LA IMPORTANCIA DE LA ARGUMENTACIÓN MATEMÁTICA EN EL AULA

Cecilia R. Crespo Crespo
Instituto Superior del Profesorado "*Dr. Joaquín V. González*" - Universidad de Buenos Aires
Buenos Aires (Argentina)
ccrespo@sinectis.com.ar

RESUMEN

Este trabajo se plantea sobre la base del reconocimiento de las dificultades que presentan los alumnos tanto para comprender la necesidad de las demostraciones en la matemática, como para realizarlas.
El concepto de demostración es uno de los conceptos matemáticos centrales en la matemática y por lo tanto es indispensable su transmisión a los alumnos a partir de la escuela media. Sin embargo no siempre se realiza de manera satisfactoria. En él se presentan brevemente algunas concepciones que tienen los docentes de matemática y los estudiantes de profesorado de matemática en relación con la importancia de trabajar con argumentaciones y demostraciones en el aula de matemática.

LA DEMOSTRACIÓN EN EL AULA DE MATEMÁTICA

Muchas veces, en la tarea docente, hemos enfrentado la situación en la cual los alumnos no comprenden la necesidad de la demostración de propiedades en matemática. En ciertas oportunidades se contentan con una simple verificación, en otras "creen" la propiedad, pues les resulta evidente. Aún cuando puedan llegar a comprender que en ciertos momentos es necesario demostrar una propiedad, la dificultad de asumir la exigencia de las demostraciones en las ciencias formales se complica más aún cuando ellos son quienes realizan estas demostraciones. Las distintas formas del pensamiento lógico no siempre son logradas satisfactoriamente por los alumnos en la escuela.

La demostración en clase de matemática presenta una gran diversidad de formas, y aparece en los distintos niveles educativos a través de variados tipos de argumentaciones. El pensamiento deductivo se va construyendo lentamente a lo largo de las distintas etapas de la escuela. Esto no significa que se logre realmente su construcción de manera sólida. Es común encontrar alumnos universitarios que aún no han logrado dominar este contenido procedimental. (Ibañes y Ortega, 1997).

Los matemáticos, habituados a demostrar, consideran muchas veces que se trata de un procedimiento natural en el estudio de la matemática. Sin embargo, indudablemente se ponen de manifiesto serios obstáculos al adquirirlo: lo que para el matemático es natural y fácil, para la mayor parte de los estudiantes es algo difícil, artificial e incluso sin sentido, ya que muchas veces no manifiestan la necesidad de la demostración para aceptar una propiedad. Esto pone en evidencia concepciones distintas con respecto a la matemática.

INTUICIÓN Y LÓGICA EN MATEMÁTICA

El conocimiento matemático se sustenta en dos modos de comprensión y expresión: uno se realiza de forma directa, que corresponde a la intuición y el otro se lleva a cabo de forma reflexiva, es decir lógica. Estos modos de conocimiento, aunque de naturaleza distinta, son complementarios e indispensables en la matemática. El primero es creativo y subjetivo, mientras que el segundo es analítico y objetivo.

En la enseñanza de la matemática no se debe descartar ninguna forma de razonamiento: inductivo o deductivo. Obviamente, no se puede ni se debe pretender, sin embargo, que los alumnos se muevan dentro de un marco axiomático riguroso y formal. Esta forma de razonar requiere de una madurez que recién comienza a alcanzarse en los últimos años de la adolescencia y cuyo pleno manejo requiere de un desarrollo más profundo del pensamiento. Sin embargo, desde edades tempranas, es necesario que los niños aprendan a intuir, plantear hipótesis, hacer conjeturas, generalizar y cuando sea posible, ensayar pequeñas argumentaciones y demostraciones, aunque sin exigencia de formalización. A nivel de aprendizaje, la forma de razonar puede tener tanto interés como los propios contenidos conceptuales, porque el razonamiento es en sí mismo un gran contenido a aprender.

La intuición, entendida como la captación primera de conceptos que nos permite comprender lo que nos rodea, surge desde la niñez y constituye el punto de partida en la investigación y en el aprendizaje. Ante el planteo de un problema matemático, debe despertarse el interés, basado en la aceptación de la incertidumbre como parte del proceso de aprendizaje. La intuición, por momentos saltea escalones del razonamiento lógico. Es cierto que este método puede conducirnos por caminos falsos, por ello es necesario extremar el cuidado, pero debe aprovecharse la intuición para ayudar al aprendizaje. Debemos recordar que en los niveles elemental, básico y medio, no se están formando matemáticos, se está enseñando a usar la matemática y educando en la comprensión y el manejo del método de esta ciencia. Se está enseñando a pensar lógicamente. Hace falta educar a la intuición.

