

DIFICULTADES CONCEPTUALES GENERADAS POR LOS PROTOTIPOS GEOMÉTRICOS

o

CUANDO LOS MODELOS AYUDAN, PERO NO TANTO

José Luis Rey
Instituto Superior Leonardo da Vinci
Boulogne. Provincia de Buenos Aires (Argentina)
jose_l_rey@arnet.com.ar

INTRODUCCIÓN

Entre la gran cantidad de dificultades que se presentan en los alumnos en la comprensión de conceptos en un contexto geométrico, existen aquellas que son debidas a la comprensión del lenguaje matemático mismo, que implican el reconocimiento de términos específicos del área y la elaboración conceptual adecuada de los mismos, aquellas que son debidas al uso de distinto tipo de notaciones que de por sí, agregan un factor más, el uso de símbolos, que al no tratarse de un lenguaje natural provocan también dificultades; y aquellas de tipo visual (siempre fuertemente presente en el contexto geométrico) debidas entre otros factores a los denominados prototipos.

Con la intención de mejorar la comprensión de determinados conceptos, se ha instituido desde hace ya mucho el uso de ejemplos clarificadores que intentan dar un modelo sobre el concepto que se quiere incorporar y para ello se recurre a ejemplos que modelizan el concepto. Se debe tener en cuenta de manera muy trascendente que, en particular en este contexto, al tratarse de entes eminentemente abstractos, la recurrencia a ejemplos y modelos es decididamente necesaria, pero como toda abstracción y analogía tiene sus ventajas y desventajas.

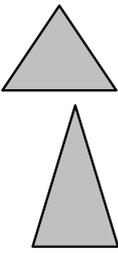
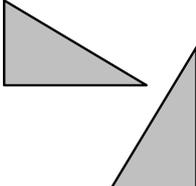
Estos ejemplos y modelos a los que se recurre para intentar expresar mejor el concepto han llegado a incorporarse de una manera tan rotunda en los estudiantes que, en muchas ocasiones suelen llegar a transformarse en obstáculos para una construcción adecuada del concepto. En este tipo de problemas es que se centrará este trabajo, y esta reflexión que parece contradictoria no lo es, y se intentará describir el porqué de la misma.

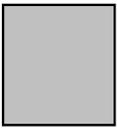
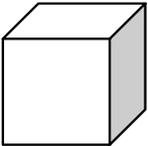
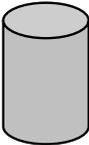
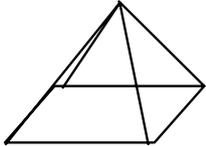
EL USO DE PROTOTIPOS

Cuando se necesita lograr que los estudiantes construyan un concepto de tipo geométrico se recurre a ejemplos gráficos, visuales, que intentan incorporar una visión más o menos completa de las

características del mismo (lo que Vinner ha definido como atributos relevantes (Vinner,1991), propiedades que lo hacen ser lo que es y no otra cosa). Debido a esto se recurre en general a los mismos ejemplos que, por sus bondades (cumplir la mayor parte de propiedades del objeto geométrico en cuestión) han sido elegidos como los ejemplos más adecuados. A este tipo de ejemplos es a los que se ha denominado prototipos (Hershkowitz, 1990, 2002). Estos prototipos, más allá de sus bondades conllevan un riesgo consigo y es el de la identificación única y establecimiento de los mismos como los únicos ejemplos válidos del objeto en cuestión. Tomaremos algunos ejemplos que no por ser clásicos dejan de ser adecuados para aclarar el problema.

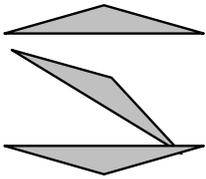
En la tabla siguiente se intentan mostrar algunos de ellos. Si tomamos el caso del triángulo, podemos observar que es prácticamente imposible encontrar en los ejemplos triángulos que no sean equiláteros o isósceles (salvo cuando se trata de definir a los triángulos oblicuángulos o escalenos). Y aún así podemos observar que no se encuentran ejemplos de triángulos donde uno de sus lados no actúe como base. De igual modo, en el caso de los isósceles, la relación lado mayor-lado menor parece tener gran importancia ya que no se observan casos donde esta relación no sea la “prototípicamente establecida”. Los triángulos rectángulos prácticamente nunca tienen su hipotenusa actuando como base, o dicho de otra manera su ángulo recto no ubicado en posición horizontal-vertical, además de no existir casi tampoco triángulos rectángulos donde los catetos sean de medidas similares. Siempre debe existir una diferencia apreciable entre los mismos para que el prototipo funcione como tal. Para el ejemplo del cubo se recurre desde ya a una representación bidimensional de un objeto tridimensional . Esto conlleva problemas aparte que serán analizados separadamente. En el caso de la pirámide y del cilindro también se recurre a ellos en las posiciones “naturales” es decir apoyados sobre una de sus caras.

