infinitos.
- Aspecto metafísico de la noción, ligado con el infinito, ya que introduce una nueva forma de razonamiento.
- Los conceptos infinitamente grandes y cantidades infinitamente pequeñas.

La consideración de los obstáculos es fundamental para el estudio, sistematización, análisis y explicación de los errores que se presentan en el pensamiento científico. En el proceso de construcción de los conocimientos van a aparecer de forma sistemática errores y por lo tanto se deberá incluir en dicho proceso actividades que promuevan el diagnóstico, detección, corrección y superación de errores, promoviendo una actitud crítica de los alumnos sobre sus producciones.

Los errores no aparecen por azar, sino en un marco conceptual basado en conocimientos adquiridos previamente. Los errores no desaparecen de golpe, resisten, persisten, resurgen pero tenidos en cuenta pueden contribuir positivamente en el proceso de aprendizaje.

Para Radatz (1980), el análisis de los errores nos permite diagnosticar dificultades individuales de los alumnos como punto de partida y como herramienta de investigación de procesos de enseñanza y de aprendizaje.

Las imágenes previas del concepto existentes en la mente del alumno siempre que se enfrenta a un concepto nuevo interfieren inevitablemente generando obstáculos al mezclarse con las nuevas imágenes adquiridas, impidiendo el desarrollo de la comprensión completa del nuevo concepto.

En la actualidad existe una tendencia a la enseñanza del cálculo basada en un enfoque algorítmico y algebraico. Es necesario utilizar diferentes representaciones para abordar los problemas de manera más eficiente. Generalmente se trabajan las representaciones algebraicas, pero si aparecen errores, los alumnos no pueden reconocer donde está el error. Tienden a utilizar las representaciones gráficas de manera muy limitada. No se las considera como apoyo para los procesos algebraicos.

Al realizar un estudio sobre el concepto de límite de una función en alumnos universitarios, Tall (1992) propone presentarles situaciones adecuadas que provoquen conflicto cognitivo originando un desequilibrio que los conduzca a la superación de los obstáculos epistemológicos presentes en la enseñanza de este concepto. Se deberá favorecer la integración de las tres representaciones sobre el límite funcional: gráfica, numérica y simbólica.

El aprendizaje significativo, según Sierpinska (1990) debe ser modelizado como una secuencia de actos de comprensión, de actos de superación de errores. Dice que para que el sujeto comprenda ha de ser enfrentado, mediante situaciones de enseñanza, a los obstáculos epistemológicos inherentes a un determinado saber de forma tal que se faciliten los actos de comprensión para la superación de obstáculos.

DESARROLLO DE LA PROPUESTA

El concepto de límite funcional parte del concepto de función y por lo tanto utiliza los mismos sistemas de representación, coloquial, numérica, visual y algebraica. Los alumnos estudiaron el tema funciones en la asignatura Matemática I, en cuya oportunidad se repasó el concepto de función, haciendo hincapié en las distintas formas de representación, se estudiaron las distintas propiedades, introduciendo los conceptos de tendencia infinita y asíntota.

En Matemática II se introduce la noción de límite de forma numérica y gráfica, definiendo luego de manera formal el límite de una función en un punto. Se realiza un tratamiento fuertemente intuitivo recalcando su papel de herramienta para resolver problemas de variación de funciones.

Con el objetivo de detectar dificultades relacionadas con el concepto de límite y sus diferentes representaciones y evaluar el grado de comprensión alcanzado por los alumnos diseñamos una secuencia de actividades que los alumnos resolvieron luego de desarrollar el tema en clase.

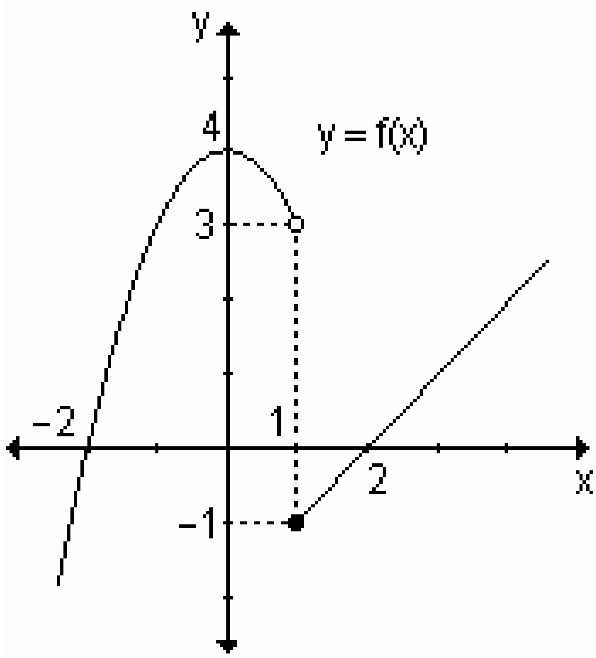
Pensamos que el alumno domina el concepto de límite si es capaz de definir y explicar la definición, proponer ejemplos, analizar situaciones que se le presentan y comprender algunos teoremas y propiedades de los límites. Las tareas diseñadas pretenden tener en cuenta esos aspectos, comenzando por las ideas más intuitivas, teniendo en cuenta los aspectos gráficos y algebraicos.

