DE QUE MODO EL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRIA CONTRIBUYE A LA FORMACION DEL PENSAMIENTO LÓGICO

Ruben Rodriguez Herrera
IUFM de Basse-Normandie, Université de Caen (Francia)
ruben.rodriguez@caen.iufm.fr

A partir de una serie de actividades, seleccionadas dentro de las que hemos propuesto en el libro "Du dessin perçu à la figure construite", Editions Ellipses, Paris, septiembre, 2005, presentaremos una progresión del aprendizaje de las operaciones y relaciones lógicas, en el periodo que va del final de la escuela primaria al final del secundario básico.

Les mostraremos cómo en cada actividad el alumno, al mismo tiempo que aprende las propiedades geométricas, aprende a utilizar las operaciones y relaciones lógicas usuales que le permiten descubrir y validar otras afirmaciones de la geometría. El objetivo más importante de la enseñanza de la matemática a ese nivel, es que nuestros alumnos integren el hecho que las propiedades, teoremas, formulas han sido creadas para anticipar un resultado, ya sea porque no tenemos un medio experimental directo de encontrarlo o bien, porque queremos confirmarlo dentro del modelo adecuado. Lo mismo ocurre con la lógica. Los alumnos deben integrar que: *las relaciones usuales de la lógica han sido creadas para anticipar, validar, descubrir propiedades, dentro de un universo determinado de conocimiento*. El alumno debe progresivamente ir construyendo la transitividad, la implicación, la negación, la reciprocación, la conjunción, la disyunción, la contraposición, y también el carácter necesario y suficiente de las propiedades. Un ejemplo: la transitividad del paralelismo, debe ser integrada de forma activa, anticipadora y no meramente percibida pasivamente por la observación de tres rectas paralelas, ya trazadas de antemano en la página del libro.

RESUMEN DEL TRABAJO

1. LA TRANSITIVIDAD

La relación de transitividad es la que los niños formalizan primero y la que les resulta más fácil de aplicar.

a) ***en el paralelismo***

En geometría al final del primario los alumnos deben conocer la propiedad:

> *"si una recta (d1) es paralela a una recta (d2) y a su vez la recta (d2) es paralela a una recta (d3) entonces, la recta (d3) es paralela a la recta (d1)".*

Para que la descubran les propongo la actividad siguiente:
1° fase:
Los alumnos en una hoja de formato A4 dispuesta en el sentido del largo, (los 29,7cm en "horizontal"), en donde ya esta trazada une representación de una recta (d1), (un poco oblicua), sobre el lado izquierdo de la hoja, deberán trazar una recta (d2), paralela a (d1), a 10cm de (d1).
En esta fase los alumnos ya deben saber como trazar une recta paralela a otra recta dada y entonces practican este saber procedural.
2° fase:
Luego se les dice de plegar la hoja A4 de manera que se vea de un lado la recta (d2) solamente, y atrás escondida la recta (d1). Se les dice entonces de trazar una recta (d3) paralela a (d2) a 12cm de distancia, (aquí de nuevo practican el trazado de una paralela).
Se les pregunta: ¿cómo serán las rectas (d1) y (d3) cuando desplegemos la hoja?
3° fase:
Aquí los alumnos deben argumentar sin desplegar la hoja. Es así que ellos concluyen diciendo que las rectas (d1) y (d3) serán paralelas.
Algunos alumnos argumentan que la distancia entre las dos rectas paralelas deberá ser de 22cm porque como entre (d1) y (d2) hay 10cm y entre (d2) y (d3) hay 12cm entonces la distancia entre (d1) y (d3) será de 12+10 = 22 (en cm).
4° fase:
Se les dice de desplegar la hoja y verificar sus afirmaciones con la escuadra para medir bien la distancia entre dos paralelas.
5° fase:
Se les pregunta si se puede completar la frase:

> *"si una recta (d1) es paralela a una recta (d2) y si una recta (d2) es paralela a una recta (d3) entonces..."*