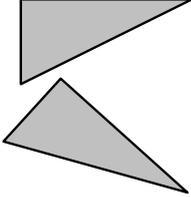
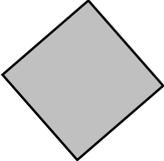
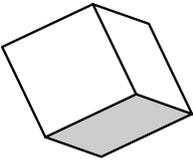
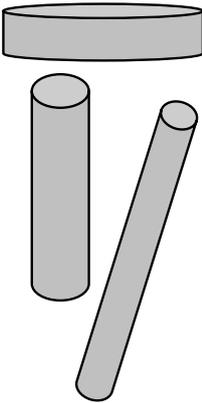
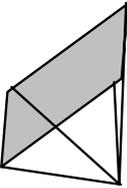
OBJETO GEOMÉTRICO	EJEMPLO	CARACTERÍSTICAS
TRIÁNGULO		Como prototipos aparecen siempre triángulos equiláteros o isósceles. En ambos casos los triángulos siempre tienen uno de sus lados ubicados en forma horizontal (a modo de base) y en el caso de los isósceles siempre ubicados de esa manera y además con una relación lado mayor-lado menor que identifique adecuadamente la diferencia entre los lados
TRIÁNGULO RECTÁNGULO		En este caso los prototipos son siempre triángulos con uno de sus lados como base (siempre uno de los catetos, es decir, el ángulo recto ubicado en posición horizontal-vertical) y siempre además los catetos de distinta medida

CUADRADO		El prototipo del cuadrado desde ya, utiliza siempre un lado como base.
CUBO		Para el cubo se utiliza siempre este prototipo en el cual se encuentra en posición “de apoyo” sobre una superficie inexistente
CILINDRO		El cilindro se encuentra en la gran mayoría de los casos ubicado en posición vertical con una de las superficies circulares como base, y además con una relación “alto-ancho” lo suficientemente amplia para mostrar un “cilindro estilizado”
PIRÁMIDE		Las pirámides son siempre rectas y con una de sus caras actuando como base, y de medidas también “estilizadas”

Ahora bien, estos ejemplos muestran claramente como determinados casos particulares de cada uno de estos objetos geométricos está actuando más que como un ejemplo o caso particular no generalizable, como “la definición misma” del objeto. Esto trae consecuencias desde ya no deseables en la construcción de los conceptos correspondientes.

Para que esto quede mejor aclarado se presentan en la siguiente tabla algunos de los mismos ejemplos con representaciones que no son las clásicas y el motivo por el cual no se las ha tomado como prototipos

OBJETO GEOMÉTRICO	EJEMPLO	CARACTERÍSTICAS
TRIÁNGULO		Los tres ejemplos aquí mostrados son triángulos isósceles pero: el caso a) es demasiado “achatado” para ser buen ejemplo. Los casos b) y c) no están en una posición “natural” y además la relación lado igual-lado desigual no está tan clara.

<p>TRIÁNGULO RECTÁNGULO</p>		<p>El caso a) no está en posición “natural” mientras que el caso b) ni siquiera muestra claramente el ángulo recto en posición horizontal-vertical</p>
<p>CUADRADO</p>		<p>Este cuadrado se reconocerá como rombo y no como cuadrado</p>
<p>CUBO</p>		<p>Probablemente no se reconocerá como cubo</p>
<p>CILINDRO</p>		<p>El caso a) se reconocerá como “moneda” y el b) y c) como “tubos” o “caños” pero no como cilindros. Además de la relación ancho-largo, el cilindro c) no se encuentra en la posición “natural”</p>
<p>PIRÁMIDE</p>		<p>No se reconocerá como pirámide debido a la posición en la cual se encuentra representada</p>

Todos estos ejemplos mostrados aquí no alcanzan la categoría de “prototipos” debido justamente a que no muestran a simple vista algunas de esas características tan importantes que se desean incorporar como parte de la definición del objeto de que se esté tratando. Pero, ¿ es esto realmente necesario e imprescindible? Considero que la respuesta es negativa, y este es el próximo punto a tratar aquí.