A continuación mostramos algunos de las actividades planteadas y los errores cometidos sobre un total de los cuarenta y nueve trabajos.

Actividad 1

Dada la gráfica de una función f, determine:

i) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ **ii)** $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ **iii)** $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ **iv)** f(1)



Con este ejercicio se trata de analizar si los alumnos comprenden el concepto de límite a partir de una función definida gráficamente.

Del total de los trabajos, en general no se cometieron errores para determinar el valor de la función pero veintiuno no responden a los tres primeros ítems. De los alumnos que contestan, no se cometieron errores en la determinación del límite por derecha pero sí en el límite por izquierda, ya que veinticuatro alumnos contestan que no está definido. Se observa que los alumnos identifican el límite con el valor de la función en el punto.

Actividad 2

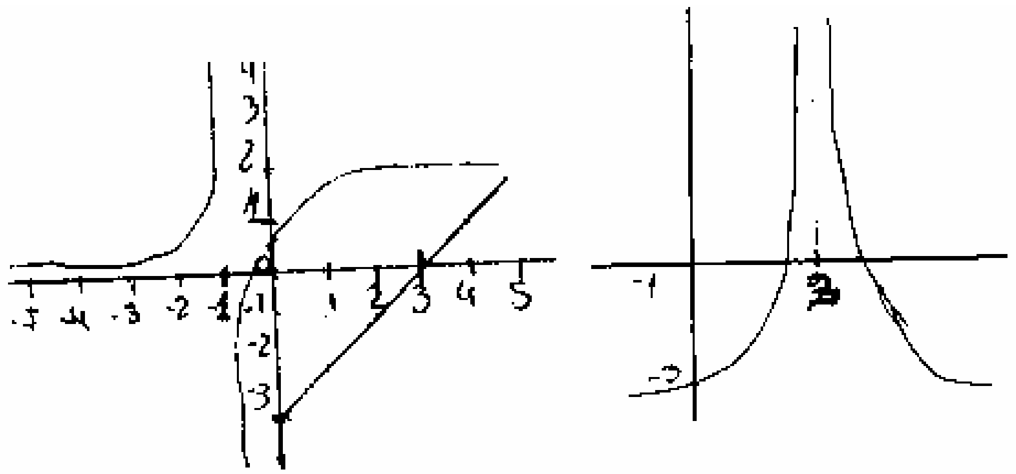
Grafique una función, lo más sencilla posible, que cumpla simultáneamente las siguientes características:

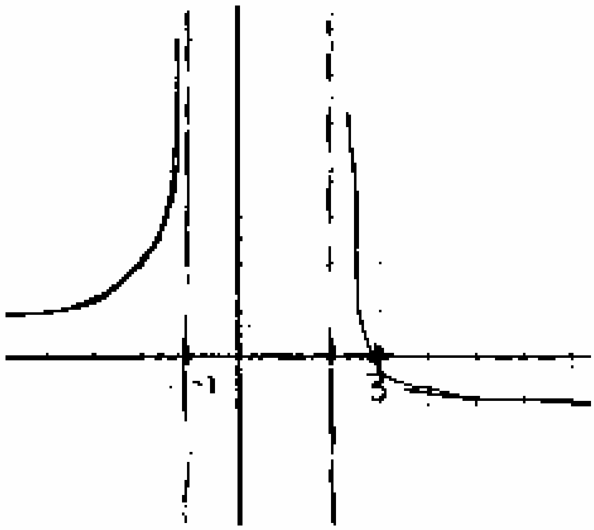
$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 2$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 2$ $\quad \lim\limits_{x\to-1^-} g(x) = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to-1^+} g(x) = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to 0} g(x) = -3$ $\quad \lim\limits_{x\to 3} g(x) = 0$