Se llega en esta quinta fase a la propiedad geométrica.
<u>Comentario didáctico</u>
En la casi totalidad de los manuales vemos presentar esta propiedad ya escrita e ilustrada con un dibujo en donde están las tres rectas visibles. Nosotros optamos siempre por darle a las propiedades su característica anticipadora.
Los alumnos afirman que (d1) y (d3) serán obligatoriamente paralelas y ello argumentado por el razonamiento de la suma de "distancias entre las rectas", 10+12 (en cm). Esto es luego verificado experimentalmente por el procedimiento con la escuadra. En la verificación con los instrumentos de geometria se les propone de poner la regla con el borde junto a la recta (d3) y de deslizar la escuadra a lo largo de la regla para verificar que los puntos de (d1) están siempre sobre la rayita del 22 del borde de la escuadra. Este aspecto cinemático les refuerza la noción de "distancia entre dos paralelas".

b) en la igualdad o en el orden de magnitudes
Uno de los campos de conocimiento en donde los alumnos aprenden la transitividad, desde muy temprana edad, es el de las magnitudes y sus medidas. Por ejemplo la longitud, la amplitud angular, el área de una superficie plana, el volumen, la masa,…, y también desde pequeños en la cardinalidad y la ordinalidad de los conjuntos de objetos.

También aquí se deberá ejercer el carácter anticipador de la transitividad. Por ejemplo en la noción de área les presento una actividad en las cual se proponen distintas figuras poligonales recortadas en papel cartón; formadas todas a partir de triángulos equiláteros. Sea a partir de un solo triángulo, de dos, tres, cuatro, cinco, seis,…colocados haciendo coincidir dos lados afín de formar figuras poligonales.

1° fase:
Los alumnos de la primaria, reconocen las características geométricas de estas figuras y las enuncian verbalmente. De este modo utilizan su vocabulario geométrico.
2° fase:
Se seleccionan tres alumnos y se elige una figura junto con ellos, sin mostrarla a los otros. Luego se le pide a uno de los tres que vaya con su figura hasta el lugar de un segundo alumno para comparar sus figuras y ver cual es "mas grande", (esto se anota en el pizarrón). Se le dice al segundo alumno que vaya a ver al tercero y que comparen sus figuras, (también se anota en el pizarrón). El hecho que el docente elija las figuras es importante ya que lo hará de manera a poner en fácilmente en evidencia, por perceptiva visual, las comparaciones. y a su vez la transitividad. Por ejemplo puede elegir un triángulo para el primer alumno, un paralelogramo para el segundo y un hexágono para el tercero.
3° fase:
Se interroga a la clase si se puede mirando las anotaciones del pizarrón, saber cual es la figura mas grande y la mas pequeña. Aquí los alumnos argumentan utilizando la transitividad: si la primera es más chica que la segunda y la segunda más chica que la tercera es entonces la tercera que es la más grande y la primera la más chica.
4° fase:
Se procede a una verificación experimental de la conclusión con la observación directa de las figuras.
5° fase:
Se recomienza con otros tres alumnos; pero esta vez el docente elige la primera más chica que la segunda y la segunda más grande que la tercera. Aquí los alumnos argumentan que la más grande es la segunda, pero que no se puede saber cuál es la más chica., sin comparar directamente. Se hacen aquí dos experiencias seguidas; una en la que se constata que es la tercera la más chica y otra diferente en la cual es la primera, la más chica. Se concluye que no se puede saber, solo con las informaciones del pizarrón, cual es la más chica.
6° fase:
Se eligen otras tres figuras tales que se puede saber cuál es la más chica pero no cuál es la más grande.
Como ustedes ven con este material de polígonos se trabaja la transitividad y las propiedades del orden del área de estas superficies planas.
Se concluye con los alumnos que en el caso, en que la primera es mas chica que la segunda y la segunda mas chica que la tercera se puede saber, **sin necesidad de mirar**, cuál es la más grande y cual la más chica.
También en el caso en que la primera es más grande que la segunda y la segunda más grande que la tercera, se puede saber cuál es la más grande y cual la más chica. En los otros casos no podemos ordenar las áreas antes de mirar las figuras.

