TRATAMIENTO DIDÁCTICO DE CONTENIDOS DE MATEMÁTICA DISCRETA Y ÁLGEBRA PARA FAVORECER LA COMPRENSIÓN

Malva Alberto; Yanina Fumero
Facultad Regional Santa Fe – UTN
Santa Fe (Argentina)
mtoso@frsf.utn.edu.ar ; yfumero@frsf.utn.edu.ar

La "enseñanza para la comprensión" (David Perkins, 1995) propone y recomienda atender a todos los aspectos que faciliten el desarrollo y enriquecen el aprendizaje de los alumnos. El autor señala que una enseñanza para la comprensión requiere tanto una buena selección de temas generadores como el uso de imágenes, la síntesis, la resolución de problemas, la integración y adecuación de los contenidos y un abundante y rico juego de extrapolaciones y conexiones.

Basándonos en este marco teórico, mostraremos una propuesta de integración de contenidos propios de la matemática discreta, como son las relaciones de recurrencia, con el álgebra matricial, atendiendo inicialmente a los conocimientos previos y manipulativos usados habitualmente en el desarrollo del tema.

RELACIONES DE RECURRENCIA

Una *sucesión* es una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos y cuyo conjunto de llegada es R. Una sucesión cuyo conjunto de llegada es Z se llama una *sucesión entera*.

Representamos la sucesión S: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ como una lista de las respectivas imágenes de los enteros 1, 2, 3, ..., n, ...

Ocasionalmente se puede extender el dominio de la sucesión e incluir el cero. En estos casos a_0 será el primer elemento de la sucesión.

Si observamos la sucesión de enteros $b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$ donde $b_n = 2n$ para todo $n \in N_0$, tenemos que $b_0 = 0$, $b_1 = 2$, $b_2 = 4$. Si necesitamos determinar el valor de b_6 simplemente calculamos $2 . 6 = 12$, sin necesidad de calcular el valor de b_n para cualquier otro $n \in N_0$.

Podemos realizar estos cálculos ya que tenemos una fórmula explícita para b_n, es decir, $b_n = 2n$, que nos dice cómo determinar b_n conociendo n.

Sucesiones muy comunes son:

S_1: 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

S_2: 1, 3, 5, 7, 9, 11, ...

S_3: 1, 4, 9, 16, 25, 36, ...

En estas tres sucesiones no es difícil conseguir el término enésimo.

Sin embargo, existen muchas situaciones donde la fórmula para hallar el enésimo término suele ser muy difícil de encontrar y a veces imposible.

La sucesión:

$$S_4: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ...$$

no tiene una fórmula para el enésimo término. (¿Por qué? ¿A qué sucesión estamos haciendo referencia?)

Si examinamos la sucesión:

$$S: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...$$

que designaremos como $f_1, f_2, f_3, ... f_n, ...$ donde

$$f_1 = 1,\ f_2 = 1,\ \ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}\ \forall\ n \in N \text{ y } n \geq 3.$$

Observemos que no tenemos una fórmula explícita que defina cada f_n en términos de n, $\forall\ n \in N$. Si queremos conocer el valor de f_6 necesitamos los valores de f_5 y f_4. Y estos valores requieren que necesitemos conocer también los valores de f_3 y f_2 y así sucesivamente. En general para conocer f_n necesitamos los términos anteriores.

De esta manera se establece una dependencia entre los elementos de una sucesión

$$S: a_0, a_1, a_2, ... , a_n , ...$$

de tal manera que cada a_n se pueda escribir en función de algunos de los términos anteriores

$$a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1, a_0.$$

Cuando hacemos esto, decimos que el concepto está dado en forma recursiva, usando el método o *proceso de recursión*.

Los conceptos introducidos merecen las siguientes definiciones formales:

Si en una sucesión S: $a_1, a_2, ..., a_n, ...$, el enésimo término a_n puede ser expresado como una función de los términos previos $a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1$, escribimos

$$a_n = F(a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1)$$

y la igualdad recibe el nombre de *relación de recurrencia*. Además, podemos decir que la sucesión S: a_1, a_2,.., a_n,.., *satisface* la relación de recurrencia.