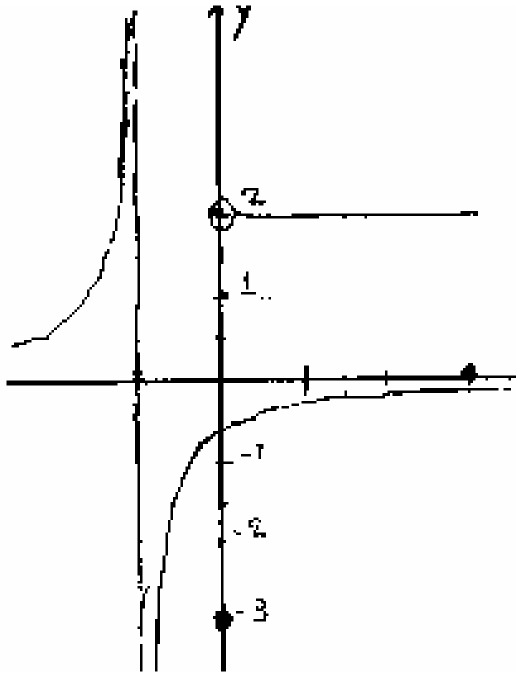
En esta actividad los alumnos deben graficar una función y se pretende evaluar si son capaces de ilustrar gráficamente su idea de límite.

Aproximadamente la mitad de los alumnos dibujó una gráfica que cumplió con todos los requisitos. En el resto de los trabajos se observó que los alumnos tienen problemas para diferenciar la variable independiente y la variable dependiente.

Mostramos algunas de las gráficas presentadas por los alumnos.







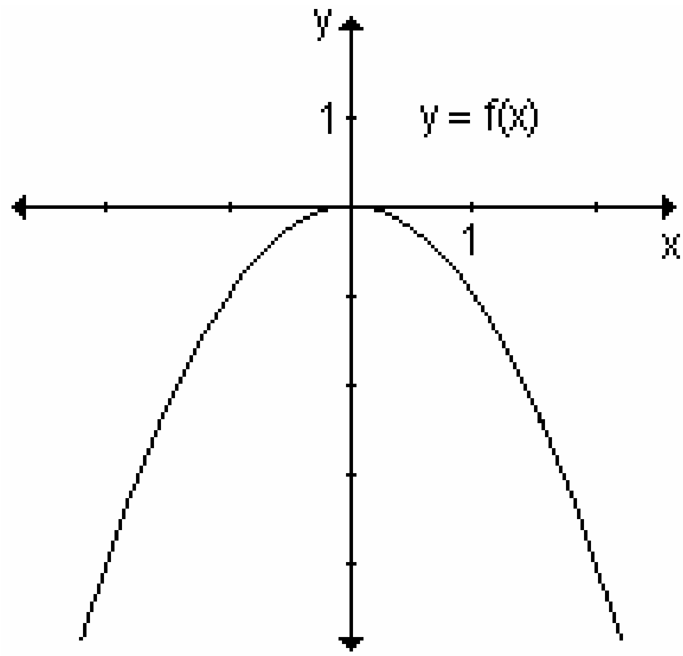
Cuando se les solicita el límite cuando x tiende a infinito interpretan de dos formas diferentes. Algunos dibujan una tendencia al infinito de la y cuando x tiende a dos y otros las dos tendencias, la anterior y otra al dos cuando x tiende a infinito.

Muchos alumnos dibujan una función con asíntota vertical en x = 2 y otros con dos asíntotas, una vertical en x = 2 y otra horizontal y = 2.

Cometieron numerosos errores como ser empalmar trozos de gráficas que en algunos casos satisfacen todas las condiciones por separado pero que no resultan funciones.

Actividad 3

Para la función definidas gráficamente calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.



Si bien la cantidad de respuestas correctas fue alta (treinta y dos), se observa, en los trabajos que presentan errores, coincidencias en las respuestas, ya que la mayoría responde que el límite (tanto por izquierda como por derecha) es cero.

Actividad 4

Calcule los siguientes límites

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 3x - 4}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$ **c)** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^4 - 3x}{5x^2 + x}$ **d)** $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)$

En esta actividad en la que los alumnos debían realizar cálculos de límites, muchos realizan la sustitución y quedan ahí. Se observaron dificultades para salvar las indeterminaciones y factorizar las expresiones. Los alumnos cometieron numerosos errores de tipo algebraico y numérico.

Los más comunes fueron, de tipo algebraico $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\sqrt{x+1-x}$, de tipo numérico, $\infty-\infty=0, \frac{1}{0}=0, \frac{0}{\infty}$ indeterminado.

CONCLUSIONES Y REFLEXIONES

En el proceso de adquisición del concepto de límite aparecen diferentes obstáculos que se manifiestan por los errores que cometen los alumnos. Los errores suelen derivarse de dificultades en los procesos de aprendizaje matemático o por la interacción de variables de la educación matemática y pueden ser resistentes en el tiempo.

Analizando los errores, pudimos detectar las siguientes dificultades asociadas al concepto de límite:

- Dificultades relacionadas con el concepto de función.
    - Dificultades para representar gráficas que sean funciones.
    - Dificultades relacionadas con el concepto de dominio de una función.
    - Dificultades para distinguir entre variable independiente y dependiente.