Comentario didáctico:
Este trabajo con la noción de área de las figuras planas permite de reafirmar las propiedades de la transitividad en el orden o en la igualdad, lo que los prepara para comprender el área como una magnitud medible de la superficie.

2 LA IMPLICACIÓN, EL "SI…ENTONCES" Y TAMBIÉN LAS FORMAS RECÍPROCAS, CONTRAPUESTAS.

a) en las perpendiculares a una misma recta
También aquí, desde temprana edad se debe poner en evidencia a nuestros alumnos que, la utilidad de la implicación consiste, en su poder anticipativo. Es así que les presentaré una actividad en donde los alumnos anticipan el resultado gracias a una implicación. El valor del "si…entonces" resulta de este modo, operacional. para ello trabajamos como en el ejemplo de las paralelas.

1° fase:
Se les da a los alumnos una hoja A4 en la cual hay una representación de una recta (d), dibujada en forma un poco oblicua. y se les pide que tracen sobre el lado izquierdo de la hoja una recta (p1) perpendicular a (d).
2° fase:
Se les pide que plieguen la hoja para no ver la recta (p1) y que tracen en la otra parte une recta (p2) perpendicular a (d) también.
3° fase:
Se les pide si se puede saber algo acerca de las rectas (p1) y (p2) sin desplegar la hoja. Aquí los alumnos argumentan que las rectas (p1) y (p2) serán paralelas.
4° fase:
Se les dice de desplegar la hoja y de verificar el paralelismo. Ellos lo hacen con ayuda de la escuadra, como lo hicieron en el caso de las tres paralelas.
5° fase:
Se les pide de argumentar verbalmente lo que a ocurrido y se les dice de completar la frase:

> *"si dos rectas del mismo plano son perpendiculares a una tercera recta entonces esas dos rectas…."*

Comentario didáctico:
De nuevo insistimos que el hecho de que los alumnos no estén frente a la figura terminada desde el principio, (como en la gran mayoría de los libros de estudio), les permite utilizar el carácter anticipativo del "si…entonces". Es así que debería utilizarse siempre la implicación de un punto de vista didáctico en las edades tempranas, cuando se está aprendiendo su valor anticipativo. Luego cuando el "si…entonces" de la implicación está bien asimilado, por ejemplo, para los alumnos del final del secundario, se le utiliza ya, como un medio de información, creador de conocimientos matemáticos. En esas edades los estudiantes ya han trabajado las operaciones lógicas usuales.

b) en las paralelas y una secante
En el año escolar siguiente se deben estudiar las propiedades de las paralelas y una secante común.

Una actividad posible puede ser la siguiente:

Primer día propiedad directa
1° fase:
Se parte del trazado de rectas perpendiculares a una misma del plano de la hoja, afín de recordar la propiedad:

> *"si trazamos, en un mismo plano, rectas perpendiculares a una misma recta dada de ese plano, entonces esas rectas serán paralelas entre ellas".*

2° fase:
Se da a los alumnos una hoja A4 en la cual está trazada una recta (d) Se les pide que con la regla apoyada con el borde coincidiendo con la recta (d), se ponga la escuadra con el borde de su hipotenusa junto al de la regla y así se traza con uno de sus ángulos agudos una secante a (d). Luego se les pide de deslizar la escuadra sobre la regla para ir trazando algunas otras secantes siempre formando el mismo ángulo agudo con la recta (d).
3° fase:
Se les pide de observar todas esas secantes y de extraer una conclusión. Es así que los alumnos dicen que todas esas secantes son paralelas entre ellas. Se les pide de trazar una recta (a) y de hacer lo mismo que precedentemente con un ángulo arbitrariamente recortado en papel cartón, que se deslizara sobre la regla. Los alumnos dicen que aquí también se constata que todas las secantes son paralelas.
4° fase:
Se solicita que se escriba una conclusión. Es así que se llega a:

> *"si trazamos rectas en un mismo plano que forman un mismo ángulo con un recta dada de ese plano entonces todas esas rectas serán paralelas entre ellas"*