VENTAJAS Y DESVENTAJAS DE SER PROTOTIPO

No cabe ninguna duda que los prototipos tienen una gran cantidad de ventajas ya que muestran la mayor cantidad posible de propiedades del objeto en cuestión, pero esto no deja de traer sus consecuencias por que agregan otras que no lo son y he aquí el problema que se trata de explicar. Tomemos algunos de esos casos para analizar.

Un triángulo no dejará de serlo por no estar ubicado en posición de uno de sus lados como base, ni tampoco por la relación entre sus lados y mucho menos por no tener alguno de sus lados congruentes, o por tener ángulo recto (en el caso que corresponda) en una posición que no es la horizontal-vertical. En todos estos casos se corre el riesgo de que quede incorporado en los estudiantes que para ser triángulo rectángulo es necesario que los catetos estén ubicados precisamente en esa posición ya que los prototipos así lo muestran. Es decir, se generaliza el caso particular.

Un cubo representado bidimensionalmente, cuenta como toda reducción dimensional de las falencias propias de toda representación con reducción, se agrega información no relevante y se quita otra. Por ejemplo, en la representación bidimensional de un cubo se pueden observar lados que se cruzan en ángulos no rectos (o lo que es peor, lados que se cruzan y en la realidad no es así) , o caras que se superponen o ángulos no rectos que sí lo son, o lados no congruentes que sí lo son (todo ello debido al uso de la perspectiva).

Un cilindro demasiado largo y de poco diámetro se asimilará más a un “caño” o “tubo” (según propias palabras de los alumnos, pero no a un cilindro. Y parece ser que los cilindros como todo otro cuerpo “deben estar apoyados” .

Ejemplos como estos sirven para desenmascarar las desventajas que pueden acumular estos prototipos elegidos como tales por sus virtudes. Y hasta ahora se ha dejado de mencionar otro problema más que no por ser menos importante muchas veces no se tiene en consideración. Pero es fundamental. En todos los casos mencionados, y en los no mencionados también, se pasa por alto un pequeño (y gran) detalle. Todos los ejemplos que se tomen sean prototípicos o no tienen el grave defecto de ser sólo representaciones del objeto. ¿cómo es esto? Los objetos geométricos son entes abstractos y con ello, son sólo factibles de comprender a partir de sus definiciones, y toda representación de los mismos es una concretización de un objeto que no lo es y con ello adolece de no cumplir con las características totales del mismo.

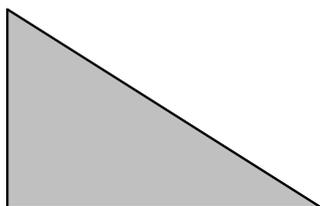
Si recurrimos a modelos concretos nos encontramos con el inconveniente por ejemplo que, los triángulos recortados en cartulina o papel, en realidad no son triángulos ya que tienen espesor y por ello no son figuras bidimensionales sino tridimensionales, es decir cuerpos . Las líneas que representan a los lados tienen espesor cuando las líneas no deben tenerlo. Si bien esto es conocido, muchas veces es dejado de lado por el docente por considerarlo superfluo. Pero no es superfluo hacer las aclaraciones correspondientes por que esto llevará a una construcción inadecuada del concepto, al pensar por ejemplo que se trata de objetos concretos y no de representaciones o casos particulares de los mismos.



Este cuadro de Magritte representa el problema. En el mismo podemos observar la leyenda “esto no es una pipa” cuando claramente podemos ver que sí lo es. El pintor alude a que justamente no es una pipa debido a que se trata sólo de una representación de una pipa.

