UN CAMBIO EN EL PARADIGMA DE LA GEOMETRÍA

Haydeé Blanco
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González"
Buenos Aires (Argentina)
fblanc@fibertel.com.ar

RESUMEN

En este trabajo se hará un itinerario histórico por la geometría proyectiva, desde su utilización inicial por los artistas renacentistas, hasta los modelos topológicos del plano proyectivo más modernos. Transitaremos un breve recorrido de su evolución desde el nacimiento hasta la consolidación de la **Geometría Proyectiva,** teniendo en cuenta: los orígenes de la Geometría Proyectiva en los artistas del Renacimiento, el restablecimiento de los conocimientos griegos y sus aplicaciones y el renacer de la Geometría Pura.

INTRODUCCIÓN

La Geometría es considerada como una herramienta para el entendimiento, tal vez la parte de las matemáticas más intuitiva, concreta y ligada a la realidad. Por otra parte, la geometría como una disciplina, se apoya en un proceso de formalización que se ha venido desarrollando por más de 2000 años creciendo en rigor, abstracción y generalidad.

Los últimos años, la investigación en geometría ha sido estimulada por nuevas ideas tanto desde el interior de las matemáticas como desde otras disciplinas, incluyendo la ciencia de la computación.

Brevemente me voy a referir a algunos de los principales desarrollos en la historia de la **Geometría Proyectiva** e indicar los hitos importantes desde el punto de vista didáctico para la enseñanza de esta disciplina.

Como ha dicho M. Kline: "*En el lugar de las matemáticas hay muchas moradas, y entre ellas, la más elegante es la Geometría Proyectiva*".

Se asiste en el Renacimiento a un cambio de paradigma, ya que la **Geometría Proyectiva** tiene sus orígenes en la pintura del Renacimiento. Después en el siglo XVII se recobrarán las ideas de los matemáticos griegos, pero son los pintores renacentistas los que dan los pilares a esta rama de las matemáticas al lograr expresar en el plano, los objetos y las figuras tridimensionales, a diferencia de sus predecesores de la Edad Media.

En el Renacimiento se investiga la visión que tenemos de una escena cuando la vemos en distintas pantallas colocadas entre dicha escena y nuestro ojo. Nacen de esta manera la *perspectiva* y el estudio de las *proyecciones* y las *secciones.*

En este trabajo, recorreremos brevemente la utilización de la Geometría Proyectiva, desde el Renacimiento hasta los modelos topológicos más modernos.

RENACIMIENTO: LA GEOMETRÍA RELACIONADA CON EL ARTE

La Geometría Proyectiva tiene sus orígenes en la pintura del Renacimiento. Luego, en el siglo XVII se recuperarán ideas de los matemáticos griegos, pero son los pintores renacentistas los que dan fundamento a esta rama de las Matemáticas al lograr plasmar en lienzos planos los objetos y las figuras tridimensionales, a diferencia de sus antecesores de la Edad Media. Podemos mencionar a Leonardo da Vinci, Rafael Sanzio o Alberto Durero, entre otros.

De acuerdo a la doctrina de que la esencia de la naturaleza es una ley matemática, los pintores del Renacimiento, compenetrados en esa creencia, lucharon durante más de cien años por encontrar un esquema matemático que les permitiera pintar el auténtico mundo tridimensional en una tela bidimensional.

Los pintores que eran arquitectos e ingenieros y los mejores matemáticos del siglo XV, lograron expresar la distancia, el espacio, la masa, el volumen y los efectos visuales.

La esencia de la representación tridimensional se basaba en el principio de proyección y sección. Lo que se ve de la escena depende de la posición del observador. Imaginaron que la tela era una pantalla de cristal interpuesta entre la escena y el ojo.

Cada rayo de luz se originaba en cada punto de la escena dirigido al ojo. Esta colección de rayos de luz (líneas convergentes) la llamaron proyección. La colección de puntos, en donde las líneas de la proyección cortaban la pantalla de cristal, era una “sección”. Para lograr realismo, el pintor tenía que reproducir en la tela, la sección que aparecía en la pantalla de cristal.

