INTEGRACIÓN ENTRE RELACIONES DE RECURRENCIA Y FUNCIONES GENERATRICES

Malva Alberto de Toso; Yanina Fumero
Universidad Nacional del Litoral–Universidad Tecnológica Nacional
Prov. de Santa Fe (Argentina)
mtoso@satlink.com.ar

Este artículo está diseñado en tres etapas integradas:

- Revisar elementos conceptuales y procedimentales básicos acerca de algunos contenidos propios de la matemática discreta relacionados con las reglas de la suma y del producto, números combinatorios y teorema binomial.
- Actualizar los contenidos acerca de las relaciones de recurrencia y las funciones generatrices.
- Mostrar el diseño de una intervención didáctica que nos permitirá abordar algunos problemas resueltos con los métodos tradicionales ya puestos en escena para intentar ahora la resolución con otra estrategia que proviene del campo conceptual de las funciones generatrices.

Elementos de la teoría del conteo

La Combinatoria estudia las diferentes maneras en que se pueden llevar a cabo distintas tareas para ordenar y/o agrupar un número finito de objetos siguiendo ciertas reglas. Por ejemplo: ¿Cuántas comparaciones debemos hacer para hallar el mayor número de una lista dada?. ¿Cuántas claves de acceso a un cajero automático hay, sabiendo que constan de cuatro dígitos que pueden repetirse, elegidos entre 0, 1, ..., 9?

Cuando tenemos que realizar una tarea podemos preguntarnos:

¿De cuántas formas se puede realizar dicha tarea?
¿Cómo proceder para realizar una tarea de todas las formas posibles?
¿Cuál es la mejor forma de realizar esa tarea propuesta?

Descontando que no tendría mucho éxito cualquier intento para encuadrar la definición de Combinatoria dentro de una definición rígida, podríamos describirla brevemente, como la técnica, habilidad o arte de contar, sin que necesariamente debamos enumerar.

En el análisis de los problemas de Combinatoria está presente la esencia misma de la matemática: su función ordenadora del pensamiento, su misión de abstraer y generalizar, de reconocer lo común en lo aparentemente distinto, su finalidad primordial de desarrollar métodos y estrategias para la resolución de problemas.

Algunos problemas pueden ser fáciles de enunciar pero tan difíciles de resolver que a veces las soluciones no aparecen por largos años a pesar del esfuerzo de los matemáticos. La Combinatoria no tiene un método sistemático y único de resolución y tiene escasos resultados generales. Sin embargo, cuando nos enfrentemos a un problema, veremos que si sabemos sumar y multiplicar adecuadamente, estaremos contando con las primeras estrategias para poder solucionarlo.

Cuando son muchos los elementos que aparecen en juego, resulta conveniente comenzar el planteo con dos elementos para estudiar su comportamiento, luego con tres y así, sucesivamente, viendo si es posible sacar una regla general para todos los elementos. Otras veces, un diagrama que resuma gráfica y esquemáticamente la situación dada, proporciona una ayuda para su solución.

REGLAS DE LA SUMA Y DEL PRODUCTO

El estudio de la Combinatoria comienza con dos principios básicos del conteo: las reglas de la suma y del producto. Son sencillas sus aplicaciones iniciales.

Regla de la suma: Si un experimento se puede separar en e_l, e_2,....,e_n etapas excluyentes y hay m_1, m_2,....,m_n resultados posibles para cada una de ellas, respectivamente, entonces el experimento puede realizarse de $m_1 + m_2 +..... + m_n$ maneras.

Regla del producto: Si un experimento se puede separar en e_l, e_2,....,e_n etapas no excluyentes y hay m_1, m_2,...., m_n resultados posibles para cada una de ellas, respectivamente, entonces el experimento tiene m_1 x m_2 x..... x m_n maneras.

Estas reglas básicas permiten resolver diversos problemas iniciales, tales como:

Problema 1: En un lenguaje de programación un identificador consta de una letra seguida o no de hasta tres símbolos que pueden repetirse. (Se supone que el computador no distingue letras minúsculas de mayúsculas y que los símbolos pueden ser letras o dígitos). ¿Cuántos identificadores diferentes se pueden utilizar? Algunos ejemplos de identificadores son: M, a0, T16, B3e4.

Problema 2: Un "fast food" ofrece un menú económico consistente en una hamburguesa, acompañada con un plato de papas, otro de ensalada, además de un postre y una bebida. Tiene 7 formas distintas de preparar las hamburguesas, 3 formas distintas para entregar las papas, ofrece 5 variedades distintas de ensaladas y cuatro diferentes postres para optar por alguno de ellos.
En el restaurante el cliente puede leer un cartel que dice "*Puedes comer aquí un menú económico distinto todos los días durante cuatro años*".
¿Qué opinas acerca del número de bebidas distintas que ofrece el comedor para completar su menú económico?