“La traición de las imágenes” René Magritte

Podemos llegar a imaginar el conflicto que se puede generar si de la misma manera se llegara a presentar un ejemplo como este:



“Esto no es un triángulo rectángulo”

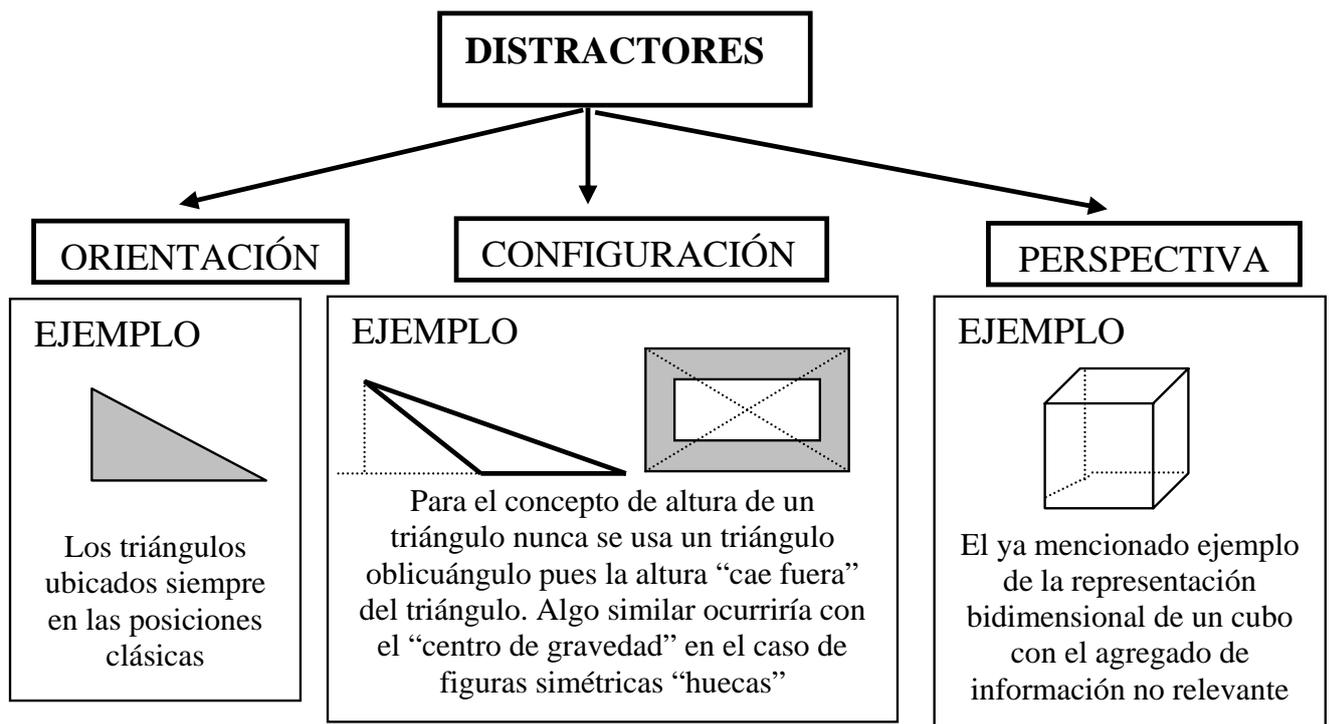
Seguramente nos encontraríamos con un enorme desconcierto a la hora de poder elaborar en los alumnos que efectivamente no se trata de un triángulo rectángulo sino sólo una representación de uno

Esta diferencia entre concepto mismo y sus representaciones es trabajada y desarrollada profundamente a partir del denominado doble status de los objetos geométricos (Douady, 1986, 1998; Mesquita, 1992; Laborde, 1996; Parzysz, 2002)

NINGUNA VENTAJA ES ABSOLUTA

Hasta aquí se ha visto como estos prototipos pese a tener gran cantidad de ventajas, también traen aparejadas un número de desventajas. Aparece aquí el concepto de distractor. En Guillén Soler (2000) aparece la definición dada por Hershkowitz, Bruckheimer y Vinner (1987) respecto a los mismos. En la descripción es importante introducir una variedad de ejemplos en una variedad de orientaciones, una definición verbal o instrucciones sobre como realizar ciertas operaciones (mentales o físicas), pero este análisis no garantiza una identificación y delimitan los denominados distractores de orientación y de configuración. Mencionan que los distractores de orientación son debidos a asumir a los prototipos como ejemplos fijos y preferibles respecto a otros. Y para el caso de los distractores de configuración se debe a casos que no son los tomados como modelos o prototipos. Mencionan a su vez a los problemas que incluye la representación en perspectiva pero considero que no le otorgan el status adecuado ya que no lo categorizan.

