IDEAS DE LOS ALUMNOS DE ESCUELA MEDIA SOBRE EL INFINITO DE LOS CONJUNTOS NUMÉRICOS

Patricia Lestón
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González"
Buenos Aires (Argentina)
patricialeston@yahoo.com.ar

RESUMEN

El presente trabajo introduce un análisis de las dificultades que se observan frente a la enseñanza y aprendizaje de los conjuntos numéricos (Naturales, Enteros, Racionales y Reales) en el nivel medio. Se analizan en particular las dificultades frente a conceptos como el infinito, la densidad del conjunto de los números racionales y la completitud y continuidad del conjunto de los números reales.

La complejidad de estos conceptos hace que los docentes abandonen su enseñanza en muchos casos, o en otros, se dediquen únicamente a una explicación teórica, que el alumno no comprende; y una enumeración de propiedades y características. Este tipo de enseñanza impide luego la correcta comprensión de otros conceptos como la idea de límite, variación, derivada, función continua, y otros concernientes al campo del Análisis Matemático, que se basan en los anteriores.

A fin de clarificar los conceptos antes nombrados y permitir un aprendizaje más significativo, se propone la complementación de la enseñanza de estos conceptos con el trabajo con números transfinitos, representando con ellos a los cardinales de los conjuntos numéricos.

Se espera que el trabajo con los conjuntos desde dos aspectos distintos (geométrico y numérico, y desde la teoría conjuntista) permitan al alumno una adquisición de estos objetos matemáticos con mayor efectividad, logrando así que las bases del análisis matemático se asienten sobre estructuras mejor constituidas y más elaboradas.

INTRODUCCIÓN

En los últimos años, las currículas de las escuelas argentinas han incluido como tema de la matemática de quinto año de escuela media (o tercer año de Polimodal) los conceptos generales del Análisis Matemático. En la gran mayoría de las escuelas se trabajan en la actualidad, de manera bastante regular, contenidos como límites, derivadas y, en muchos casos, integrales. Sin embargo, los ingresos de las universidades e institutos terciarios, tanto los exámenes de ingreso como el Ciclo

Básico Común de la Universidad de Buenos Aires, demuestran que los conocimientos adquiridos del Análisis Matemático son insuficientes para alcanzar los estándares que se les piden.

Uno de los conflictos que se observan de manera más habitual es el problema con el concepto de límite y la relación que este tiene con la consideración de la continuidad de la recta numérica y de los números reales. Si se toma esta observación como punto de partida, se observa que el trabajo que se hace en las escuelas con la definición y propiedades de los conjuntos numéricos es poco profundo. En general, los docentes se “olvidan” de trabajar este contenido o se detienen sólo en algunas particularidades de los conjuntos. Si se considera que es en estos contenidos en los que se tienen que establecer las bases del análisis matemático, entonces se comprenderá de manera más sencilla el por qué del surgimiento de los conflictos antes presentados.

MARCO TEÓRICO

El análisis de los temas hasta ahora planteados demanda un marco teórico que permita considerar no sólo la naturaleza de los conceptos involucrados, sino también la génesis de su surgimiento. Se considerará por separado el análisis del infinito y de la continuidad a fin de comprender como se involucran y se relacionan unos con otros. Se verá primero cómo ha sido el devenir del infinito como concepto matemático.

En la antigua Grecia, de donde podemos obtener las bases de muchas de las ideas que han permitido el desarrollo de la matemática actual, la idea de infinito fue causante de duda e intriga. Y como muestra se pueden considerar las ya conocidas paradojas de Zenón, que se retomarán más adelante al hablar de continuidad. La primera concepción que surge en esta época es la de los pitagóricos, a la cual Aristóteles se refiere como:

> *..."Si el infinito no es ni una magnitud ni un número, sino que es en sí mismo una sustancia y no es atributo, será indivisible, porque lo divisible es magnitud y número; pero si esta es indivisible no es infinita [...]. No obstante, esto no es lo que dicen aquellos que sostienen la existencia del infinito, ni nosotros lo investigamos como tal, sino como lo que no alcanza su fin."...*

Y agrega:

> *..."¿Cómo es posible que el infinito sea una cosa en sí, si no lo son ni el número ni las magnitudes, de las que el infinito es una propiedad?"...*

Luego de estas ideas iniciales, el infinito se trabaja con otras visiones, pero no se logra el dominio o explicación racional de esta idea. Y esta situación en su desarrollo se mantiene durante la Edad Media. En esta época, el infinito se trabaja como una producción divina, asociada al poder infinito de Dios.