La sección dependía no sólo del lugar donde se situara el artista, sino también de donde se colocaba la pantalla de cristal entre el ojo y la escena.

El artista renacentista tenía que deducir teoremas, que le especificaran cómo iba a aparecer una escena en al pantalla de cristal imaginaria (situación, tamaños y formas de objetos) para que pudiera trasladarla a la tela. Estos teoremas forman parte de la Geometría euclidea, y figuran en los libros modernos sobre perspectiva, que utilizan los estudiantes de pintura.

La escuela de Atenas
Fresco, base 772 cm
Roma, Vaticano

Matemáticos profesionales se encargaron de la investigación de estas cuestiones y desarrollaron una geometría de gran generalidad, la Geometría Proyectiva.

Supongamos, por ejemplo, que el objeto que examinamos es un cuadrado. Si se contempla desde un punto algo lateral al cuadrado, y si una pantalla de cristal se interpone entre el ojo y el objeto, la sección sobre la pantalla ya no será un cuadrado sino un cuadrilátero de forma irregular. Por ejemplo, las baldosas del suelo en el cuadro de Rafael no son cuadrados, aunque las baldosas físicas lo fueran.

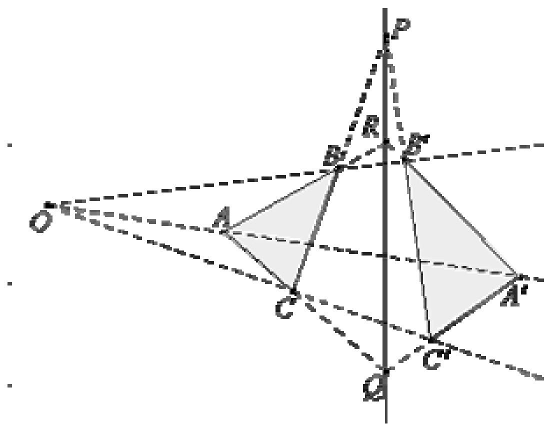
Los matemáticos buscaron propiedades geométricas comunes a todas las secciones de la misma proyección y a las secciones de dos proyecciones distintas de una escena dada.

Los geómetras proyectivos observaron que así como el contorno de un círculo o de un cuadrado varía en secciones distintas de una misma proyección, o en distintas proyecciones de la figura, variará de la misma forma la longitud de un segmento, la medida de un ángulo o de un área.

Observamos, por ejemplo, las líneas de las baldosas del suelo en la “Escuela de Atenas” de Rafael.

Por lo tanto, las propiedades comunes a dichas secciones distintas no incumben a la Geometría euclidea pero sí a la Geometría Proyectiva.

SIGLO XVII: RESCATE DE LOS CONOCIMIENTOS GRIEGOS Y SU APLICACIÓN A LA CIENCIA Y A LA TÉCNICA



Quien proporcionó un conocimiento más profundo para obtener propiedades importantes comunes a diferentes secciones, fue **Gérard Desargues** (1591-1661), arquitecto e ingeniero autodidacta, que trabajó durante la primera mitad del siglo XVII.