La propuesta de este trabajo apunta justamente a otorgar categoría a este tercer tipo de distractores de tal manera que se propone una reclasificación de los mismos según el cuadro que se muestra a continuación.



Clasificación de los distractores

Hasta aquí se hace un panorama general respecto de las ventajas y desventajas. Creo oportuno recalcar que así como los distractores implican un obstáculo en la conceptualización de definiciones en el caso de objetos geométricos esto se puede corregir. Lo mencionan varios autores -Hershkowitz (1990), De Guzmán, (1996); Guillén Soler (2000).

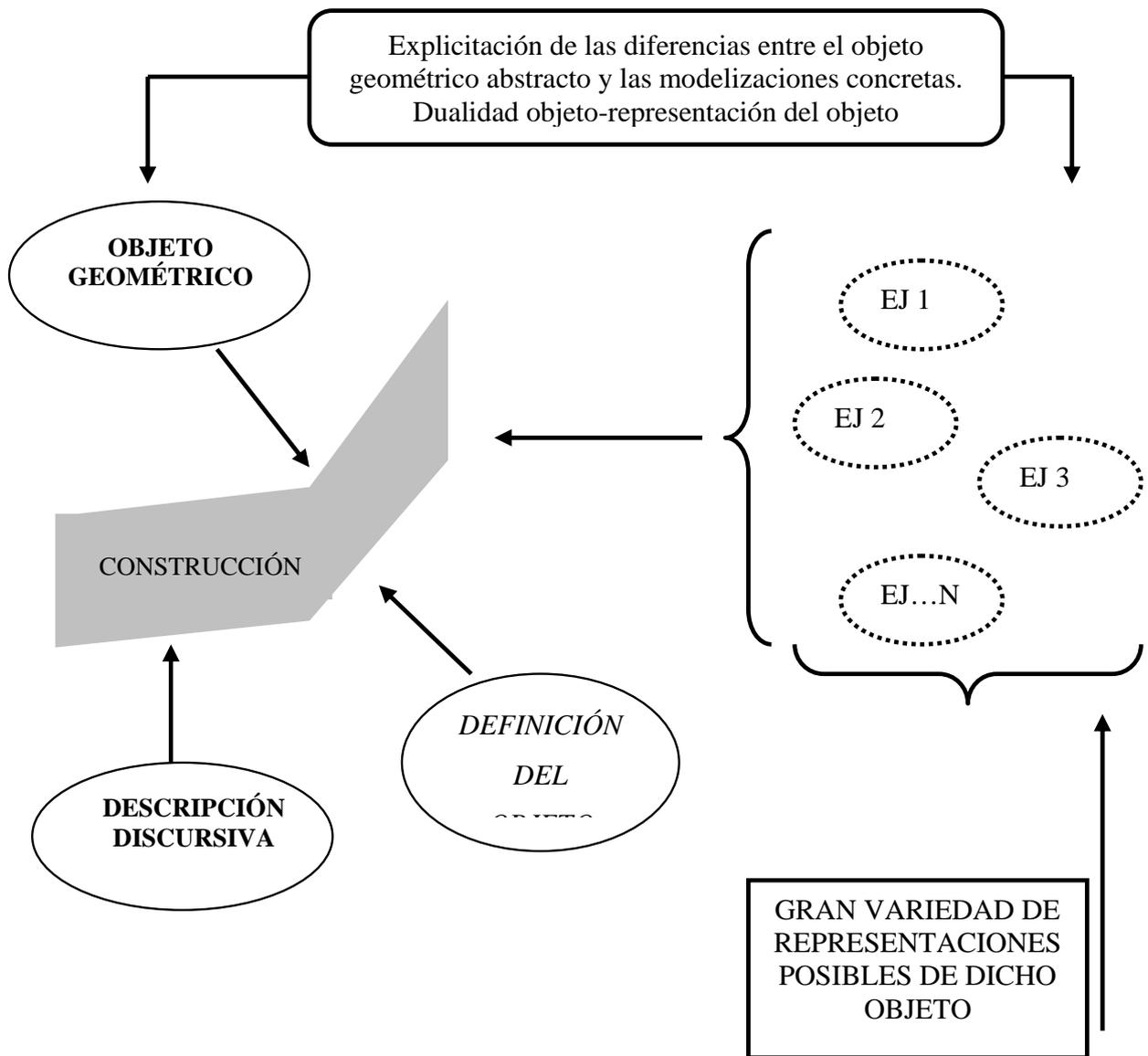
Una de las formas de lograr esto es la incorporación de todo tipo de ejemplos con diversas orientaciones y configuraciones, analizando las definiciones puntualmente, y recurriendo a descripciones de tipo discursivo (Hershkowitz, 1996; Duval, 1998) es decir recurrir no sólo a los ejemplos visuales sino también a las explicaciones verbales de las definiciones y el análisis de los ejemplos tomados.