El obispo inglés Robert Grosseteste, en el mismo siglo, afirma que el único que puede manejar el infinito es Dios, pues para Él los infinitos son finitos.

Más tarde, aún cuando la matemática avanzaba a grandes pasos, este concepto seguía generando incomprensibles conflictos. Gauss (1831), uno de los grandes matemáticos de toda la historia, se expresó al respecto:

> *"Protesto contra el uso de la magnitud infinita como una cosa completa, que jamás puede permitirse en Matemática. Infinito es simplemente una forma de hablar y la verdadera significación es un límite al que ciertas razones se aproximan indefinidamente, mientras otras aumentan sin restricción"*.

Recién aparece un trabajo más sistemático y científico con la intervención de Bernard Bolzano, a quien se debe la primera introducción del infinito desde un punto de vista conjuntista en la matemática. Con esta herramienta consiguió un medio conceptual adecuado para el tratamiento de este concepto. Bolzano definió los conceptos de número y de magnitud a partir de la idea de colección. Sin embargo, las bases de una verdadera teoría que explicara el infinito no aparecen hasta que se desarrolla entre los años 1871-84 la teoría de conjuntos de Cantor que permite darle al fin una base teórica al concepto de infinito.

Opina respecto a este tema A. W. Moore (1995):

> *"Al igual que casi todo el mundo, durante más de dos milenios los matemáticos no han sabido a ciencia cierta que pensar del infinito. Varias paradojas ideadas por los pensadores griegos y medievales les habían convencido de que acerca del infinito no se podía reflexionar impunemente. Así estaban las cosas en los años '70 del siglo pasado cuando Georg Cantor develó la matemática transfinita, rama de las matemáticas que aparentemente resolvía todas las paradojas que planteaba el infinito. Cantor, en su obra, demostraba que existían números infinitos, que los había de distinto tamaño y que podían utilizarse para medir la extensión de conjuntos infinitos"*.

Con respecto a la idea de continuidad y su relación con el concepto de infinito, se puede una vez más, iniciar la recorrida a partir de Grecia con las paradojas de Zenón de Elea, en las que se plantea que no es posible representar el espacio como constituido por puntos yuxtapuestos y el tiempo como constituido de instantes sucesivos.

Si se analiza el planteo de la paradoja de Aquiles y la tortuga se deduce que la carrera no llega a terminar ni Aquiles logra alcanzar a la tortuga. Sin embargo, todos sabemos que en la práctica esto no es así. Entonces, ¿cuál es el engaño?

Zenón explicó que el problema era que el movimiento no existe, sino que es un engaño de nuestros sentidos. Pero en realidad, el problema es que estamos analizando las distancias recorridas a través de este movimiento como una serie, mientras que olvidamos que el tiempo es continuo. Es el tratamiento discreto del tiempo el que ocasiona la paradoja.

La principal objeción de Aristóteles a lo planteado por Zenón en sus paradojas, consistió en la distinción entre infinito por suma y el infinito por división. Si se considera una unidad de longitud y se la suma infinitas veces, se obtiene una distancia ilimitada no recorrible en un tiempo finito. Pero si se prefigura lo ilimitado conforme a un procedimiento "*en cierto modo opuesto*", como el llevado a cabo por Zenón, dividiendo la unidad de longitud en infinitos intervalos, entonces la infinitud puede considerarse agotable en un intervalo limitado de tiempo.

METODOLOGÍA

Como fase inicial de esta investigación, se generó una secuencia didáctica en la que, a través del análisis de textos extraídos de la literatura fantástica y de los conocimientos formales adquiridos sobre conjuntos numéricos, se intentan observar las ideas que los alumnos tienen de la continuidad, la densidad y el infinito.

La secuencia didáctica fue llevada a alumnas de un colegio de Capital Federal, en la cual la unidad de conjuntos numéricos es impartida en el segundo año de escuela media y retomada a fines del cuarto año para afianzar el posterior trabajo con el análisis matemático.

La actividad a modo de encuesta fue llevada a un grupo de alumnos de segundo, tercero y cuarto año de escuela media, contando con una muestra bastante importante. Los resultados obtenidos reflejan las ideas presentadas al inicio del trabajo y se enumeran a continuación las concepciones más llamativas y reiteradas y los errores más frecuentes que se observaron en estos trabajos.