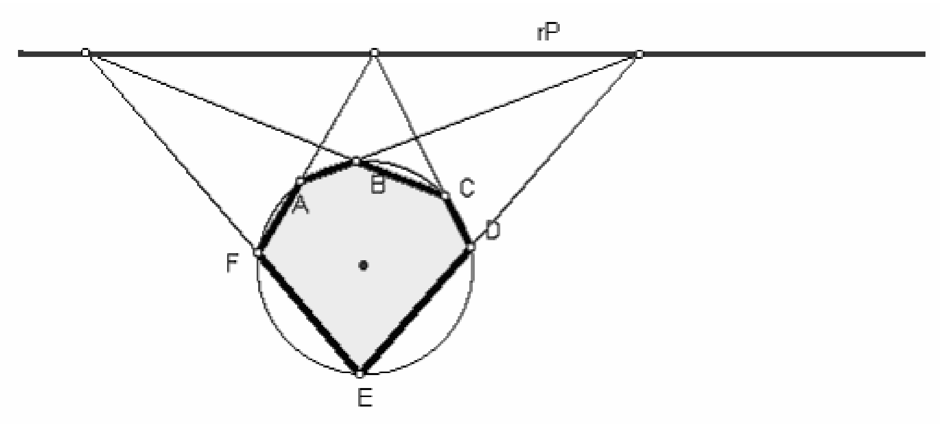
Su teorema expone una propiedad importante común a dos secciones de la misma proyección de un triángulo.

“*Si dos triángulos están en perspectiva desde un punto, y si sus pares de lados correspondientes se cortan, entonces los tres puntos de intersección están alineados*”.

¿Qué sucedería en caso de que los lados fueran paralelos?

Desargues se desentendió de tales casos invocando la convención matemática de que las líneas paralelas de cualquier serie tienen un punto en común, el cual está en el infinito, con lo cual se contesta a la pregunta, no contestándola.

Dentro de los problemas de Geometría Proyectiva, muy importante es el debido a **Blas Pascal** (1623-1662), contemporáneo de Desargues, quien afirma que si se prolongan los lados opuestos de cualquier hexágono inscripto en un círculo, los tres puntos en que se encuentran los pares de líneas alargadas, estarán situados en una línea recta.



Observamos una proyección de la figura implicada en el Teorema de Pascal y consideramos una sección de esta proyección. La proyección del círculo es un cono y en general una sección de este cono no será un círculo, sino una elipse, una hipérbola o una parábola, o sea, una de las curvas llamadas sección cónica.

Observamos que el hexágono en el círculo original, dará origen al hexágono inscripto en la sección cónica y las líneas que quedan de la primera figura pasarán a ser líneas de las nuevas figuras.

Los teoremas de Desargues y de Pascal muestran que hay propiedades importantes comunes a las secciones de cualquier proyección de una figura dada. Ellos dieron respuesta así, a las cuestiones surgidas por el trabajo de los pintores.

Los trabajos de Desargues no fueron apreciados por los matemáticos de su tiempo. Uno de sus alumnos Abraham Bosse, publicó un libro en 1648, “El método universal de Desargues para la práctica de la perspectiva” y en un apéndice del libro reprodujo el teorema de Desargues y otras conclusiones suyas. Este apéndice se perdió y no se volvió a descubrir hasta 1804.

El trabajo de Pascal sobre cónicas y su otro trabajo sobre Geometría Proyectiva, publicado en 1640, también permanecieron desconocidos hasta alrededor de 1800.

Felizmente un alumno de Desargues, Phillippe de la Hire, hizo una copia manuscrita del libro de Desargues. En el siglo XIX, este ejemplar fue encontrado por casualidad por el geómetra Michel Chasles en una librería, y por él el mundo conoció el principal trabajo de Desargues en toda su extensión. En el intervalo, los descubrimientos de Desargues y de Pascal fueron hechos independientemente por los geómetras del siglo XIX.

Otro motivo del alejanmiento de la Geometría Proyectiva, durante los siglos XVII y XVIII se debió a que la geometría analítica creada por los contemporáneos de Desargues, Descartes y Fermat, y el cálculo creado por Newton y Leibnitz, demostraron ser tan útiles a las ramas de las ciencias físicas, que los matemáticos se concentraron en estos temas. El estudio de la Geometría Proyectiva permaneció inmóvil durante casi doscientos años.