La dependencia de a_n con a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1, puede significar tanto una dependencia con alguna entrada previa o con todos los términos anteriores.

Sea k el menor entero para el cual tenemos asignados valores para a_1, a_2, ..., a_k.

Luego $a_n = F(a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1)$ permite calcular únicos valores para a_n si n > k.

Los valores de a_1, a_2, ..., a_k, son llamados *condiciones iniciales o condiciones de frontera* de la relación de recurrencia. Decimos que la relación de recurrencia junto con las condiciones iniciales generan unívocamente a la sucesión S: a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...

Generalmente, la relación de recurrencia será dada como:

$a_n = F(a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1)$ para n > k, donde k es algún entero fijo. (1)

Las condiciones iniciales son valores asignados a a_1, a_2, ..., a_k. (2)

La sucesión S: a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... *satisface* la relación (1) con condiciones (2).

La expresión de una fórmula explícita para a_n que permita calcularlo para cada valor de n, sin necesidad de tener los términos previos, se denomina *solución general* de la relación $a_n = F(a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1)$ para n > k, donde k es algún entero fijo con condiciones iniciales a_1, a_2, ..., a_k.

Las *relaciones de recurrencia* se clasifican según su tipo: *lineales o no lineales, con coeficientes constantes o coeficientes variables, homogénea o no homogénea (inhomogénea)*; y según su orden.

Centraremos nuestro estudio sobre relaciones de recurrencia lineales, con coeficientes constantes, homogéneas y de orden “k”, k ≥ 1.

Una relación de recurrencia se dice que es una *relación lineal, homogénea, con coeficientes constantes de orden k*, donde k es un número natural fijo, si es de la forma

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + ... + c_k a_{n-k} = 0 \qquad \text{con} \quad n \geq k \qquad (3)$$

donde c_1, c_2,...., c_k, son números reales constantes, $c_k \neq 0$.

Para estas relaciones de recurrencia buscaremos una solución general del tipo $a_n = a_0 r^n$, con $a_0 \neq 0$ y $r \neq 0$.

Al sustituir la expresión anterior en (3) obtenemos

$$a_0 r^n + c_1 a_0 r^{n-1} + c_2 a_0 r^{n-2} + \ldots\ldots + c_k a_0 r^{n-k} = 0 , \text{ con } a_0 \neq 0 \text{ y } r \neq 0$$

Si extraemos el factor común $a_0 r^{n-k}$ la ecuación se convierte en

$$r^k + c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + \ldots\ldots + c_k = 0$$

que llamaremos *ecuación característica* de (3).

Dada una relación lineal homogénea de orden k, llamamos *polinomio característico asociado a* (3) *de grado k*, a la expresión:

$$p(x) = x^k + c_1 x^{k-1} + c_2 x^{k-2} + \ldots\ldots + c_k$$

siendo su *ecuación característica* $x^k + c_1 x^{k-1} + c_2 x^{k-2} + \ldots\ldots + c_k = 0$.

La terminología anterior permite unificar definiciones respecto de las relaciones de recurrencia. Las distintas formas de encontrar la solución general para las relaciones de recurrencia homogéneas serán tratadas de acuerdo a la bibliografía citada.

A continuación estudiaremos un método alternativo para resolver algunas relaciones de recurrencia homogéneas incorporando el álgebra de matrices, basándonos en una propuesta didáctica integradora. Nos proponemos mostrar que la Diagonalización de Matrices es importante para abordar la resolución de Relaciones de Recurrencia lineales y homogéneas.