Sin embargo, estas reglas nos serán útiles en problemas más complejos.

NÚMEROS COMBINATORIOS

Dado un conjunto $X = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$ que contiene n elementos distintos, una combinación de tamaño "r" (o bien de r elementos) elegidos entre n elementos dados para $1 \leq r \leq n$ es una selección no ordenada de r elementos distintos de X, es decir, un subconjunto de r elementos de X. El número de combinaciones de "r" elementos distintos tomados de un conjunto que tiene "n" elementos se simboliza C(n, r) o $\binom{n}{r}$ y lo definimos como $C(n, r) = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

Teorema binomial: Si a y b son números reales y n es un número natural entonces

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n, k)\, a^{n-k}\, b^k$$

Esta demostración del teorema es interesante porque usa las reglas básicas del conteo:

Dado que la potencia $(a + b)^n = (a + b)\,(a + b).......(a + b)$ tiene n factores, el desarrollo proviene de seleccionar un término de cada uno de los n factores. Un sumando de la forma $a^{n-k}\, b^k$ se obtiene de tomar "a" de $(n - k)$ factores $(a + b)$, y de tomar "b" de los k factores $(a + b)$ restantes. Pero esto puede hacerse de C(n, k) formas, pues C(n, k) cuenta el número de formas de seleccionar k de los n objetos dados. Por lo tanto $a^{n-k}\, b^k$ aparece C(n, k) veces.
Tenemos entonces:

$$(a + b)^n = C(n, 0)\, a^n b^0 + C(n, 1)\, a^{n-1} b^1 + C(n, 2)\, a^{n-2} b^2 + \dots\dots\dots + C(n, n-1)\, a^1 b^{n-1} + C(n, n)\, a^0 b^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C(n, k)\, a^{n-k}\, b^k$$

RELACIONES DE RECURRENCIA

Una sucesión es una función cuyo dominio son los enteros positivos y cuyo conjunto de llegada son los números reales. Una sucesión cuyo conjunto de llegada son los números enteros se llama una sucesión entera.

Representamos la sucesión S: $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ como una lista de las respectivas imágenes de los enteros 1, 2, 3, ..., n, ... Ocasionalmente se puede extender el dominio de la sucesión e incluir el cero. En estos casos a_0 será el 0-ésimo elemento de la lista.

1. Si observamos la sucesión de enteros $b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$ donde $b_n = 2n$ para todo $n \in \mathbf{N_0}$, tenemos que $b_0 = 0$, $b_1 = 2$, $b_2 = 4$. Si necesitamos determinar el valor de b_6 simplemente calculamos $2.6 = 12$, sin necesidad de calcular el valor de b_n para cualquier otro $n \in \mathbf{N_0}$.

Podemos realizar estos cálculos ya que tenemos una fórmula explícita para b_n, es decir, $b_n = 2n$, que nos dice cómo determinar b_n conociendo n.

Sin embargo, existen muchas situaciones donde la fórmula para hallar el enésimo término suele ser muy difícil de encontrar y a veces imposible. La sucesión:

S: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ... no tiene una fórmula para el enésimo término. (¿Por qué?)

Si examinamos la sucesión:

S: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21........que designaremos como $f_1, f_2, f_3, \ldots f_n, \ldots$ tenemos que

$f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ $\forall\, n \in \mathbf{Z}^+$ y $n \geq 3$.

Observemos que no tenemos una fórmula explícita que defina cada f_n en términos de n, $\forall\, n \in \mathbf{N}$. Si queremos conocer el valor de f_6 necesitamos los valores de f_5 y f_4. Y estos valores requieren que necesitemos conocer también los valores de f_3 y f_2 y así sucesivamente. Para $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ necesitamos los términos anteriores para definir a f_n.

De esta manera se establece una dependencia entre los elementos de una sucesión S: $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ de tal manera que cada a_n se pueda escribir en función de algunos de los términos anteriores $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$. Cuando hacemos esto, decimos que el concepto está dado en forma recursiva, usando el método o proceso de recursión.

La sucesión de los números de Lucas está estrechamente relacionada con los números de Fibonacci. Esta sucesión se define en forma recursiva como:

$l_1 = 1$, $l_2 = 3$

$l_n = l_{n-1} + 1_{n-2}$ $\forall\, n \in \mathbf{Z}^+ \wedge n \geq 3$

Si en una sucesión S: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, el enésimo término a_n puede ser expresado como una función de los términos previos $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1$, escribimos $a_n = F(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1)$ y la igualdad recibe el nombre de *relación de recurrencia*. Además, podemos decir que la sucesión S: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, *satisface* la relación de recurrencia.