SIGLO XIX: RESTABLECIMIENTO DE LA GEOMETRÍA PURA

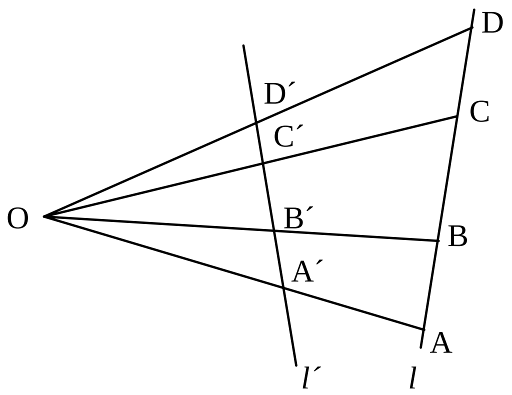
Después de un período de olvido de las aportaciones geométricas de Desargues, Pascal, Phillipe de la Hire y otros, debido a prioridades de la ciencia en pro de cálculos efectivos, el siglo XIX supone el resurgimiento de la geometría pura.

El problema de proyectar fortificaciones atrajo al francés **Gaspard Monge** (1746-1818), hábil geómetra inventor de la Geometría Descriptiva. Esta materia, aunque distinta de la Geometría Proyectiva, utiliza la proyección y sección. Monge se rodeó de alumnos brillantes en la Ëcole de Polytechnique, entre ellos Servois, Brianchon, Carnot y Poncelet. Intentaron evidenciar que los métodos puramente geométricos podían lograr tanto o más que los métodos algebraicos o analíticos introducidos por Descartes. Los primeros geómetras del siglo XIX tomaron como objetivo derrotar a Descartes.

Poncelet (1788-1867), resucitó la Geometría Proyectiva, entre 1813 y 1814 en una prisión rusa. Allí reconstruyó todo lo que había aprendido de Monge y Carnot y obtuvo nuevas conclusiones, determinando que esta materia era una rama de la Matemática.

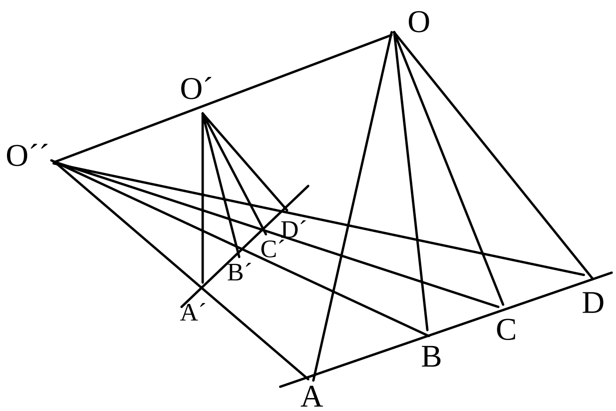
Uno de los principios que le sirvieron de base, fue un concepto ya visto en los griegos, no suficientemente valorado por ellos.

Consideremos una sección de la proyección de una recta dividida en cuatro puntos.



Evidentemente, los segmentos de la recta en la sección no son iguales en longitud a los de la recta original. Se podría quizás aventurar que la razón de dos segmentos, por ej., **A´C´/B´C´**, sería igual a la razón correspondiente **AC/BC**. Esta conjetura es errónea. Pero el hecho sorprendente es que la razón de las razones, o razón doble, es una invariante proyectiva, es decir, es la misma para cualquier sección de la proyección de **l** (la recta) desde un punto **O**.

Es necesario tener en cuenta solamente que las distancias implicadas deben ser distancias con sentido; es decir, si el sentido de **A** a **D** es positivo, entonces la distancia **AD** es positiva pero la distancia **DB** debe ser tomada como negativa.
El hecho de que cualquier recta, que corte las cuatro rectas **OA, OB, OC y OD,** contenga segmentos, indica que asignamos a las cuatro rectas de proyección que se encuentran en el punto **O** una razón doble especial, a saber la razón doble de los segmentos de cualquier sección. Además, la razón doble de las cuatro rectas es una invariante proyectiva; esto es, si se forma una proyección de estas cuatro rectas y una sección de esta proyección, la sección contendrá cuatro rectas concurrentes cuya razón doble es la misma que la de las cuatro primeras.