El concepto de demostración matemática no ha sido siempre el mismo, ha evolucionado notablemente a través de la historia. Esta idea es relativa y varía de una cultura a otra. La historia del desarrollo de la matemática es, en cierto modo, la historia de la relación entre los dos aspectos del conocimiento: intuición y lógica.

La mayoría de las ciencias parte de la inducción como método para enunciar sus proposiciones. El razonamiento inductivo se basa en la elaboración de conjeturas e hipótesis que partiendo de un conjunto de observaciones conducen a la generalización de propiedades. En la matemática, este método puede ser el punto de partida para la búsqueda de regularidades en un grupo de datos que pueden ser de naturaleza diversa (números, gráficas, formas geométricas, etc.) hacia la formulación de generalizaciones sobre la base de lo observado. Probar una propiedad requiere de la deducción que la independiza de la experiencia y la torna universal.

En relación a la lógica, es fundamental motivar a los alumnos en la capacidad para detectar inconsistencias en los razonamientos propios y ajenos, pues esta mirada crítica les permitirá poder avanzar hacia distintos niveles de pensamiento. El proceso deductivo a nivel de enseñanza plantea limitaciones y posibilidades, pues en él intervienen no sólo cierto dominio de los conocimientos como una cierta habilidad en el manejo de principios lógicos que requieren de madurez de pensamiento. En los primeros niveles de la enseñanza no tiene sentido plantear deducciones en el sentido riguroso de la palabra. Recién hacia los diez y seis años se va formando en el ser humano la capacidad de abstracción necesaria para comenzar a interiorizar el pensamiento formal. Para llegar a esto es imprescindible desde un principio desarrollar habilidades deductivas, teniendo en cuenta las limitaciones de cada caso.

DEMOSTRACIONES, PRUEBAS, VERIFICACIONES, ARGUMENTACIONES...

La palabra demostración es utiliza en distintos contextos con diversos sentidos y se la relaciona también con algunos términos que para algunos autores son sinónimos y para otros poseen diferencias fundamentales entre sí. Es necesario diferenciar claramente los significados de algunos términos relacionados con las demostraciones matemáticas. Como veremos no existen definiciones al respecto que sean aceptadas unánimemente y a veces tienen estos términos matices que los diferencian unos de otros, según los autores que se consulten.

Al abordar el concepto de demostración, es de gran utilidad conocer la significación que le otorga Nicolás Balacheff. Este autor (Balacheff, 1982) utiliza el término *explicación* como una idea primitiva de la cual derivan las de prueba y demostración. Para él, la explicación es un discurso que pretende hacer inteligible el carácter de verdad, adquirido para el locutor, de una proposición o de un resultado. Una *prueba*, se compone, por su parte, de explicaciones aceptadas por una comunidad dada en un momento dado. O sea que, para que una explicación sea una prueba debe ser reconocida por alguien como razón suficiente en el correspondiente marco discursivo.

Raymond Duval, por su parte, establece una distinción entre explicación y argumentación. En la *argumentación* se trata de mostrar el carácter de verdad de una proposición, mientras que en la *explicación* los enunciados tienen una intención descriptiva de un fenómeno, resultado o comportamiento (Duval, 1993).

Tanto Balacheff como Duval utilizan el término *demostración* con significados similares. Para ellos, una demostración es una secuencia de enunciados organizados según reglas determinadas. El concepto de demostración también está muy ligado al de verdad. Para Duval el objeto de una demostración es la verdad y, por lo tanto, obedece a criterios de validez, mientras que la argumentación se propone lograr la convicción del otro o de sí mismo, obedeciendo a criterios de pertinencia.

Otros autores (Godino, Recio, 2001) consideran que la idea de explicación de Balacheff puede asimilarse a la noción de *argumentación* de Duval. Utilizan el término *demostración* para referirse de modo genérico al objeto emergente del sistema de *prácticas argumentativas* (o argumentos) aceptadas en el seno de una comunidad, o por una persona, ante situaciones de validación y decisión, o sea situaciones que requieren justificar o validar el carácter de verdadero de un enunciado, su consistencia o la eficacia de una acción.

Otra visión de este tema es la que se realiza desde el punto de vista formalista. Bajo esta óptica, una demostración en una teoría matemática es una secuencia de proposiciones, cada una de las cuales o bien es un axioma, o bien una proposición que ha sido derivada de los axiomas iniciales por las reglas de inferencia de la teoría. De esta manera, un teorema es una proposición así derivada por una demostración. Esta concepción de las demostraciones, se basa en aspectos sintácticos, haciendo hincapié en la aplicación de reglas de inferencia precisas y a veces sin hacer uso de la intuición. Desde este punto de vista, la verdad se reduce a la coherencia dentro de un sistema axiomático.