UNA PROPUESTA

En el esquema siguiente se propone un camino para que la construcción de conceptos supere algunos de los problemas planteados (esto no implica tampoco la solución a todos, sino simplemente una propuesta integradora en la cual las distintas dificultades son reconocidas y trabajadas).

La construcción del concepto como síntesis de trabajar sobre la definición del mismo (esto es la definición desde la matemática, una gran variedad de ejemplos –prototípicos y no prototípicos con toda la amplitud de casos posible – y una complementación adecuada con descripciones verbales así como orientaciones en la construcción de las características de dicho objeto). La riqueza en la variedad de ejemplos tomada y la pluralidad de estrategias de acercamiento a la construcción del concepto a incorporar no asegurará una adecuada construcción pero al menos asegurará evitar en el camino la aparición de obstáculos indeseables en dicha construcción.

Este trabajo sintético no agota de ninguna manera las posibilidades. Quedan abiertas las puertas para el reconocimiento de estos denominados distractores en relación a todos los objetos geométricos, así como el estudio de estos distractores en otros ámbitos de la matemática .



Un posible modelo para la construcción de conceptos geométricos

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- De Guzmán, M. (1996). *El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en análisis matemático* ; Pirámide; Madrid.
- Douady, R. (1986). *Jeux de cadres et dialectique outil-objet* En *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7 (2) (pp 5-31).
- Douady, A. (1998). *Space and plane*. In Mammana , C. & Villani, V. (eds), *Perspectives on teaching geometry for the 21st century*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers
- Douady, A. (2001). *Espacio y plano*; Traducción: Hernández, V. y Villalba, M. PMME-UNISON-2001.
- Duval, R. (1998). *Geometry from a cognitive point of view* . In C. Mammana and V. Villani (eds); *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century: an ICMI study*. Dordrecht. Kluwer
- Guillen Soler, G. (2000). *Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos. Ideas erróneas*. (Pp 35-53). *Enseñanza de las Ciencias* 18, 2000.
- Hershkowitz, R; Bruckheimer, M. y Vinner, S. (1987). *Activities with teachers based on cognitive research*. En NCTM (1987).: *Learning and teaching geometry, K-12. (1987) Yearbook*, (pp. 222-235). Reston,-VA:NCTM.
- Hershkowitz, R. (1990). *Psychological aspects of learning geometry*. En Nasher, P. y Kilpatrick, J. (eds) (1990) *Mathematics and cognition : A research synthesis by the International Group for the psychology of mathematics education*; pp 70-95 ; Cambridge; cambridge U.P.
- Hershkowitz, R (2001). *Acerca del razonamiento en geometría*. Traducción de Hernández, V. Y Villalba, M. PMME-UNISON.
- Laborde, C. (1996). *Cabri-geómetra o una nueva relación con la geometría* En Puig, L. Y Calderón, J. (eds.) (1996) *Investigación y didáctica de las matemáticas* (pp. 67-85). Madrid. CIDE.
- Mesquita, A. L. (1992). *The types of apprehension in spatial geometry: sketch of a research*. *Structural topology*, 18; (pp 19-30).
- Rey, J. L. (2003). *Un estudio sobre el sentido espacial y su relación con la visualización en la resolución de problemas geométricos*. Comunicación breve. En Actas resumen CAREM III, Salta, octubre 2003.
- Saads, S; Davis, G. (2002). *Visual perception and image formation in 3-D geometry*.
<http://www.soton.ac.uk/~crime/publications/gdpubo/saads&davis.html>
- Vinner, S (1991). *The role of definitions in the teaching and learning of mathematics* En Tall, D (Ed.) *Advanced mathematical thinking; Mathematics Education library*".