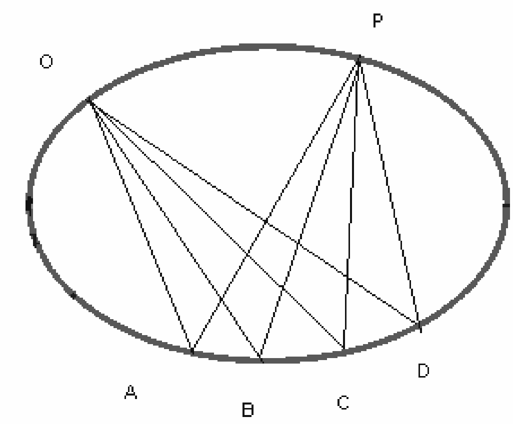
Aquí en la sección **OÁ´B´C´D´,** formada en la proyección de la figura **OABCD** desde el punto **O´´,** las cuatro líneas **O´A´, O´B´, O´C´** y **O´D´** tienen la misma razón opuesta que **OA, OB, OC** y **OD.**

La no variación proyectiva de la razón doble fue aprovechada extensamente por los geómetras del siglo XIX.

Observamos, en relación con el teorema de Pascal, que en la proyección y sección, un círculo puede convertirse en elipse, hipérbola o parábola, esto es, en una de las secciones cónicas. Ahora bien, el hecho de que las figuras se transformen no es sorprendente, puesto que la proyección y sección deforman la relación de distancia en una figura dada.

Pero resulta admirable que a pesar de la deformación, las cónicas en proyección y sección den objeto a otras cónicas. Los geómetras buscaron una propiedad común que explicara este hecho. Encontraron la respuesta en términos de razón doble.

Dado un punto **O** y cuatro puntos **A**, **B**, **C**, **D,** las rectas **OA, OB, OC,** y **OD** tienen una razón doble determinada como se observa en la figura.



Si **P** es cualquier otro punto de una sección cónica que contenga **O, A, B, C, D,** entonces un singular teorema de Geometría Proyectiva expone que las rectas **PA, PB, PC, PD,** tienen la misma razón doble que **OA, OB, OC** y **OD.**

Recíprocamente, si **P** es un punto tal que **PA, PB, PC** y **PD** tengan la misma sección doble que **OA, OB, OC** y **OD**, entonces **P** debe estar situado en la cónica que pasa por **O, A, B, C** y **D**. EL punto esencial de este teorema y su contrario es que una sección cónica se determina por la propiedad de la razón doble.

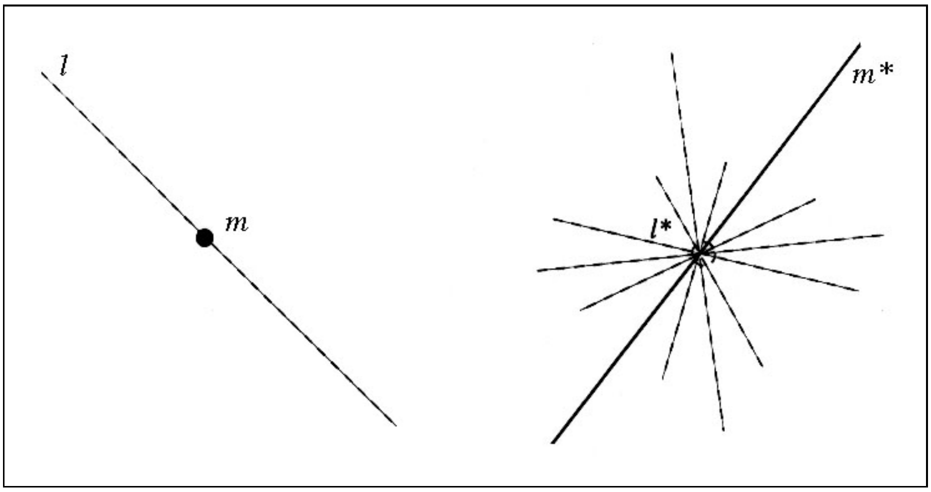
Esta nueva característica de la cónica fue muy bien acogida, no sólo porque se utilizó una propiedad proyectiva, sino también porque abrió una línea completamente nueva en la investigación de teoría de cónicas.

