MATEMÁTICA RELACIONAL Y PROCESOS DIRECTO E INVERSO

Pilar Ruesga Ramos; Joaquín Jiménez Rodríguez**; Mariela Orozco Hormaza****
** Universidad de Burgos. (España)*
*** Universitat de Barcelona (España)*
**** Universidad del Valle. (Colombia)*
pruesga@ubu.es   Jiménez@uoc.edu   morozco@univalle.edu.co

RESUMEN

Desde la perspectiva de la conceptualización de la matemática como ciencia relacional, se ponen de relieve dos procesos relacionales llamados -directo e inverso- coincidentes con los procesos constitutivos de la reversibilidad de pensamiento que la prueba de cálculo algorítmico Piagetiana pone de relieve. Se plantea el problema didáctico que ello genera y se da cuenta de una investigación que analiza ambos procesos en Educación Infantil.

PENSAMIENTO RELACIONAL Y MATEMÁTICAS

La matemática puede ser conceptualizada como una ciencia cuyo objetivo es el establecimiento de relaciones de muy diversos tipos. Estas relaciones, que implican operaciones formales, tienen lugar entre objetos, reales o no, y se traducen a través de un lenguaje simbólico, que le es propio, a modelos que las generalizan y representan desde los cuales las situaciones de partida se obtienen por particularización.

Es posible identificar dos procesos relacionales diferenciables. Uno de ellos es el que tiene lugar cuando las relaciones progresan desde los datos, situaciones de partida o condiciones suficientes y, en general, desde las causas, en la búsqueda de las soluciones, situaciones finales o condiciones necesarias, es decir hacia los efectos. El otro progresa en sentido contrario, esto es, en general desde los efectos a las causas.

Estas formas relacionales se presentan de forma entremezclada, casi conjunta y componen pasajes que permiten alcanzar el objetivo de la situación problemática a la que pertenecen. Estos procesos se identifican con los constitutivos de la reversibilidad de pensamiento piagetiana para el caso de los cálculos algorítmicos.

En este trabajo se muestran varias situaciones en las cuales ambos procesos se identifican. Esta identificación permite emprender el problema didáctico de examinar cómo ambos inciden en el aprendizaje así como la influencia recíproca y la dificultad relativa entre ambos.

DOS EJEMPLOS PARADIGMÁTICOS. EL MÉTODO PROGRESIVO-REGRESIVO DE DEMOSTRACIÓN Y LOS PROCESOS DE ANÁLISIS Y SÍNTESIS

Al analizar el método por demostración progresivo-regresivo, Solow (1992) identifica y separa pasajes que el razonador debe resolver respondiendo a dos tipos de preguntas. Uno de estos tipos son las preguntas de la forma: *"¿qué tengo cuando tengo...?"* mientras el otro tipo son preguntas de la forma: *"¿qué debería tener para tener...?"*

Desde la perspectiva relacional ambos tipos de preguntas ponen de relieve dos tendencias inversas en cuanto a que, bajo la primera formulación, se camina desde las condiciones necesarias hacia las suficientes, en tanto que bajo la segunda formulación se camina en sentido contrario, esto es, desde las condiciones suficientes hacia las necesarias.

EL MÉTODO PROGRESIVO-REGRESIVO DE DEMOSTRACIÓN

Ordinariamente, las demostraciones matemáticas presentan una importante omisión. Utilizan principios o reglas de inferencia que no están explícitamente formulados y de los que muchas veces no se tiene conciencia. Dice Daniel Solow en su libro "Cómo entender y hacer demostraciones en Matemáticas":

La mayoría de los procedimientos de demostración en matemáticas, tienen por objeto la verificación de una proposición del tipo $A \Rightarrow B$. El método progresivo-regresivo (Solow 1992) es asimilable a un gran laberinto de ideas que tiene comienzo en A y salida en B, estableciendo un camino de conexión, posiblemente de entre muchos, que se recorre simultáneamente de A hacia B y de B hacia A. Al tratar de determinar cómo llegar a la conclusión de que B es verdadero, usamos el proceso regresivo, en tanto que, cuando hacemos uso de la información contenida en A, estamos usando el proceso progresivo.