5° fase:
Como los alumnos del segundo año del secundario básico han ya, aprendido que: en geometría para probar una propiedad no hay que basarse exclusivamente en una constatación experimental, sino que tenemos que partir de los datos iniciales y gracias a propiedades ya conocidas, utilizadas convenientemente dentro de un razonamiento, llegar a deducir la conclusión. Se demuestra a partir de la propiedad ya conocida por los alumnos: *"la suma del los ángulos de un triángulo es un ángulo llano"* que las secantes que forman el mismo ángulo con la recta tienen que ser paralelas, de lo contrario obtendríamos un triángulo tal que la suma de sus ángulos seria superior a un ángulo llano, lo que es absurdo y entonces los dos ángulos no podrían ser iguales.
<u>Comentario didáctico:</u>
En esta demostración estamos utilizando implícitamente distintas propiedades de la lógica y de la geometría: "en *un mismo plano o bien dos rectas son secantes o bien son paralelas*".

Para demostrar que la implicacion p=>q es verdadera, utilizamos que esto es lógicamente equivalente a demostrar que noq=>nop es verdadera. Aquí "p" es: "los ángulos de dos secantes con la recta dada son iguales" y "q" es:"esas dos secantes son paralelas"; "noq" es: "las dos rectas no son paralelas es decir que forman un triangulo" y "nop" es: los ángulos no son iguales".
Esta formalización de la equivalencia entre una implicación y la contrapuesta de esa implicación traduce una de las formas frecuentes de demostración en matemática.
Es bueno entonces que los alumnos comiencen a utilizar esta forma desde el segundo año del básico, en casos simples en donde la contradicción entre "p",(verdadero por construcción, ya que los ángulos los han trazado expresamente iguales), y "nop", (verdadero si se parte de "noq" supuestamente verdadero) es encontrada con un solo paso de demostración.

Segundo día: propiedad recíproca y luego las contraposiciones respectivas.
1° fase:
Se les pide a los alumnos que tracen dos rectas paralelas, (d1) y (d2), con la ayuda de la escuadra, de la regla y de un deslizamiento de la escuadra sobre la regla. Este es un saber procedural. Se les solicita que argumenten con el saber declarativo respectivo, es decir que:

> *"como las dos rectas son perpendiculares a una misma representada por el borde de la regla, ellas serán paralelas".*

<u>Comentario didáctico:</u>
Aquí los alumnos no tienen necesidad de trazar efectivamente la recta auxiliar, es entonces coherente que en su argumentación no se la mencione explícitamente y se refieran solamente al borde de la regla. Esto es importante ya que un saber declarativo, es decir una propiedad geométrica debe siempre referirse a un caso concreto de construcción. De nada sirve una propiedad geométrica repetida verbalmente por los alumnos como un autómata, al contrario ella debe siempre ser instanciada por un discurso situado dentro del contexto relativo a la construcción.
Se pide a los alumnos que tracen otras paralelas a las dos paralelas precedentes.
2° fase:
Se les pide que con un papel de calco dibujen uno de los ángulos de una de las rectas paralelas con la secante común. Enseguida se constata que este ángulo es el mismo para todas las paralelas con la secante común.
3° fase:
Se pide de enunciar la propiedad, haciendo hincapié que al principio teníamos un conjunto de rectas paralelas, que luego se trazó una secante común y que finalmente se constató una igualdad de ángulos. Se llega a:

> *"Si tenemos un conjunto de rectas paralelas, entonces los ángulos que se forman cuando las cortamos por una secante común son todos iguales".*

4° fase:
Aquí también se razona con la contrapuesta, es decir se supone que los ángulos no fueran iguales y entonces en ese caso se demuestra fácilmente que se podría obtener un triángulo con las dos rectas y la secante dada. Eso contradice el hecho que inicialmente partimos de rectas paralelas.
5° fase:

Se hace aquí un resumen de las propiedades vistas. se llega a:

> *"si dos rectas cortan una secante común según ángulos iguales entonces esas rectas son paralelas"*

y a su vez:

> *"si dos rectas son paralelas entonces toda secante común forma con cada una de ellas ángulos iguales".*

6° fase:

Aquí se invita a reflexionar sobre la pregunta:

> *"si se sabe que dos rectas (a) y (b) de un mismo plano, no son paralelas se podría afirmar que los ángulos que forman con una secante (s) de ese plano no son iguales?"*

Aquí se utiliza la lógica para responder. Se llega a:

"los ángulos deben ser distintos, si no, si fueran iguales, las rectas deberían ser paralelas"

7° fase:

Se hace lo mismo con:

> *"si dos rectas (a) y (b) de un mismo plano forman ángulos distintos con una secante (s) de ese plano, entonces esas rectas (a) y (b) no son paralelas."*

El argumento es basado simplemente en la lógica, "si (a) y (b) fueran paralelas entonces los ángulos con (s) tendrían que ser iguales."

8° fase:

Como verificación de las dos últimas propiedades se propone:

1) trazar una recta (s) , una recta (a) que forma un ángulo de 60°,(el agudo),con (s), otra recta (b) que forma un ángulo distinto, por ejemplo de 30° y se verifica que (a) y (b) son secantes e inclusive se puede calcular el ángulo agudo de (a) y (b) de 90°;

2) trazar dos secantes (a) y (b) , luego una secante común (s) y de medir los ángulos agudos de (a) y (b) con (s) y constatar que son diferentes.

<u>Comentario didáctico:</u>

Es muy importante que las dos últimas propiedades sean deducidas por la lógica aplicada a las dos primeras propiedades. Es así que la verificación experimental refuerza la convicción en nuestros alumnos que el razonamiento es un potente útil para encontrar propiedades geométricas a partir de otras propiedades. Este mismo trabajo se hace en el tercer año del básico cuando los alumnos estudian el teorema de Pitágoras directo:

> *"si un triángulo ABC es rectángulo en A, entonces* $AB^2+AC^2 = BC^2$*",*

luego el recíproco:

> *"si en un triángulo MNP tenemos que* $MP^2+MN^2 = PN^2$ *, entonces el triángulo es rectángulo en M"*

y las contrapuestas

> *"si en un triángulo RST tenemos que* $ST^2+SR^2 \neq TR^2$ *entonces ese triángulo no es rectángulo en S";*

"si un triángulo JKL no es rectángulo en K entonces $JK^2+LK^2 \neq JL^2$ *".*

Se procurará de destacar bien que, en general cuando no se tienen las medidas de los lados como en el penúltimo caso, no podemos afirmar más que "el triángulo RST no es rectángulo en S", pero si sabemos además que TR es la mayor de las medidas entonces sí, podemos afirmar que el triángulo no es rectángulo en ningún vértice.

3 LA CONJUNCIÓN Y SU NEGACIÓN

En los cuadriláteros

El universo de los cuadriláteros es muy rico en la posibilidad de realizar operaciones lógicas. Un ejemplo con los alumnos del tercer año del básico:

1° fase:

Se pide de construir un paralelogramo que tenga las dos diagonales de misma longitud. Se comparan las figuras de los distintos alumnos y se llega a la conclusión de que:

> *"si un paralelogramo tiene las diagonales de misma longitud entonces es un rectángulo"*

2° fase:

Se propone de demostrar esta última afirmación Se utiliza el círculo circunscrito al paralelogramo y la propiedad del curso:

> *"si un ángulo está inscrito en un semicírculo, entonces es recto"*

3° fase:

Se pide de construir un paralelogramo que tenga las dos diagonales perpendiculares. se compran las producciones y se llega a la conclusión de que:

> *"si un paralelogramo tiene sus diagonales perpendiculares entonces es un rombo".*

4° fase:

Se propone de demostrar esta última afirmación. para ello se demuestra la igualdad de los cuatro triángulos rectángulos que se forman con las dos diagonales perpendiculares; esto prueba que los cuatro lados tienen la misma medida de longitud. Es decir que el paralelogramo es un rombo.

5° fase:

Se pide de reflexionar y de argumentar sobre un paralelogramo que tenga las dos diagonales perpendiculares y de igual longitud. Aquí los argumentos son basados en la pura lógica, (se aplica la conjunción). Se trata de un rombo rectángulo es decir de un cuadrado.