ACTIVIDADES PROPUESTAS

Para el análisis de estos conflictos se trabajaron dos secuencias didácticas distintas. Una primera, que intentaba recuperar los conceptos del infinito y continuidad de los conjuntos numéricos, y la segunda, que intentaba presentar a las alumnas una contradicción entre sus ideas sobre el infinito y las propiedades de los conjuntos infinitos.

La primera secuencia didáctica tenía por objetivo observar la situación del aprendizaje de los alumnos que ya habían trabajado la unidad correspondiente a conjuntos numéricos, para poder concluir si los contenidos enseñados habían realmente sido incorporados como conceptos significativos. Inicialmente se les solicitaba a los alumnos que caracterizaran a los conjuntos numéricos (natural, entero, racional y real) como resultado de la necesidad de definir operaciones que no eran cerradas en el conjunto a partir del cual se los define. Esta selección de introducción de los conjuntos se debe a que es de esta forma como se la presenta en las currículas y los libros de texto.

A continuación, se presentaban una serie de propiedades y características que debían relacionar con cada uno de los conjuntos numéricos y que apelaban a observar qué tan significativo había sido el aprendizaje. Se pide luego que definan con sus palabras la densidad y la continuidad y digan qué conjunto tiene cada una de esas propiedades.

Por último se pide que relacionen los conjuntos antes definidos con dos cuentos de Jorge Luis Borges que se relacionan con el concepto de infinito. El primer relato con el que se trabajó es *El libro de Arena*, y el segundo, *El Aleph*.

CONCEPCIONES DE LOS ALUMNOS

Si bien los resultados no fueron tabulados, dado que el tipo de análisis que se buscaba no era cuantitativo sino cualitativo, se observaron ciertas cuestiones que por su frecuencia resultan llamativas. Algunas de ellas se presentan a continuación.

- ✓ Por lo general, los alumnos logran encontrar la operación cerrada que "define" el conjunto numérico. El más complejo es el de los números irracionales, dado que presentan a la radicación como la operación que lo genera pero no se distingue la aparición de raíces de índice par de valores negativos. Sólo algunos alumnos que habían trabajado con números complejos muy poco tiempo antes de resolver la secuencia lograron hacer esta distinción.

- ✓ Con respecto a las propiedades, muchos de los alumnos presentan ciertas ideas contradictorias. Si bien la gran mayoría logra decir que los números racionales forman un conjunto denso y reconoce que entre dos racionales hay infinitos racionales, un grupo importante afirma que se puede hallar un siguiente y anterior para todo número racional.

- ✓ Algunos alumnos, una minoría, concluyó que el conjunto de los números reales es denso dado que "siendo más que los racionales, tienen que ser densos". El resto no pudo extender esta propiedad al conjunto de los números reales.

- Todos los alumnos reconocieron que los números reales forman un conjunto continuo, pero para definirlo sólo pueden recurrir a la característica de "completar" la recta. Por ser ésta una explicación geométrica y la de densidad

- ✓ una explicación algebraica, el conjunto de los reales no parece ser un conjunto denso.
- ✓ Con respecto al análisis de los textos, los alumnos no tuvieron problema en relacional al Aleph con el conjunto de los números reales (irónicamente llamado Aleph por su autor) pero se les complicó determinar una relación con el relato del libro de arena, dado que si bien son infinitas y no hay primera ni última podría ser el conjunto de los racionales o de los reales.

La segunda secuencia constaba de una serie de actividades sobre conjuntos, en los cuales se pretendía que las alumnas trabajaran inicialmente con conjuntos finitos y sus propiedades y comparación de tamaño o “cantidad de elementos” y luego con conjuntos infinitos y sus propiedades y “tamaños”. El objetivo era entonces lograr que las alumnas transfirieran las propiedades de conjuntos finitos a infinitos y se encontraran como consecuencia con una contradicción.

Esta secuencia se aplicó a un grupo de alumnas de quinto año del mismo colegio, que ya estaban trabajando sobre las bases del análisis y de las características de las funciones ya estudiadas.