El proceso de demostración se comienza regresivamente, planteando lo que Solow llama una "pregunta de abstracción" que consiste siempre en un planteamiento de la forma: "¿cómo o cuándo puedo concluir que la proposición B es verdadera?". La pregunta debe ser formulada de un modo abstracto, general y sin hacer referencia alguna al problema concreto que la suscita. La respuesta a la pregunta de abstracción es un proceso de dos fases. Primero hay que dar una respuesta abstracta. Después hay que aplicar esta respuesta a la situación específica. Ambas fases constituyen el llamado "proceso de abstracción" y ha proporcionado una nueva proposición B_1, con la propiedad de que si se pudiese demostrar que B_1 es verdadera, entonces B sería verdadera, es decir que $B_1 \Rightarrow B$. Este paso regresivo se aplica a la proposición final e indaga su causa en forma de condición suficiente para B y supone, por tanto, la búsqueda de una relación no explícita que no es necesariamente única y debe encaminarse hacia la integración en B_1 de la información contenida en A.

Veamos, por ejemplo un paso en la demostración de la relación conjuntista de que, siendo A y B dos conjuntos cualquiera se verifica que $(A \cap B) \subset (A \cup B)$. El primer paso consiste en tomar un elemento cualquiera de $(A \cap B)$.

$\forall\ x \in (A \cap B)$, desde aquí pueden desprenderse múltiples condiciones necesarias, por ejemplo las siguientes: que $x \in A$ y $x \in B$ ó que $x \in (A \cap B) \cup W \quad \forall W$, ó que $x \notin (A \cap B)^C$ ó que $x \notin A^C \cup B$ ó que $x \notin B^C \cup A$ …, pero de todas ellas es preciso optar por una que permita vincular la información que contiene con el objetivo de la demostración, es decir con el hecho de que x pertenezca a $(A \cup B)$, convirtiendo a la proposición $x \in (A \cup B)$, que se quiere demostrar, en condicionante para la elección del camino relacional que debe ser descubierto.
Así el proceso regresivo se transforma ahora en el planteamiento del proceso de abstracción para la proposición B_1. Nuevamente la formulación de una pregunta de abstracción correctamente formulada, su respuesta y adaptación al contexto proporcionan una nueva proposición B_2 tal que es condición suficiente para la B_1, esto es $B_2 \Rightarrow B_1$.

Este es un camino de progreso desde los efectos a las causas.

El proceso progresivo se inicia con la proposición A, que se supone es verdadera. A partir de ella se obtiene otra proposición A_1 de la cual sabremos ya que es verdadera como consecuencia de serlo A, esto es, obtenemos una proposición necesaria para la A, por tanto: $A \Rightarrow A_1$. El paso progresivo se aplica a datos ciertos desde los cuales se genera una consecuencia necesaria y supone, por tanto, un camino de progreso desde las causas a los efectos.

Ambos procesos progresivo y regresivo no son independientes sino que por el contrario van intrínsecamente ligados puesto que las proposiciones A_i obtenidas progresivamente han de estar encaminadas a la obtención de la última B_j obtenida regresivamente que de este modo reposicionan continuamente el proceso de razonamiento.

Finalmente la regla del silogismo hipotético aplicada entre proposiciones consecutivas proporciona la veracidad del condicional: $A \Rightarrow A_1, A_1 \Rightarrow A_2, \ldots, A_i \Rightarrow A_{i+1}, A_{i+1} \Rightarrow B_i, B_i \Rightarrow B_{i-1}, B_2 \Rightarrow B_1, B_1 \Rightarrow B$ luego $A \Rightarrow B$

Este sería un camino determinado entre un cúmulo de conocimientos construidos, sobre el que en cada momento hay que ir desechando posibilidades, argumentos o ideas que puedan considerarse no fructíferas o accesorias en cada problema.

Ambos procesos son bien diferentes uno de otro. El proceso progresivo avanza sobre una afirmación construida, dada, conocida, poniendo de relieve parte de la información contenida en A: A_1. Mira la pirámide del conocimiento desde su vértice hacia abajo, descendiendo por un camino seguro de aplicación de relaciones ya conocidas en respuesta a una pregunta del tipo *"¿qué tengo cuando tengo A?"*. Pero la elección de A_1, de entre todas las posibles proposiciones que pueden desprenderse de A, depende de B. El proceso regresivo opera en sentido contrario, mirando desde la base de la pirámide hacia su vértice siempre desde la especulación, *tratando de descubrir una relación no conocida en la búsqueda de la respuesta a una pregunta del tipo "¿qué tendría que tener para B?."*

Sin embargo, el camino relacional descrito por la conexión entre sentencias, depende a cada paso del contexto, no tiene por qué ser único y es necesario descubrirlo.