Los éxitos de la Geometría Proyectiva concluyeron con el descubrimiento del principio de **dualidad.** En Geometría Proyectiva así como en Geometría euclidea, *dos puntos cualesquiera determinan una recta*.

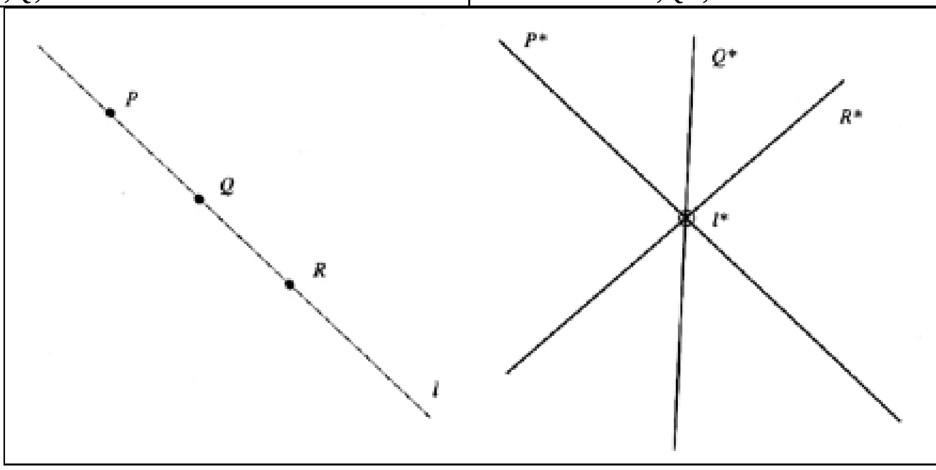
Pero es también verdad en Geometría Proyectiva que *dos rectas cualesquiera determinan o pasan por un punto.* Observamos que la segunda declaración se obtiene de la primera cambiando simplemente las palabras punto y recta.

Así que no sólo podemos hablar de un conjunto de puntos en una recta, sino que también de un conjunto de rectas en un punto. Además la figura dual de la que tenga cuatro puntos, de los cuales tres de ellos no están en la misma recta, es una figura de cuatro rectas de las cuales tres no pasan por el mismo punto.

El punto *m* está en la recta *l*, en el plano proyectiv	La recta *m** dual del punto *m* contiene al punto *l** dual de la recta *l*, en el plano proyectivo dual *P**