Ejemplos propuestos:

Ejemplo 1:

En el libro de texto “Matemática Discreta” (Alberto, M. y otros, 2005) nos encontramos con el siguiente ejemplo (pág 204):

Vamos a encontrar la solución general para la sucesión definida por:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ \ a_n - a_{n-1} - 6\ a_{n-2} = 0 \ \text{ para } \quad n \geq 3.$$

Como la relación dada es lineal, homogénea, de orden dos, su ecuación característica es:

$$x^2 - x - 6 = 0$$

y las raíces son:

$$x_1 = 3 \text{ y } x_2 = -2.$$

Luego su solución general es de la forma $a_n = u\,3^n + v\,(-2)^n$.

Reemplazando a n por 1 y 2, planteamos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3u - 2v = 1 \\ 9u + 4v = 3 \end{cases}$$

cuya solución es $u = \frac{1}{3}$ y $v = 0$. Así, la solución general de la relación está dada por:

$$a_n = \frac{1}{3}3^n = 3^{\,n-1},\ n \geq 1.$$

Una propuesta alternativa para resolverla es escribiendo la relación de recurrencia como un sistema de ecuaciones lineales homogéneo de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} \\ a_{n-1} = a_{n-1} \end{cases}$$

que matricialmente corresponde a $X_n = AX_{n-1}$, $\forall\ n \in N$ y $n \geq 3$ con condición inicial $X_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$,

donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ es la matriz asociada al sistema, } X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} \text{ y } X_{n-1} = \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix}.$$

En $X_n = AX_{n-1}$, $\forall\ n \in N$ y $n \geq 3$ realizando una sustitución en reversa, obtenemos $X_n = A^{n-2}X_2$, $\forall\ n \in N$ y $n \geq 2$.

El polinomio característico de la matriz A es $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 6$ cuyas raíces son $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = -2$. Así cada uno de los valores propios de A, 3 y –2, es de multiplicidad algebraica uno.

Los subespacios propios asociados a estos autovalores están dados por:

$$E_3 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \quad \text{y} \quad E_{-2} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

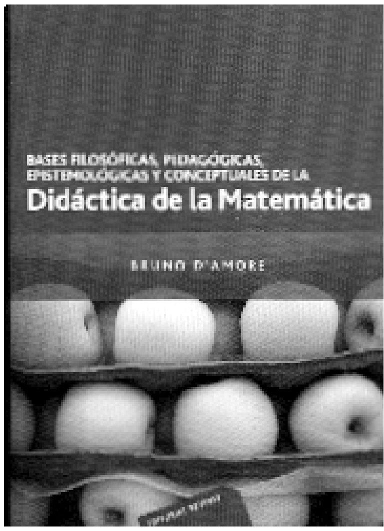
Los autovalores de la matriz A de tamaño 2x2 generan dos vectores linealmente independientes y por lo tanto A es diagonalizable, por lo que existe una matriz no singular P y una matriz diagonal D para las que $A = PDP^{-1}$.

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Las columnas de la matriz P se forman con los autovectores correspondientes a cada autovalor y los elementos diagonales de D son los autovalores.

Siendo $A = PDP^{-1}$, por aplicación de leyes asociativas $A^n = PD^nP^{-1}$ de donde $X_n = PD^{n-2}P^{-1}X_2$.

Así $X_n = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3^{n-2} & 0 \\ 0 & (-2)^{n-2} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.3^{n-2} \\ 3^{n-2} \end{pmatrix}$, de donde $a_n = 3^{n-1}$, $\forall\, n \in N$.



Ejemplo 2:

Encontremos la solución general de la sucesión:

$$a_1 = 3/2,\ a_2 = 3 \ \text{ y } a_n - 2\,a_{n-1} + a_{n-2} = 0 \quad \text{para} \quad n \geq 3.$$

La relación es lineal, homogénea, de orden dos, su ecuación característica está dada por:

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

y las raíces son iguales a 1 (raíz de multiplicidad 2).

Luego, la solución general en función de u y v es $a_n = u\,1^n + v\,n\,1^n$.

Calculamos las constantes u y v resolviendo el sistema de ecuaciones lineales de orden 2x2 dado por:

$$\begin{cases} u + v = 3/2 \\ u + 2v = 3 \end{cases},$$

cuya solución es $u = 0$ y $v = 3/2$.