EL RAZONAMIENTO REGRESIVO

Polya (1984) recoge los procesos de análisis y síntesis que el matemático griego Pappus distingue como parte integrante de la estrategia para resolver problemas. Ambos procesos, bajo adaptación del autor de su texto original, son descritos de la siguiente forma:

> *"Buscamos de qué antecedentes se podría deducir el resultado deseado; después buscamos cual podría ser el antecedente de este antecedente, y así sucesivamente, hasta que pasado de un antecedente a otro, encontremos finalmente alguna cosa conocida o admitida como cierta. Dicho proceso lo llamamos análisis, solución hacia atrás o razonamiento regresivo. En la síntesis, por el contrario, invirtiendo el proceso, partimos del último punto alcanzado en el análisis, del elemento ya conocido o admitido como cierto. Deducimos lo que en el análisis le precedía y seguimos así hasta que, volviendo sobre nuestros pasos, lleguemos finalmente a lo que se nos pedía. Dicho proceso lo llamamos síntesis, solución constructiva o razonamiento progresivo"* (Polya 1984: 134)

Uno de los ejemplos con los que Polya ilustra la idea de razonamiento regresivo es la demostración clásica de Euclides del teorema que establece que la serie de números primos es ilimitada. La demostración dice:

> *"Sea x el mayor número primo. Consideremos el número formado por el producto de todos los números primos menores que x y sumemos a este producto 1:* ***y*** *= (2.3.5.7... x) + 1*
> *El número* ***y*** *es mayor que x. Pero* ***y*** *o es primo o es compuesto.*
> *Si* ***y*** *es primo, entonces x no es el mayor número primo.*
> *Si* ***y*** *es compuesto, entonces tiene que tener un divisor mayor que x puesto que por construcción ni x ni ninguno de los primos menores que él puede dividir a* ***y****, en consecuencia este divisor primo es mayor que x. Luego x no sería el mayor número primo*."

La anterior es una demostración de las llamadas "por reducción al absurdo" pero a la vez por construcción, puesto que se ha "fabricado" el número **y**. Este número **y** ha resultado ser muy oportuno pero claramente no ha sido casual sino que ha surgido de recorrer la cadena de deducciones desde los postulados iniciales a los finales y de los postulados finales a los iniciales. Y ello ha ocurrido antes de sugerir la posibilidad de probar con un número concretamente así construido dentro de la enorme gama de posibilidades que tenemos para haber diseñado cualquier otro.

Este proceso aparece en una infinidad de situaciones familiares en matemáticas entre ellas: “la misteriosa elección de expresiones tales como $\varepsilon / 2\sqrt{M}$ en las demostraciones de teoremas de límites” (Dubinsky 1994: 105), y es característico de las demostraciones por construcción.

RELACIONES Y MODOS DE RAZONAMIENTO

Toda situación problemática resoluble en el ámbito de las matemáticas precisa establecer relaciones por medio de analogías y metáforas. Esta necesidad se hace patente en ámbitos muy diferentes y constituye una característica que hace de la matemática una ciencia que trata de las relaciones (Alsina y otros 1992) que pueden establecerse entre variables y hechos cuantificables. Inducción, deducción, generalización, particularización, abstracción son procesos que forman parte del razonamiento en matemáticas e implican poner en relación situaciones reales o hipotéticas (Polya 1984; Schoenfeld citado en Davis y Hersh 1989; Guzmán 1997).

La forma en que tienen lugar los procesos relacionales que hemos visto operar en los ejemplos anteriores pueden identificarse como procesos en los que las relaciones son establecidas apoyándose en las situaciones de partida, datos o causas, tal como ocurre en la síntesis y en el proceso progresivo, o bien apoyándose en las situaciones finales, resultados o efectos como ocurre en el análisis y en el proceso regresivo.