6° fase:

Se les pide que construyan un paralelogramo ABCD tal que AC = BD = 10 (en cm) y (AC) perpendicular a (BD); luego de realizar la construcción se verificará con la escuadra y con el compás que se trata bien de un cuadrado.

7° fase:

Se pide de trazar un paralelogramo que tenga las dos diagonales de igual longitud y no perpendiculares. Se llega a la conclusión de que es un rectángulo no cuadrado. Se pide de trazar un paralelogramo que tenga las diagonales perpendiculares pero de distinta longitud. Se llega a la

conclusión que es un rombo no rectángulo. Se concluye que cuando una sola de las condiciones es negada entonces la conclusión es que "no es un cuadrado".
8° fase:
Se pide de trazar un paralelogramo que no tenga ni las diagonales perpendiculares, ni de igual longitud. Se llega a la conclusión que es un paralelogramo no rectángulo, no rombo, evidentemente un cuadrado tampoco.
<u>Comentario didáctico:</u>
La geometría es muy propicia a obtener propiedades por conjunción ya que sus objetos están clasificados por subconjuntos de un mismo universo relativo.
Por ejemplo dentro del universo de los triángulos, un triángulo isósceles y rectángulo heredará las propiedades de estos dos tipos de triángulo. La estructura lógica es si (p1=>q1) y (p2=>q2), entonces ((p1 y p2) =>(q1 y q2)) La negación de una conjunción como operación lógica es un obstáculo para una gran parte de los alumnos. La respuesta de "no(A y B)" en lugar de ser "noA o no B" lógicamente correcta, es la incorrecta " noA y noB".
Es por ello que las actividades como la precedente son útiles para aprender correctamente, poco a poco, la negación de una conjunción.

4 LA DISJUNCIÓN

El caso del rectángulo no cuadrado
La casi totalidad de nuestros alumnos del final de la primaria dicen que:

"un rectángulo no es un cuadrado y que un cuadrado no es un rectángulo".

Ello es perfectamente explicable. Por un lado a esa edad el uso del la disyunción es siempre en el sentido exclusivo, es decir que el cuadrado no puede ser a la vez cuadrado y rectángulo. La clasificación lógica por inclusión de clases, y con reunión no obligatoriamente de dos subconjuntos de intersección vacía, contradice en parte el uso de la vida corriente, de la disyunción no inclusiva.
Por otro lado a un cuadrado nunca se le nombra "rectángulo-cuadrado", como tampoco se le nombra "paralelogramo-rombo-rectángulo-cuadrado". Es así que un trabajo sobre esta operación lógica es aconsejable en geometría a partir del tercer año del básico, ya que se trata de razonamientos bastante formales.

Un ejemplo:
1° fase:
Se les dice de razonar sin darles una figura sobre preguntas como:

"Se puede decir de que tipo de rectángulo ABCD se trata, si se sabe que AB=CD?".

Se llega a la conclusión que ABCD es un cuadrado.
2° fase:
Se les invita a demostrar que:

"Si ABCD es un rectángulo tal que AB=CD, entonces ABCD es un cuadrado"

.Aquí se utiliza que los lados opuestos de un rectángulo son de igual longitud, entonces los cuatro lados son de igual longitud. ABCD posee cuatro lados de igual longitud y cuatro ángulos rectos. ABCD es un cuadrado.

Comentario didáctico:

Aquí queda en evidencia que el rectángulo dado sin una figura representativa, en esas condiciones, es un cuadrado. Pero no debemos creer que una vez que la figura y la demostración fueron hechas, los estudiantes integrarán de una vez por todas que un cuadrado es un rectángulo particular.

3° fase:

Se parte de una definición de rectángulo: "cuadrilátero que tiene sus cuatro ángulos rectos" y de una definición de cuadrado: "cuadrilátero que tiene sus cuatro ángulos rectos y sus cuatro lados de igual longitud".

Se pregunta:

"Sabiendo que un cuadrilátero HJKL no es un rectángulo podría ser HJKL un cuadrado?"