Con los valores determinados para u y v escribimos la solución general de la relación:

$$a_n = \frac{3}{2}n \quad \text{con } n \geq 1.$$

Como mostramos en el ejemplo anterior, un método alternativo nos permite resolver esta relación empleando el álgebra de matrices.

Escribimos la relación de recurrencia como un sistema de ecuaciones lineales homogéneo de dos ecuaciones con dos incógnitas: $\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} \\ a_{n-1} = a_{n-1} \end{cases}$ que expresado matricialmente resulta $\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix}$, es decir $X_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X_{n-1}$, $\forall\ n \in N$ y $n \geq 3$, y $X_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3/2 \end{pmatrix}$ la condición inicial.

Así $X_n = AX_{n-1}$ y resolviendo esta recurrencia

$$X_n = A^{n-2}X_2,\ \forall\ n \in N \ \text{ y } n \geq 2$$

Calculamos los autovalores de A y obtenemos que su polinomio característico es:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$$

con raíz $\lambda = 1$ de multiplicidad algebraica 2.

El espacio característico E_1 está formado por los vectores $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, soluciones del sistema

$$(A - 1.I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo se tiene que $E_1 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. Así la multiplicidad geométrica del autovalor $\lambda = 1$ es 1 y menor que su multiplicidad algebraica, por lo que A no resulta diagonalizable. Por consiguiente recurrimos a la forma canónica de Jordan, donde $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ tiene un único bloque.

Para el cálculo de la matriz P debemos encontrar un vector generalizado para $\lambda = 1$, que se calcula resolviendo el sistema

$$(A - 1.I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De allí $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$.

Tomando t = 0, el vector generalizado es $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, la matriz $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Luego $A = PJP^{-1}$ de donde $A^{n-2} = PJ^{n-2}P^{-1}$ y $J^{n-2} = \begin{pmatrix} 1^{n-2} & (n-2)1^{n-3} \\ 0 & 1^{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n-2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Así $X_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & n-2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3/2)n \\ (3/2)(n-1) \end{pmatrix}$, de donde $a_n = \frac{3}{2} n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 3:

Encontremos la solución general de la relación de recurrencia:

$$a_n - a_{n-1} - 3a_{n-2} + 5a_{n-3} - 2a_{n-4} = 0$$

con $n \geq 4$ y condiciones iniciales $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = -1$, con esta nueva propuesta.

Planteamos un sistema de ecuaciones lineales homogéneo de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 3a_{n-2} - 5a_{n-3} + 2a_{n-4} \\ a_{n-1} = a_{n-1} \\ a_{n-2} = \qquad a_{n-2} \\ a_{n-3} = \qquad\qquad a_{n-3} \end{cases}$$

que expresado matricialmente resulta $\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ a_{n-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ a_{n-3} \\ a_{n-4} \end{pmatrix}$, es decir $X_n = AX_{n-1}$,

$\forall\, n \in \mathbb{N}$ y $n \geq 4$, con condición inicial $X_3 = (-1 \;\; 3 \;\; 1 \;\; 1)^t$.

Así $X_n = AX_{n-1} = A^{n-3}X_3$. Para calcular las potencias de A estudiamos su diagonalización.

La ecuación característica es $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & -5 & 2 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - \lambda^3 - 3\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0.$

Resolviendo obtenemos los valores propios $\lambda_1 = 1$ de multiplicidad algebraica 3 y $\lambda_2 = -2$ de multiplicidad algebraica 1.

Los espacios característicos son $E_1 = \text{gen}\{(1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1)^t\}$ y $E_{-2} = \text{gen}\{(-8 \;\; 4 \;\; -2 \;\; 1)^t\}$, ambos de dimensión 1. Luego la matriz A no es diagonalizable y por lo tanto utilizaremos su forma canónica de Jordan, la cual posee dos bloques.

Para calcular la matriz P debemos encontrar dos vectores generalizados para $\lambda_1 = 1$.