Ahora bien, encontramos que ambos procesos, que pueden formularse explícitamente o no, no son independientes uno de otro, sino que tanto en el proceso de análisis (Polya 1984), como en los pasos regresivos de demostración, el retroceso continuado de un antecedente a otro sería inútil si no fuera porque en el último antecedente encontrado se reconocen las situaciones o condiciones de partida. Siendo así que son estas las que permiten encontrar un camino en retroceso fructífero.

De igual forma, el proceso de síntesis como los pasos progresivos de demostración, se establece de forma pertinente sólo cuando las situaciones finales presiden el objetivo del recorrido progresivo. Desde esta perspectiva, encontramos que ambos procesos se dan también en otras ocasiones no vinculadas con la demostración.

Para referirnos a ellos llamaremos proceso en ***modo directo*** a todos aquellos pasos relacionales en los que las relaciones son establecidas apoyándose en las situaciones de partida, datos o causas. Llamaremos proceso en ***modo inverso*** a todos aquellos pasos relacionales en los que las relaciones se establecen apoyándose en las situaciones finales, resultados o efectos. En lo que sigue, nos interesamos en el análisis del modo inverso en aspectos diversos de la matemática.

EL MODO INVERSO Y LOS MODELOS MATEMÁTICOS

> "*Un modelo matemático es una especificación y una semi-descripción de un sistema conceptual creado por una interpretación de hechos. Por medio del modelo matemático, las descripciones verbales y no formales de relaciones entre diferentes parámetros pueden ser expresados en términos de relaciones funcionales, y las características de las relaciones pueden ser expresadas como propiedades de la función matemática seleccionada*" (Skovsmose, 1994)

Los métodos de resolución de problemas proponen estrategias cuyo fundamento está, de forma genérica, en el establecimiento y descubrimiento de relaciones.

Desde el punto de vista relacional, consiste en encontrar las relaciones que gobiernan la situación que los datos y condicionantes del problema expresan por similitud con otros casos conocidos.
Encontrar el modelo matemático al que responde una situación problemática, con ayuda o no de la analogía, no es otra cosa que plantear, en un lenguaje formal propio de la matemática, las relaciones descubiertas.

La solución de una situación resoluble matemáticamente supone la identificación de datos y la concreción de la relación que los liga en una expresión o modelo matemático sobre el que aplicar un método resolutivo que genere soluciones al modelo matemático. Sin embargo, en la resolución de problemas la obtención del modelo matemático es prevalente frente a la aplicación eficaz del método resolutivo. En efecto, en ocasiones, es posible resolver situaciones problemáticas sin utilizar una representación formal. Sin embargo, esto nunca es posible sin la determinación fidedigna de las relaciones que expresan las condiciones y los datos.

Problemáticas como:

> "*Un club de fútbol está renovando su representación. Hay 12 candidatos para optar a los puestos de presidente, secretario y tesorero. ¿De cuántas formas distintas pueden quedar establecidos los puestos de representación?"*
> ó
> "*Con los 40 alumnos de una clase se desea formar equipos de tres alumnos cada uno. ¿De cuántas maneras puede hacerse?*

Pueden resolverse por procedimientos menos sistematizados, como la obtención del espacio muestral, pero esto no evita la necesidad de descubrir la regla de formación de ternas.

Pero, descubrir las relaciones que gobiernan una situación problemática implica un posicionamiento sobre los datos y el campo conceptual de pertenencia y supone, por tanto, poner en práctica un proceso en modo directo. La incorporación de esta información permite encontrar vínculos y reconocer los operadores que, de forma no explícita, intervienen en el problema.

La obtención de estos vínculos, es decir, el descubrimiento de la relación que el modelo matemático expresa, constituye un proceso en modo inverso en la medida en que generaliza las relaciones abstraídas de los datos.

Algunas de las estrategias propuestas por Guzmán (1997) denotan procedimientos habituales en matemáticas, mas allá de la resolución de problemas. Así, por ejemplo, la estrategia consistente en suponer el problema resuelto, indica un posicionamiento sobre la solución del mismo, punto desde el cuál hay que regresar, indicando un proceso que va de los efectos a las causas, o bien de las situaciones finales a las iniciales:

> "*Al suponer el problema resuelto, de la forma práctica que veremos a continuación, aparecen los datos mas cercanos a lo que buscamos y mas fácilmente encontraremos el camino desde dónde estamos a donde queremos llegar*" (de Guzmán, 1997)

La asignación de variables es otra manifestación del mismo en tanto que supone un posicionamiento sobre la solución y dar nombre (ya que todavía no se puede dar valor numérico) a las incógnitas involucradas y ello como paso previo a la búsqueda de relaciones.