Aquí el razonamiento es puramente verbal, es decir que la negación "HJKL no es rectángulo" se declina en "existe un ángulo por lo menos que no es recto " ; eso lleva a afirmar que HJKL no será un cuadrado y a concluir que para que un cuadrilátero sea un cuadrado tiene que comenzar por ser un rectángulo.

5 CONDICIONES NECESARIAS Y SUFICIENTES

También aquí dentro del universo de los cuadriláteros se pueden realizar actividades significativas. El nivel de razonamiento es el del tercer o cuarto año del básico.

Un ejemplo:

1° fase;

Se parte de la pregunta:

"se sabe que en un cuadrilátero ABCD tres de sus ángulos son rectos, se puede afirmar algo al respecto de ABCD?"

Los alumnos realizan una figura y concluyen que se trata de un rectángulo.

2° fase:

Se procede a la demostración que utiliza las propiedades del paralelismo y la perpendicularidad de las rectas de un plano.

"Dos rectas de un mismo plano perpendiculares a una misma recta de ese plano son paralelas";

"si dos rectas son paralelas entonces toda perpendicular a una de ellas, en el mismo plano, es perpendicular a la otra".

3° fase:

Se concluye utilizando "es suficiente" con la propiedad:

"es suficiente que un cuadrilátero tenga tres ángulos rectos para que sea un rectángulo".

4° fase:
Se pregunta:

"sea un cuadrilátero MNPQ donde se sabe que dos de sus ángulos son rectos, se puede afirmar que MNPQ será un rectángulo?"

Aquí los alumnos realizan figuras "contraejemplos" y concluyen que **no es suficiente** que un cuadrilátero posea dos ángulos rectos para afirmar que se trata de un rectángulo. Dicen que en cambio ello **es necesario**, si no de lo contrario, si no tiene por lo menos dos ángulos rectos entonces es seguro que no será un rectángulo.

<u>Comentario didáctico:</u>

El carácter necesario se lo utiliza mas a menudo para negar una afirmación es decir que si una propiedad necesaria no es verificada entonces se concluye negativamente.

Por ejemplo si en un triángulo se sabe que dos lados tienen distinta longitud entonces no será un triángulo equilátero, podría ser sin embargo isósceles. Una buena actividad para trabajar la lógica de las condiciones necesarias y suficientes en el último año del secundario, es la que consiste a encontrar poco a poco las condiciones para que un cuadrilátero ABCD sea inscriptible en un círculo. Los alumnos encuentran poco a poco una serie de condiciones necesarias y aumentando la lista de esas condiciones llegan a un conjunto de condiciones suficientes.

CONCLUSIÓN

El campo geométrico se presta mucho para aprender a utilizar las operaciones y relaciones de la lógica. También el campo numérico tiene sus temas que se prestan, por ejemplo, en la aritmética de los múltiplos y divisores. Es así que el alumno de once años comenzará por integrar el "si…entonces", la negación con la ayuda del contraejemplo adecuado, y poco a poco las otras operaciones lógicas; ello a lo largo del ciclo secundario básico. Al final del secundario se podrá, si todo ha ido bien, hacer razonamientos más formales dentro del universo lógico verbal, de modo que a veces, el estudiante valida sus conclusiones por operaciones lógicas, sin tener que hacer obligatoriamente una figura.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Rodriguez Herrera, R. (1976). *La Enseñanza de la matemática: fracciones-números racionales.*, Montevideo, Uruguay: CIEP.

Rodriguez Herrera, R. (1978). *La pédagogie des mathématiques est-elle moderne?.* Thèse en Sciences de l'Education, Caen.

Rodriguez Herrera, R. (fecha prevista de aparición, septiembre 2005). *Du dessin perçu à la figure construite.* Paris : Editions Ellipses.

Siegler, R. (2001). *Enfant et raisonnement.,* Ouvertures psychologiques, DeBoeck Université, Bruxelles.

Vergnaud, G. (1981). *L'enfant, la mathématique et la réalité.* Collection Exploration recherches en Sciences de l'Education. Berne: Ed. Peter Lang.