- Dificultades relacionadas con el concepto de límite.
    - Dificultades para comprender que el límite es lo que ocurre cerca del punto y no en el punto.
    - Dificultades para reconocer e interpretar límites laterales.
    - Dificultades para la manipulación algebraica de las leyes de las funciones cuyo límite se quiere determinar.
    - Dificultades para comprender que el cálculo del límite no es siempre por sustitución.

- Dificultades para pasar de un sistema de representación a otro.
    - Dificultades para relacionar expresiones de límites con su traducción gráfica o el proceso contrario.

Llama la atención las dificultades encontradas para la construcción de gráficos de funciones a partir de condiciones dadas en forma verbal ya que este tema se trabajó en una materia anterior. Pareciera haber falta de capacidad de los alumnos para manejar mucha información en simultáneo, integrarla y dar una respuesta adecuada.

Pretendemos que los errores y dificultades detectadas en este trabajo nos permitan determinar los obstáculos relacionados con el concepto de límite.

En carreras donde la matemática tiene un carácter instrumental, es decir, representa un medio que les permite como futuros profesionales la interpretación, el planteo y la resolución de problemas específicos de su carrera, debemos procurar que los alumnos adquieran los conceptos fundamentales. Es importante promover la visualización matemática utilizando diferentes representaciones para la construcción del concepto, presentándolo como una potente herramienta para resolver problemas de variación de funciones.

"El verdadero problema que debe plantearse en la enseñanza de las Matemáticas no es el del rigor, sino el de la construcción del sentido, de la justificación ontológica de los objetos matemáticos" (Thom, R. 1978: 148, trad. Hernández).

Para superar las dificultades de la enseñanza proponemos una metodología más activa y una aproximación más intuitiva, ofreciéndoles mecanismos que proporcionen a los alumnos la posibilidad de reconocer errores, detectar las causas de los mismos y los ayuden a proponer alternativas para solucionarlos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (1995*). Ingeniería didáctica*. En Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L. y Gómez, P. (editor). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Una Empresa Docente. Grupo Editorial Iberoamérica. Bogotá.

Artigue, M. (1995). *La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos*. En Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L. y Gómez, P. (editor). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Una Empresa Docente. Grupo Editorial Iberoamérica. Bogotá.

Artigue, M. (1998). *Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares?* En *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, RELIME nº 1.
Artigue, M., 2000. *Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental:¿Qué nos enseñan las investigaciones didácticas y los cambios curriculares*? En Cantoral, R. (Ed.) *El futuro del cálculo infinitesimal*, ICME 8. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
Azcárate, C.; Bosch, D.; Casadevall, M. y Casellas, E. (1996). *Cálculo Diferencial e integral*. España: Editorial Síntesis.
Blázquez, S.; Ortega, T., (2000). *El concepto de límite en la educación secundaria*. En Cantoral, R. (Ed.) *El futuro del cálculo infinitesimal*. ICME 8. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
Brousseau, G.; *Los obstáculos epistemológicos y los problemas en Matemática*. En http:/fractus.mat,uson.mx/Papers/Brousseau/ObtaculoBrousseau.htm. Consultado el 02/06/04.
Cornu, B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles*. (These de doctorat). Universitè de Grenoble.
Cornu, B. (1991). *Limits*. En Tall, D. (Ed). *Advanced Mathematical Thinking*. 153-166. Dordrecht: Kluwer Academic Press.
Douady, R. (1991). *Tool, object, setting, window; elements for analysing and constructing didactical situations in mathematics*. En A.J. Bishop & S. Melling – Olsen (Eds). *Mathematical Knowledac: its grouth through teaching*: 100-126. Dordrecht: Kluwer A.P.
Lara Chávez, H. (1997). *La enseñanza de los conceptos de límite y continuidad de funciones*. pp. 127-132. *Memorias del Seminario Nacional: Calculadoras y Computadoras en Educación Matemática*. Sonora.
Radatz, H. (1980). *Student's Errors in the Mathematis Learning Process: A Survey. For the Learning of Mathematics*. Vol 1 (1)
Rico, L. (1999). *Los Organizadores del Currículo de Matemáticas*. En Rico, L. y otros. *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Buenos Aires.Erre Eme S.A.
Sierpinska, A. (1990). *Some remarks on understanding in mathematics. For the learning of Mathematics*, vol. 10, pp 24-36.
Tall, D. (1992). *Student´s Difficulties in Calculus. Plenary presentation in Working Group* 3, ICME, Québec, august 1992. Mahematics Education Research Centre. University of Warwick.
Thom, R. (1978). *Matemáticas Modernas y matemáticas de siempre*. En J. Hernández (editor). *La enseñanza de las matemáticas moderna*s: 140-156. Alianza Universidad. Madrid.