EL MODO INVERSO EN SITUACIONES ALGORÍTMICAS

Algunos procedimientos algorítmicos revelan también la presencia de los modos directo e inverso. Examinemos la estrategia escolar de completar cuadrados para determinar el eje y el vértice de la parábola $y = x^2 - 3x$. Sobre el modelo general $y = a(x - p)^2 - q$ se reconoce el eje en la recta $x = p$ el eje y el vértice en el punto de coordenadas cartesianas (p,q).

El problema se transfiere a un problema algebraico que requiere expresar la ecuación de la parábola dada en la forma general.

Analizamos los pasos que constituyen este objetivo:

a) Suponemos expresa la ecuación de la forma buscada, es decir que la igualdad

$$y = x^2 - 3x = a\,(x - p)^2 - q$$

Es una condición suficiente.

b) Puesto que $(x - p)^2 = x^2 - 2px + p^2$ debe ser la situación final

c) La comparación con la situación inicial conduce a que

$$a = 1 \text{ y } p = 3/2$$

Es condición necesaria.

d) Nuevamente, la comparación con la situación inicial $y = x^2 - 3x$, indica que es necesario añadir un término independiente para que a) se verifique
e) Es suficiente que $q = -(3/2)^2$

Utilizamos un proceso en modo inverso en los pasos a), b) y en modo directo en los pasos c), mientras en los pasos d) y e) ambos modos coexisten.

Vemos en este cálculo, una continua referencia de la situación de partida a la de llegada y al revés, de forma que el procedimiento queda determinado por las referencias conjuntas y continuas de una a otra.

EL MODO INVERSO EN SITUACIONES DE CAMBIO REPRESENTACIONAL

El procedimiento anterior proporciona la solución al problema consistente en la obtención de la gráfica de la función parábola de eje la recta $x = p$ y vértice el punto de coordenadas cartesianas (p, q) utilizando un modelo algebraico.

Pero la representación algebraica conduce a la representación geométrica y recíprocamente.

Es decir, mientras el:

a) ejercicio de ida:

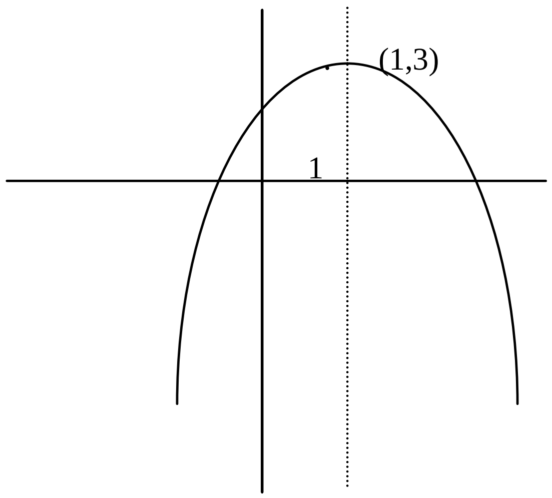
Obtener la gráfica de la parábola de ecuación

$$y = -2x^2 + 4x + 1$$

translada isomórficamente el modelo algebraico en el modelo geométrico dado por la gráfica de la misma, el

(b) ejercicio de vuelta:

Obtener la ecuación de la parábola:



traslada isomórficamente el modelo geométrico al modelo algebraico.

Ambos problemas tienen contextos diferentes y objetivos diferentes y, por tanto son problemas distintos. Ambos contienen en sus procesos resolutivos respectivos procesos en modos directo e inverso que involucran puntos de vista centrados respectiva y simultáneamente en los modelos algebraico y geométrico. Son semejantes en cuanto a que los datos y conclusiones son explícitos, sin embargo precisan un proceso en modo inverso en el reconocimiento y explicitación del sentido de la equivalencia representacional entre ambos modelos.

Es, sin embargo, notable el hecho de que mientras la obtención del modelo geométrico desde el algebraico es habitual en los procesos de aprendizaje, no lo es tanto, en sentido contrario.

MODO INVERSO Y AXIOMATIZACIÓN

El proceso constructivo del conocimiento matemático que constituye la axiomatización suele comenzar con la exposición de los axiomas.