OPINIONES DE LOS DOCENTES ANTE LAS DEMOSTRACIONES Y ARGUMENTACIONES LÓGICAS

Las demostraciones ocupan una posición central en la actividad matemática, ya que constituyen el método de validación de las afirmaciones de esta ciencia, en contraposición, por ejemplo de lo que ocurre en la física o en otras ciencias, en las que el método de verificación de las afirmaciones consiste en su contrastación con la realidad.

La demostración matemática es el proceso validativo que siguen los matemáticos para justificar las propiedades de sus teorías. Aunque existen otras opciones, el modelo actual dominante de demostración, dentro de la institución matemática, es la demostración lógico-formal.

Resulta interesante realizar un análisis de las concepciones que tienen los docentes de la noción de demostración tanto desde el punto de vista científico, como en relación con su puesta en práctica dentro de la enseñanza de la matemática. Estas concepciones evidencian cuál es la idea que subyace por debajo de la manera en la que imparten sus clases: según qué cree cada docente que es la matemática, así enfoca la preparación de su clase.

Dicho de otra manera: el docente de matemática enseña de acuerdo a las concepciones que tiene de esta disciplina. Así, si la demostración es considerada como una estructura rígida y no modificable que aparece en los libros, la enseñará como algo acabado y que debe ser memorizado por los alumnos. En cambio si considera que los alumnos pueden “hacer matemática”, la demostración como contenido matemático adquirirá un perfil de elemento dinámico y modificable desde el punto de vista didáctico pudiendo adaptarse a la situación escolar presentada. En este último caso, se realizarán continuamente argumentaciones matemáticas diversas, las que conducirán a que los alumnos se enfoquen en explicar, verificar, comunicar, sistematizar y descubrir. Estas son justamente las funciones que se suelen asociar al concepto de demostración (de Villiers, 1993). El modelo de de Villiers busca exponer algunas de las funciones de la demostración dentro de la actividad matemática científica y permite vislumbrar las posibilidades de modificar algunas prácticas vinculadas con la demostración en el aula evitando caer en la función formalista de verificación que se reconoce generalmente en la enseñanza de la matemática en las aulas.

En algunas investigaciones realizadas acerca de las concepciones de los docentes y los estudiantes del último año de la carrera de profesorado de matemática sobre las demostraciones (Crespo Crespo y Ponteville, 2004a y 2004b), se ponen de manifiesto que ciertas ideas aparecen desdibujados: no se distinguen claramente las diferencias entre la matemática, el saber matemático y el aprendizaje de la matemática en relación con las argumentaciones. Sin embargo, gran cantidad de docentes tiene claramente asumida la existencia de diferencias fundamentales entre otros saberes conceptuales específicos (geométricos, algebraicos, analíticos, etc.), pero no reconocen los distintos niveles existentes entre qué es demostrar, qué es saber demostrar y qué es aprender a demostrar. La no diferenciación de estos tipos de saberes, en particular entre el saber matemático en sí y el saber escolar relacionados con las argumentaciones, hacen que no se asuman las características que deben tener las argumentaciones matemáticas en la escuela y que a veces se confundan con la formalización. Esto ocasiona que en algunas clases de matemática se recurra a formalismos que en lugar de explicar y clarificar contribuyen a confundir, ya que el alumno por no poder manejar cómodamente la notación, recurre a la memorización.

Al respecto resulta sumamente descriptiva la afirmación de Luis Santaló:

> ...*"Si un alumno sabe repetir una demostración, pero no sabe repetirla si se cambian las letras o la posición del polígono, significa que ha aprendido la demostración de memoria y esto sí no tiene ningún valor. Mejor dicho: tiene un valor altamente negativo, pues significa que el alumno, no solamente ignora tal demostración, sino que desconoce totalmente lo que es la Matemática y que ha desperdiciado el uso de la memoria con un objetivo inútil y nada educativo"*...
>
> (Santaló, 1962)

Los docentes encuestados unen la idea de demostración a la utilizada desde el formalismo. Casi la mitad de los docentes con los que se trabajó en esta investigación, afirmó que no hace demostraciones en clase, utilizando como justificación la falta de interés de los alumnos, el trabajo con cursos numerosos, la falta de conocimientos previos de los alumnos, la excesiva extensión de los programas. Sin embargo, la mayoría de los que dieron esta respuesta utilizan argumentaciones lógicas en le aula y hacen que sus alumnos justifiquen lo que realizan, pero afirman que no se realizan las argumentaciones con el "rigor suficiente".

Por su parte, el grupo de alumnos que intervinieron en la investigación, en su mayoría afirmaron la necesidad de demostrar y de enseñar a demostrar en clase, si bien no saben especificar cuáles son los métodos que utilizarán con este fin. Afirmaron que seguramente la futura práctica docente les irá dando las "herramientas y metodologías" necesarias. Para ellos la argumentación en las clases de matemática es indispensable y algunos afirmaron que en realidad las argumentaciones se deben llevar a cabo en cualquier afirmación que se realicen, siendo el aula uno de los ámbitos en los que se enseñe a argumentar lógicamente.