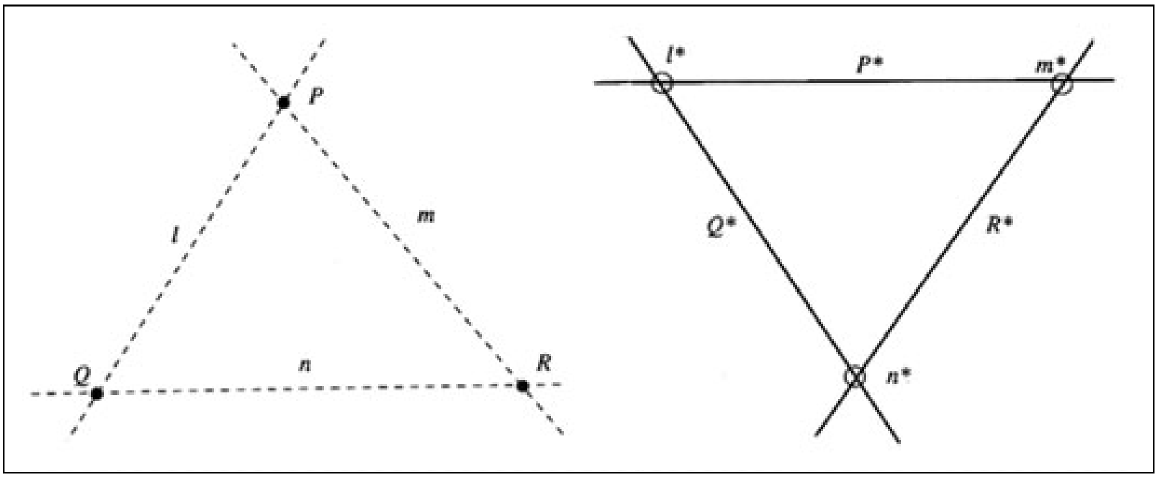


Los puntos *P*,*Q*,*R* están alineados	Las rectas *P**,*Q**,*R** son concurrentes



Si lo probamos con una figura, por ejemplo un triángulo, éste consta de tres puntos, no todos en la misma recta y de las líneas que juntan a estos puntos. El dual se leerá: tres rectas no todas en un mismo punto y los puntos uniéndolas, es decir, los puntos en que las rectas se cortan. La figura que obtenemos dualizando la definición de triángulo es otro triángulo.

Los puntos *P*,*Q*,*R* están en posición general	Las rectas *P**,*Q**,*R** están en posición general



Si repetimos el teorema de Desargues en términos duales, sirviéndonos del dato de que el dual de un triángulo es otro triángulo y suponiendo en este caso que los dos triángulos y el punto **O** están en un plano.

Teorema de Desargues	**Dual del Teorema de Desargues**
Si tenemos dos triángulos tales que las rectas que unen los vértices correspondientes pasan por un punto **O,** entonces los pares de lados correspondiendo a los dos triángulos se unen en tres puntos que están situados en una línea recta.	Si tenemos dos triángulos tales que los puntos que son unión de los lados correspondientes están en una recta **O**, entonces los pares de vértices correspondiendo a los dos triángulos están unidos por tres rectas que pasan por un punto.

Vemos que el teorema dual es realmente el recíproco del teorema de Desargues, es decir, es el resultado de intercambiar su hipótesis y su conclusión. O sea, intercambiando punto y recta, hemos llegado al enunciado de un nuevo teorema. Pero la Geometría Proyectiva trata también de curvas.

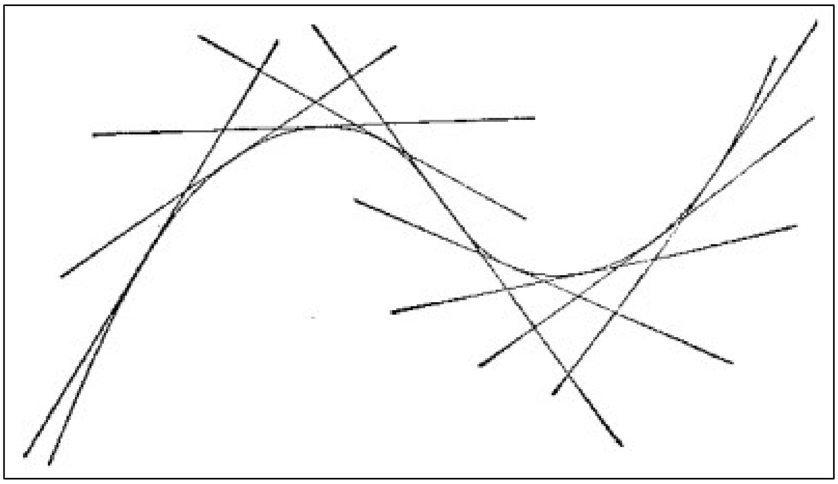
Sabemos que una curva no es más que una colección de *puntos* satisfaciendo una condición.

El principio de dualidad sugiere entonces que la figura dual de una curva dada, podría ser una colección de *rectas* satisfaciendo la condición dual de la que define la curva dada.