El Libro Primero de los Elementos de Euclides, que desarrolla la Geometría Euclidiana comienza, en su primera línea, diciendo:

> ***"1. Punto es, cuya parte es ninguna.***
>
> 2. Línea es longitud que no se puede ensanchar.
> 3. Los términos de la línea son puntos...."

Pero los axiomas no pueden surgir espontáneamente. La axiomatización, sólo puede surgir desde la contemplación de un panorama general, de las relaciones que allí se dan, con unas leyes de operación determinadas que, finalmente, vistas en sentido contrario, van estableciendo las raíces comunes que hicieron posible la aparición del panorama general. No son primero los axiomas. Los axiomas surgen mas tarde mediante un proceso continuado de "regreso", desde las situaciones finales que, permanentemente está condicionado por el camino de "progreso" que pueda generar.

Es en la búsqueda de los axiomas donde identificamos este proceso en modo inverso en cuanto que se establece desde los efectos, las propiedades conocidas o intuidas, hacia sus causas o condiciones suficientes para las mismas.

MODOS DIRECTO E INVERSO Y CONSTRUCCIÓN DE CONCEPTOS Y ESQUEMAS

La construcción de conceptos involucra elementos de tipo lógico inferencial. Para Wartofsky (1987) una parte de la lógica es el análisis de las formas de la inferencia correcta; otra, relacionada con ella, se ocupa de la definición, o sea de precisar los significados y mostrar cómo unos conceptos se relacionan con otros o de cómo un concepto se define en función de otro. El establecimiento de un concepto a través de una definición surge cuando media una abstracción que traslada una situación reflejada en una infinidad de casos particulares al rango de una situación más general. Este procedimiento precisa de extraer todo lo que pudiera haber de común entre una infinidad de casos relativos a un mismo aspecto desechando todo lo que pueda ser circunstancial o irrelevante, lo que Skemp (1980) denomina "ruido" en referencia a todo aquello que no es relevante y distorsiona la idea central.

Las clasificaciones son un caso de proceso en modo directo.

Por ejemplo, la clasificación de los triángulos según sus lados en: equilátero, isósceles y escaleno. Dado un triángulo, por verificación sobre los elementos asignamos la clase a la cual corresponde. Sin embargo, la caracterización de elementos asociada a esa clasificación implica un proceso en modo inverso. En este caso, dado un triángulo de la clase equilátero, éste tiene los tres lados iguales, pero eso implica que también tiene dos lados iguales por lo que también pertenece a la clase de los isósceles. Es necesario añadir a los datos las características de clasificación adoptadas.

MODOS DIRECTO E INVERSO Y EQUIVALENCIA PROPOSICIONAL

Todas las problemáticas anteriores, tanto las que suponen procesos en modo directo como en modo inverso, tienen un denominador común: consisten en procedimientos de generación, a partir unas proposiciones verdaderas, de nuevas proposiciones verdaderas sobre las cuales se alcanza una particular sensación de seguridad y confianza, consecuencia del carácter apodíctico de las proposiciones matemáticas que se generan a través de la lógica inferencial que le es propia.

Este proceso de generación de nuevas proposiciones o terceros enunciados (Duval 1999) que caracteriza el razonamiento deductivo se realiza continua y simultáneamente desde la premisa a la conclusión y desde la conclusión a la premisa.
Esta lógica que es necesario aplicar en los razonamientos matemáticos, que viene caracterizada por las leyes de la lógica clásica, forma parte del modo de razonar que el ser humano construye a través de su desarrollo.

La equivalencia proposicional permite sustituir una proposición: **p** por otra equivalente: **q**. Esto significa que **p** y **q** son respectivamente necesarias y suficientes cada una para la otra.

El tránsito de una proposición a otra equivalente es habitual en el razonamiento matemático. Esta equivalencia permite el uso indistinto de las siguientes definiciones de número divisor: (1) "Un número **x** es divisor de un número **y**, cuando existe otro número natural **q** tal que **y** = **q.x**", "Un número **x** es divisor de un número **y** cuando el resto de la división de **y** entre **x** es cero", (3) "Un número **x** es divisor de un número **y** cuando al dividir **y** entre **x** el cociente es un número natural", (4) "Un número **x** es divisor de un número **y**, cuando **y** es múltiplo de **x**".