Otra característica que llama la atención de las respuestas recibidas es que casi todos los docentes afirman que trabajan en el aula mediante la resolución de problemas y muchos de ellos hacen hincapié en la importancia de la enseñanza de técnicas de resolución de problemas. Esto denota, comparando con los resultados descriptos anteriormente, que excluyen a los problemas de deducción de la categoría de problemas.

Al preguntarse a los encuestados acerca de la enseñanza de la demostración, los docentes que afirman que en sus clases enseñan a demostrar, responden que es un contenido que se adquiere por medio de la práctica y de ver cómo se desarrollan demostraciones de distinto tipo. Por lo que manifiestan que al realizarlas, explican las características del método utilizado y justificando cada paso, pidiendo posteriormente a sus alumnos la reproducción de demostraciones análogas. Surge de esta manera la idea de "demostración tipo" y de la presentación a los alumnos de demostraciones que utilicen distintas estrategias clásicas, como ser las de demostraciones directas, por reducción al absurdo, por inducción matemática o a través de la propiedad contrarrecíproca.

En la mayor parte de los casos que formaron parte de esta investigación, se concibe al aprendizaje de la demostración como un proceso individual en el cual el alumno propone y desarrolla los pasos a seguir: interpretar el planteo, identificar las hipótesis y la tesis, buscar un método de demostración y ensayar opciones, guiado por el docente. Si bien en lo expresado por los futuros docentes surgió la idea de utilizar como manera de aprender a argumentar y a demostrar el trabajo grupal para enriquecer a los alumnos mediante la exposición y defensa de posiciones, pocos docentes plantean que las demostraciones pueden realizarse y aprenderse en el marco de un trabajo grupal.

A MODO DE CONCLUSIÓN

La enseñanza de la demostración como contenido matemático, aunque es aceptada por la mayoría de los docentes como algo importante desde el punto de vista teórico, no es siempre una problemática asumida por ellos en forma sistemática, sino en algunos casos de manera intuitiva, tomando como modelo aquel en el que han sido formados.

A través de las demostraciones y argumentaciones lógicas, es posible evitar la tendencia de la algoritmación de la matemática en el aula, evitando el aprendizaje mecánico de fórmulas y la aplicación de las mismas de forma rutinaria. La consideración de las demostraciones como un tipo más de problemas a resolver, hace que los alumnos comprendan que simplemente se trata de procedimientos necesarios para la resolución de problemas y no vean al proceso de demostrar como algo destinado únicamente a los matemáticos. Los distintos tipos de argumentaciones en la clase de matemática permiten que los alumnos adquieran el dominio de formas de razonamiento que si bien pueden aplicarlas inicialmente a un dominio formal, posteriormente les permitan enriquecer su manera de razonar ante problemáticas de diverso origen.

La importancia de la demostración en matemática se relaciona con la racionalidad dominante en la sociedad y la cultura en la cual se desarrolla. El objeto de enseñanza de la habilidad para argumentar no debe restringirse únicamente a los contenidos matemáticos sino que está marcado por una concepción epistemológica no solo de la comunidad científica, sino también por una concepción cultural que valora la fundamentación racional.

El valor de la enseñanza de la demostración matemática en el aula varía de unos niveles educativos a otros, pero su valor general es de ayudar a comprender la necesidad de validar las diferentes proposiciones matemáticas que se aprenden, y dentro de un objetivo más amplio poder discernir la necesidad de validar modo objetivo el conocimiento científico.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Balacheff, Nicolás (1982). *Preuve et démonstration en mathématiques au collège*. En *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 3, nº 3 (pp.261-304).

Crespo Crespo, Cecilia; Ponteville, Christiane (2004a). *Las concepciones de los docentes acerca de las demostraciones*. En Díaz, L. (Ed.) Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 17. Tomo 1. México: Clame. (pp. 39-44)

Crespo Crespo, Cecilia; Ponteville, Christiane (2004b). *Las funciones de la demostración en el aula de matemática*. Presentado en RELME 18, Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México.

Duval, Raymond (1999). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva*? México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ibañes, Marcelino; Ortega, Tomás (1997). *La demostración en matemáticas. Clasificación y ejemplos en el marco de la educación secundaria*. En *Educación Matemática.* Vol. 9 n°2. (pp. 65-104) México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Santaló, Luis: *La Enseñanza de la Matemática en la Escuela Media.* Proyecto CINAE - Buenos Aires, 1981.

de Villiers, Michael (1993). *El papel y la función de la demostración en matemáticas*. En *Épsilon*, 26 (pp.15-30).