Si k es el menor entero para el cual tenemos asignados valores para $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $a_n = F(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1)$ permite calcular únicos valores para a_n si $n > k$. Los valores de $a_1, a_2, \ldots, a_k$, son llamados condiciones iniciales o condiciones de frontera *de la relación de recurrencia. Decimos que la relación de recurrencia junto con las condiciones iniciales generan unívocamente a la sucesión S: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$*

La expresión de una fórmula explícita para a_n que permita calcularlo para cada valor de n, sin necesidad de tener los términos previos, se denomina *solución general* de la relación $a_n = F(a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1)$ para n > k, donde k es algún entero fijo con condiciones iniciales $a_1, a_2, ..., a_k$. Una relación de recurrencia es *homogénea* cuando la sucesión idénticamente nula ($a_n = 0$ para todo n), la satisface. En caso contrario se llama no homogénea o inhomogénea.

La terminología anterior permite unificar definiciones respecto de las relaciones de recurrencia. Las distintas formas de encontrar la solución general para las relaciones de recurrencia homogéneas serán tratadas de acuerdo a la bibliografía citada.

A continuación estudiaremos inicialmente un método para resolver algunas relaciones de recurrencia no homogéneas. Luego presentaremos aplicaciones y posteriormente nos dedicaremos a las funciones generatrices.

RELACIONES DE RECURRENCIA NO HOMOGÉNEAS - MÉTODO DE COEFICIENTES INDETERMINADOS

Consideremos la relación de recurrencia lineal no homogénea con coeficientes constantes de orden k ($k \in \mathbf{Z}^+$)

$$a_n + c_1 a_{n-1} + \ldots\ldots + c_k a_{n-k} = f(n) \qquad n \geq k$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_k$ son constantes reales, $c_k \neq 0$.

La solución general de esta relación de recurrencia está dada por

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$$

donde $a_n^{(h)}$ es la solución general de la relación de recurrencia homogénea asociada

$$a_n + c_1 a_{n-1} + \ldots\ldots + c_k a_{n-k} = 0$$

y $a_n^{(p)}$ es una solución particular de la relación no homogénea

$$a_n + c_1 a_{n-1} + \ldots\ldots + c_k a_{n-k} = f(n).$$

Si f(n) es una combinación lineal de las funciones c, n^t, r^n, $\mathrm{sen}(\alpha n)$, $\cos(\alpha n)$, $n^t r^n$, $r^n \mathrm{sen}(\alpha n)$, $r^n \cos(\alpha n)$, donde c, r y α son constantes reales y t es un entero positivo, el *Método de Coeficientes Indeterminados* sirve para determinar una solución particular $a_n^{(p)}$ de la relación.

El método funciona de la siguiente manera:

Si f(n) es un múltiplo constante de una de las formas de la primera columna de la tabla 1 y no es solución de la relación homogénea asociada, entonces $a_n^{(p)}$ tiene la forma que se muestra en el correspondiente renglón de la segunda columna de la misma tabla. (A, B, A_0, A_1, . . . ,A_{t-1}, A_t son constantes determinadas mediante la sustitución de $a_n^{(p)}$ en la relación dada).

Si f(n) es una combinación lineal de términos como los de la primera columna de la tabla 1, y ninguno de estos términos es una solución de la relación homogénea asociada, entonces $a_n^{(p)}$ se forma como la suma de los términos correspondientes en la columna encabezada por $a_n^{(p)}$.

2. Sea $f(n) = b_1 f_1(n) + b_2 f_2(n) + \ldots + b_j f_j(n)$ donde $b_1, b_2, \ldots, b_j$ son constantes reales y cada $f_i(n)$, i = 1, 2, . . . , j es una función de una de las formas de la primera columna de la tabla 1. Si $f_k(n)$, $1 \le k \le j$ es un múltiplo constante de una solución de la relación homogénea asociada, multiplicamos la solución particular $a_n^{(p)}$ correspondiente a $f_k(n)$ por la mínima potencia entera positiva de n, n^s, para la que ningún sumando de $n^s f_k(n)$ es una solución de la relación homogénea asociada. Luego $n^s a_{n_k}^{(p)}$ es la parte correspondiente a $a_n^{(p)}$.