Es posible establecer un procedimiento relacional bidireccional a través de una cadena de deducciones que garantiza la equivalencia de dos cualquiera de ellas, es decir que si i, j = (1), (2), (3), (4)

$$(i) \Rightarrow (j)$$

además

$$(i) \Leftarrow (j)$$

Completando un proceso que puede recorrerse en cualquiera de los dos sentidos.

En el paso (i) $\Rightarrow$ (j), se trata de mostrar que (j) es necesaria para (i) y todo lo que se dice en (j) está dicho en (i), mientras que en el paso (i) $\Leftarrow$ (j) hay algo nuevo, no explícito, que se añade y que constituye un proceso en modo inverso: el paso (1) $\Leftarrow$ (2) precisa utilizar las relaciones no expresas: Dividendo = Divisor x Cociente + Resto, y que cualquiera que sea el número a, se tiene: $a + 0 = a$.

Algunas equivalencias no son tan inmediatas. Consideremos el ejemplo del concepto de aplicación inyectiva. (1) "f: A $\rightarrow$ B es inyectiva cuando para todo x, y de A si x es distinto de y, entonces f(x) es distinto de f(y)". No obstante usamos indistintamente la siguiente formulación para el mismo concepto:(2) "f: A $\rightarrow$ B es inyectiva cuando para todo x, y de A, si f(x) es igual a f(y), entonces x es igual a y"

Lo que está justificado por la equivalencia formal de las proposiciones

$$p \Rightarrow q, \quad y$$
$$\sim q \Rightarrow \sim p$$

que las expresiones lingüísticas (1) y (2) ocultan.

LOS MODOS DIRECTO E INVERSO Y LOS PROCESOS CONTITUTIVOS DE LA REVERSIBILIDAD DE PENSAMIENTO PIAGETIANA

Los procesos en modo directo e inverso de los que hemos hablado son formas de razonamiento que tienen gran semejanza con los procesos directo e inverso constitutivos de la reversibilidad de las operaciones estudiada por Piaget (1975).

El experimento numérico (Piaget 1979) que diferencia claramente, incluso en el tiempo, dos problemas a los que denomina proceso directo y proceso inverso consiste, en el caso del proceso directo en obtener un número n’ desde un número n dado, efectuando las siguientes operaciones:

1º.- sumar 3 a n.
2º.- multiplicar por 2 el resultado de 1º
3º.- sumar 5 al resultado de 2º.

En este problema, por tanto, todas las reglas se van explicitando y aplicando para terminar obteniendo un nuevo número como efecto cuyas causas son las operaciones efectuadas. El proceso inverso consiste en: conociendo el número n’, se pide averiguar cual fue el número n de partida teniendo en cuenta que fue calculado haciendo las mismas operaciones que antes. Es decir, ahora sabiendo que el efecto de aplicar las operaciones fue el número n’, es necesario determinar el número n causante del resultado.

Los procedimientos implicados en la solución de los problemas que representan ambos procesos no son independientes. La determinación de n’ desde n precisa reconstruir el camino de n hacia n’ en orden que, siendo inverso, involucra en sí mismo otros procesos a su vez inversos.

El proceso directo se apoya en el dato de partida: el número n, las reglas de operación son explícitas, sólo es necesario aplicarlas al número n para conseguir la solución: el número n’. Por el contrario, en el proceso inverso, las reglas no se expresan, el dato de partida es el número n’ y lo es en tanto que resultado o efecto de la aplicación sobre otro de una serie de operaciones.

Identificamos en esta prueba los dos procesos que hemos distinguido en el campo matemático como de modo directo e inverso. El proceso inverso, puede ser asumido como un problema escolar de cálculos algorítmicos. Los siguientes enunciados son un ejemplo: “La edad de un padre es 11 años más que el doble de la edad de su hijo. Si el padre tiene 69 años ¿Cuántos años tiene el hijo?”. “La edad de un padre es 5 años más que el doble más tres de la edad de su hijo. Si el padre tiene 69 años ¿Cuántos años tiene el hijo?”.

Ambos conservan la similitud con el proceso inverso de la prueba Piagetiana con la única diferencia del contexto de referencia. En el caso de estos problemas las relaciones están implícitas mientras son mucho más explícitas en el caso de la prueba Piagetiana, especialmente por su vinculación en el tiempo con su problema directo asociado.