CONCEPCIONES DE LAS ALUMNAS

- ✓ Con respecto al trabajo con conjuntos finitos, las alumnas logran distinguir entre las diferencias de tamaños entre ellos y pueden elaborar argumentos matemáticos válidos de comparación, básicamente trabajando con la cantidad de elementos entre uno y otro.
- ✓ Con respecto a los conjuntos infinitos, las alumnas en su mayoría no distinguieron diferencias de tamaños, y no lo pudieron justificar correctamente sus respuestas
- ✓ En una segunda parte, cuando se presentaba la biyección como método de comparación, muchas de las alumnas logran elaborar una justificación de la diferencia de tamaños, planteando la contradicción entre sus propias respuestas.

CONCLUSIONES Y PROPUESTAS

Por lo observado en las respuestas obtenidas, se puede concluir que teóricamente, los alumnos manejan las definiciones y propiedades de los conjuntos numéricos. Sin embargo, conceptualmente, muchas de las ideas que manejan no están claras y se presentan como contradictorias.

Se puede deducir que existen en las mentes de las alumnas conflictos entre las imágenes mentales que tienen de los números, los conjuntos y el infinito y los conceptos matemáticos de los mismos.

Estos conceptos, por ser ideas que aparecen en la vida de las personas aún antes de escolarización, presentan un modelo formado previo al tratamiento académico de los mismos. Y son esos modelos los que debemos analizar para evaluar qué ideas traen y cómo influyen en el posterior aprendizaje de estas ideas.

Podría concluirse que el aprendizaje que se ha logrado no es "completo", aunque está bien orientado. La propuesta en función de la cual seguirá la investigación plantea la introducción de los números transfinitos a fin de lograr que los estudiantes de bachillerato logren formalizar sus conceptos sobre densidad y continuidad y entender finalmente que hay detrás del infinito. Se espera que con esta modificación y ampliación en la forma de tratamiento de estos conceptos, se logre una base más segura para el desarrollo del análisis matemático.

Si bien en la actualidad el conjunto de los números transfinitos no aparece en ningún curso de nivel medio, su incorporación no demandaría modificaciones excesivas.

La identificación de los números transfinitos como cardinales de conjuntos permitiría a los alumnos asociarlos con el trabajo con conjuntos (presente en la mayoría de las escuelas primarias y en algunas escuelas medias).

La asignación de correspondencias a partir de métodos de ordenamiento puede ser trabajada sin necesidad de la incorporación de otros contenidos teóricos. E inclusive probar la no numerabilidad del conjunto de los números reales no presenta más dificultades que comprender la completitud de la recta del mismo conjunto.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barallobres, G., Sassano, M. (1994). *Matemática 4*. Argentina: Aique Grupo Editor.
Bell, E. T. (1948). *Los grandes matemáticos. Desde Zenón a Poincaré.* Argentina: Editorial Losada.
Bell, E. T. (1996). *Historia de las Matemáticas.* México: Fondo de Cultura Económica.

Boyer, K. (1996). *Historia de la Matemática.* Madrid: Alianza Universidad.
Corbalán, F. (1998). *La Matemática aplicada a la vida cotidiana*. Barcelona: Ed. Graó.
Courant, R., Robbins, H. (1964). *¿Qué es la matemática?*. Madrid: Editorial Aguilar.
Crespo Crespo, C. (2002). "La noción de infinito a través de la historia". En Crespo Crespo, C. (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Volumen 15, I. México: Grupo Editorial Iberoamérica. (pp 529-534).
Crespo Crespo, C. (2001). *Acerca de la comprensión del concepto de continuidad*. En Boletín de SOAREM nº 11 (pp.7-14). Buenos Aires: SOAREM.
De Morgan, A. (1997). "Colección de Paradojas". En Newman, J. (Ed.) *Sigma. El mundo de las matemáticas.* Volumen 6, pp 304-318. Barcelona: Ed. Grijalbo.
Lestón, P.; Veiga, D. (2004). Introducción al infinito. En Díaz, L. (Ed.) Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Volumen 17. Tomo 1. México: Clame (pp.440-410)
Moledo, L. (1994). *De las tortugas a las estrellas. Una introducción a la ciencia.* Argentina: AZ Editora.
Moore, A. (1995, junio). Breve historia del infinito. *Investigación y Ciencia*. pp 54-65.
Palacios, A., Barcia, P., Bosch, J., Otero, N. (1995). *Los Matematicuentos. Presencia matemática en la literatura.* Buenos Aires: Argentina: Magisterio del Río de la Plata.