Planteamos el sistema

$$(A - \lambda_1.I).\ (x \;\; y \;\; z \;\; w)^t = (1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1)^t.$$

De allí obtenemos la solución $(x \;\; y \;\; z \;\; w)^t = (3 \;\; 2 \;\; 1 \;\; 0)^t + (s \;\; s \;\; s \;\; s)^t, \quad \forall\, s \in R.$

Tomando s = 0, el primer vector generalizado es $\vec{v}_1 = (3 \;\; 2 \;\; 1 \;\; 0)^t$.

Buscamos un segundo vector generalizado planteando $(A - \lambda_1.I).\ \vec{v}_2 = \vec{v}_1$.

De allí obtenemos la solución $(x \;\; y \;\; z \;\; w)^t = (3 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0)^t + (s \;\; s \;\; s \;\; s)^t, \;\; \forall\, s \in R$. Tomando s = 0, el segundo vector generalizado es $\vec{v}_2 = (3 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0)^t$.

La matriz $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & -8 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y la forma canónica de Jordan de A es $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Luego $A = PJP^{-1}$ de donde $A^{n-3} = PJ^{n-3}P^{-1}$ y $J^{n-3} = \begin{pmatrix} 1 & n-3 & \dfrac{(n-3)(n-4)}{2} & 0 \\ 0 & 1 & n-3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-2)^{n-3} \end{pmatrix}$.

Así $X_n = A^{n-3}X_3 = PJ^{n-3}P^{-1}X_3$, de donde obtenemos de su primer renglón que

$$a_n = \frac{8}{27}(-2)^n - \frac{1}{3}n^2 + \frac{11}{9}n + \frac{19}{27}, \quad \forall\ n \in N_0.$$

Este último ejemplo muestra que para casos de relaciones de recurrencia de órdenes superiores, el cálculo de las potencias de la matriz no resulta agobiante dado que se trabaja con formas de Jordan y que pueden ser calculadas utilizando elementos mediadores aportados desde la tecnología (Sistemas Algebraicos de Cómputos)

La integración de los contenidos desarrollados en cátedras paralelas a través de adecuados diseños de intervenciones y actividades, medios y recursos, desde el inicio mismo de la vida universitaria brinda una oportunidad para que los alumnos potencien sus capacidades académicas y el aprendizaje se transforme de tedioso y aburrido hacia el logro de un pensamiento generador.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alberto, M., Fumero, Y. (2004). *Integración entre Relaciones de Recurrencia y Funciones Generatrices*, en la Revista Premisa, Año 6, Nº 22, pág 23 a 35.

Alberto, M; Schwer, I.; Cámara, V.; Fumero, Y. (2005). *Matemática Discreta. Con aplicaciones a las ciencias de la Programación y de la Computación*. Santa Fe: Centro de Publicaciones de la U.N.L.

Albertson, M.; Hutchinson, J. (1988). *Discrete mathematics with algorithms*. N.Y. John Wiley & Sons.

Blythe, T. (1999). *La enseñanza para la comprensión. Guía para el docente* Buenos Aires: Piadós.

Bogart, Kenneth (1996). *Matemáticas Discretas*. Editorial Limusa. México.

Grassmann, W. K.; Tremblay, J. P. (1998). *Matemática Discreta y Lógica*. Prentice Hall. Madrid

Grimaldi, R. (1997). *Matemática Discreta y Combinatoria. Una introducción con aplicaciones*. Tercera Edición. Adisson Wesley Iberoamericana. México.

Parcerisa, A. (1998): *Materiales curriculares. Cómo elaborarlos, seleccionarlos y usarlos*. Buenos Aires: Graó. Biblioteca de Aula. 105. Ministerio de Cultura y Educación de la Nación.

Perkins, D. (1995). *La escuela inteligente*. Barcelona: Gedisa Editorial.

Stone, M. (compiladora) (1999). *La enseñanza para la comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica.* Buenos Aires: Piadós.

Young, R. (1992) *Excursions in calculus. An interplay of the continuous and the discrete.* Mathematical Association of America. Washington, D.C.