El proceso directo igualmente puede representar una actividad escolar de cálculo algorítmico por ejemplo: “Un chico tiene 10 años ¿Cuál es la edad de su padre si este tiene 5 años más que el doble más tres de los años de su hijo?”

La diferencia de este último problema con el proceso directo de la prueba Piagetiana está en el contexto que pone de relieve la situación, sin embargo, este probablemente sería considerado menos interesante por muchos profesores de matemáticas debido a su carácter directo y explícito. Pero, la relación operacional que este problema presenta, se prolonga hacia otros campos matemáticos en los cuales éste es tratado como objeto.

Este es el caso, por ejemplo, del problema de interpolación enunciado de la siguiente forma: “Encontrar la relación que liga a los números de la columna 1 con los números de la columna 2

Columna 1	Columna 2
1	13
2	15
3	17
4	19

.........”

El papel de los número origen (columna 1) o de los números resultado (columna 2) es indistinto, ninguno es anterior al otro y en cambio ambos forman parte de un único problema que vincula los números en columna 1 con los de columna 2, en cualquier sentido. Observamos, en este ejemplo, que el problema que constituye la prueba Piagetiana, se convierte aquí en objeto.

El reconocimiento de la operación en ámbitos o situaciones implícitas, supone el descubrimiento de la misma allá donde esté aplicada e implica los procesos de tipo inverso. Tenemos así la presencia de la reversibilidad a nivel de operaciones y a nivel de operaciones de operaciones formando parte de un proceso equivalente en este contexto al de la encapsulación (Dubinsky 1994).

CONCLUSIÓN

La Educación Infantil es la etapa educativa en la cuál el razonamiento matemático es aplicado sobre procedimientos de clasificar, seriar, ordenar y transformar.

Sobre tareas relativas a estos procedimientos es posible plantear los dos modos directo e inverso en relación con los juegos de reglas que los ponen en práctica. Sin embargo, los modos inversos son desconocidos en estas aulas.

Desde este punto de vista, las tareas en modo directo consisten en aplicar reglas expresas, mientras las tareas en modo inverso consisten en descubrir las reglas que han sido previamente aplicadas.

Los resultados muestran que no se produce equilibración de las estructuras de conocimiento que los niños ponen en juego. La existencia de los procesos directo e inverso en ámbitos relativos a la matemática formal, que hemos identificado en diversos casos, proporciona una forma de analizar las tareas escolares e identificar posibles aspectos que dificultan el aprendizaje.

Es necesario estudiar si, en estos casos, este desequilibrio entre procesos se da y, si así fuera, valorar las consecuencias que ello pueda tener sobre el aprendizaje.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alsina, C., Burgués, C., Fortuny, J.M., Jiménez, J. Y Torra, M. (1996). *Enseñar matemáticas.* Barcelona: Graó.
Davis, P.J. y Hersh, R. (1989). *Experiencia Matemática*. Madrid: Labor-M.E.C.
Dubinsky, E. (1994). *Reflective abstraction in Advanced Mathematical Thinking. Advanced Mathematical Thinking,* cap. VII. Dordrecht. Netherlands. Kluwer Academic Publishers.
Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semioticos y aprendizajes intelectuales.* Cali. Peter Lang-Universidad del Valle.
Guzmán, M. (1997). *Para pensar mejor*. Madrid: Pirámide.
Polya, G. (1984). *Cómo plantear y resolver problemas*. Mexico: Trillas.
Piaget, J. (1975). *L'équilibration des structures cognitives*. París: Presses Universitaires de France.
Piaget, J. (1979). *Investigaciones sobre la abstracción reflexionante 1*. Buenos Aires: Huemul.
Ruesga,P (2003). *Educación del razonamiento lógico matemático en educación infantil*. phD Tesis Universidad de Barcelona.
Skemp, R. (1980). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Morata.
Skovsmose, O. (1994). *Towards a Philosophy of critical mathematics education***.** Dordrecht. Kluwer Academic Publishers.
Solow, D. (1992). *Como entender y hacer demostraciones en matemáticas*. México: Limusa.
Wartofsky, M. W. (1987). *Introducción a la Filosofía de la Ciencia*. Madrid: Alianza.