En conclusión, una curva consiste en una colección de rectas y tal colección sugiere una curva, del mismo modo que la sugiere un conjunto de puntos.

En el caso de las secciones cónicas, la figura dual de una cónica considerada como una colección de puntos, resulta ser la colección de tangentes a aquella cónica de puntos.

El principio de dualidad en Geometría Proyectiva expone que podemos intercambiar punto y recta en un teorema sobre figuras que estén en un plano y obtener un enunciado con sentido. Además el enunciado nuevo o dual será por sí mismo un teorema, es decir, puede demostrarse.



Es posible probar que cada *inversión* de un teorema de Geometría Proyectiva de acuerdo con el principio de dualidad, debe conducir a un teorema. Este principio es una característica relevante de la Geometría Proyectiva. Mientras que el descubrimiento de este principio, así como el de los teoremas de Desargues y de Pascal, requieren imaginación y genio, el descubrimiento de nuevos teoremas, por medio de este principio, es un procedimiento casi mecánico.

Los geómetras posteriores se dividieron en dos grupos: aquéllos que, como Poncelet, querían razonar exclusivamente en términos geométricos “geómetras sintéticos”, y aquéllos que preferían emplear el Algebra como herramienta “geómetras algebraicos”.

Al primer grupo pertenecen, entre otros, Karl Georg Christian von Staudt (1798-1867) en Alemania, Jacob Steiner (1796-1863), un suizo que enseñó la mayor parte de su vida en Berlín, Michel Chasles (1793-1880) en Francia, Arthur Cayley (1821-1895) en Inglaterra y Luigi Cremona (1830-1903) en Italia.

Al segundo pertenecen August Ferdinand Möbius (1790-1868) y Julius Plücker (1801-1868).

La geometría sintética encontró problemas, y tuvo que dejar paso a otros enfoques a finales del siglo XIX. En lo que se refiere a la tendencia algebraica, a Möbius se debe la introducción de las coordenadas homogéneas, y Plücker, cuyo punto de vista fue más lejos, definió incluso las coordenadas de rectas, para ver éstas como puntos de otro espacio. Plücker también formalizó algebraicamente los principios de dualidad de Poncelet y Gergonne. Las disputas entre las dos corrientes fueron duras y cada lado acusaba al otro de mezclar conceptos métricos y proyectivos. Esta controversia supuso por ejemplo que Plücker tuviese que abandonar su puesto en la Universidad de Berlín debido a los ataques de los discípulos de Steiner.

Según iba avanzando el siglo XIX fueron cobrando fuerza las técnicas algebraicas y analíticas, así como las de Felix Klein (1849-1925) sobre grupos de transformaciones, que permitieron situar a la Geometría Proyectiva en un papel más central; a esto también contribuyó sin duda la fundamentación de esta disciplina llevada a cabo por von Staudt.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Müller, W., Vogel G. (1996). *Atlas de Arquitectura, 1.* Madrid: Alianza.

Müller, W., Vogel G. (1996). *Atlas de Arquitectura, 2.* Madrid: Alianza.

Conti, F. (1993). *Cómo reconocer el arte del Renacimiento.* Barcelona: EDUNSA.

Santaló, L. (1993). *La Geometría en la formación de Profesores.* Buenos Aires: Red Olímpica.

Crespo Crespo, C., Guasco, M. y otros (1996). *Geometría: su enseñanza*. Buenos Aires: Prociencia.

Crespo Crespo, C.; Ponteville, Ch. (1995). *Geometría: Los problemas a lo largo de la historia*. Memorias de la IX Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa Vol.1, (pp 383-387). La Habana (Cuba).

Santaló, L. (1961). *Geometrías no Euclidianas*. EUDEBA.

Di Lorenzo, E. O. (1962). *Geometría Descriptiva*. Buenos Aires: C.E.I.

Di Lorenzo, E. O. (1962). *Geometría Proyectiva*. Buenos Aires: C.E.I