Tabla 1

	$a_n^{(p)}$
c, una constante	A, una constante
n^t, $t \in \mathbf{Z}^+$	$A_t n^t + A_{t-1} n^{t-1} + \ldots + A_1 n + A_0$
r^n, $r \in \mathbf{R}$	$A r^n$
$\text{sen}(\alpha n)$, $\alpha \in \mathbf{R}$	$A\,\text{sen}(\alpha n) + B\cos(\alpha n)$
$\cos(\alpha n)$, $\alpha \in \mathbf{R}$	$A\,\text{sen}(\alpha n) + B\cos(\alpha n)$
$n^t r^n$	$r^n (A_t n^t + A_{t-1} n^{t-1} + \ldots + A_1 n + A_0)$
$r^n \text{sen}(\alpha n)$	$A r^n \text{sen}(\alpha n) + B r^n \cos(\alpha n)$
$r^n \cos(\alpha n)$	$A r^n \text{sen}(\alpha n) + B r^n \cos(\alpha n)$

Aplicaciones:

En estos problemas se analiza una situación dada y después se expresa el resultado a_n en función de los resultados de ciertos enteros menores no negativos.

Ejemplo 1: *La Torre de Hanoi.*

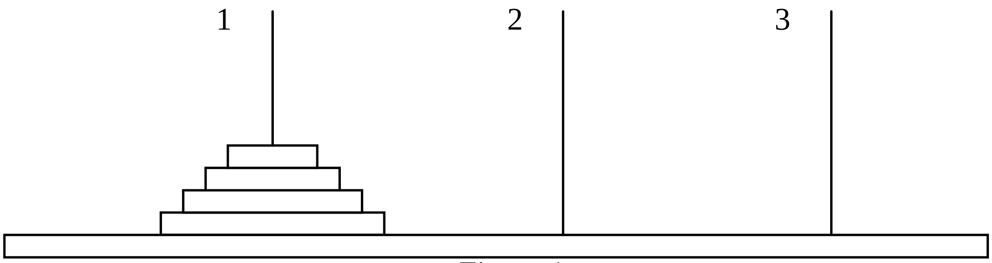

Figura 1

Consideramos n discos de diferentes diámetros y un orificio en su centro. Inicialmente estos discos se encuentran apilados en un poste con el disco mayor en el fondo, como se muestra en la Figura 1. Observamos que ningún disco queda sobre otro más pequeño. El objetivo es pasar los discos, de uno a uno , de modo que la pila original termine en el poste 3. Cada uno de los postes 1, 2 y 3 puede usarse para ubicar en forma temporal los discos, pero no se permite que un disco más grande quede sobre otro más pequeño. ¿Cuál es el número mínimo de movimientos necesarios para hacer esto con n discos?

Para $n \geq 0$, sea a_n el número mínimo de movimientos necesarios para pasar los n discos del poste 1 al poste 3 de la forma descripta. Entonces, para n + 1 discos, hacemos lo siguiente:

a) Pasamos los n discos de arriba, del poste 1 al poste 2, con las indicaciones dadas. Esto se realiza en a_n pasos.
b) Pasamos el disco más grande del poste 1 al 3. Esto se hace en un paso.
c) Por último, pasamos los n discos del poste 2 sobre el disco mayor que ahora está en el poste 3, de nuevo, con las instrucciones dadas. Esto requiere otros a_n movimientos.

Por lo tanto, el número mínimo de movimientos necesarios para pasar los n+1 discos del poste 1 al 3 viene dado por la relación

$$a_{n+1} = 2a_n + 1, \quad \text{donde } n \geq 0 \text{ y } a_0 = 0.$$

Vemos que se trata de una relación de recurrencia lineal, de primer orden, no homogénea y con coeficientes constantes. Utilizaremos el método descripto en la sección anterior para encontrar la solución general.

La solución general de la relación homogénea asociada $a_{n+1} - 2a_n = 0$, esta dada por $a_n^{(h)} = c(2^n)$. Determinaremos ahora la forma de la solución particular $a_n^{(p)}$. Como $f(n) = 1$ no es solución de $a_{n+1} - 2a_n = 0$, sea $a_n^{(p)} = A(1^n) = A$. Sustituyendo esta solución en la relación original tenemos que $A = 2A + 1$, con lo cual $A = -1$.

Luego $a_n = c(2^n) - 1$. Utilizando la condición inicial $a_0 = 0$, concluimos que $c = 1$. Por lo tanto la solución general de la relación está dada por $a_n = 2^n - 1$, $n \geq 0$.

Consideramos ahora un problema en el análisis de algoritmos.

Ejemplo 2:
Para $n \geq 1$, sea S un conjunto con 2^n números reales.

El siguiente procedimiento se usa para determinar los elementos máximo y mínimo de S. Queremos determinar el número de comparaciones realizadas entre los pares de elementos de S durante la ejecución de este procedimiento. Cabe aclarar que existe la posibilidad de lograr los mismos resultados mediante otro método notablemente mejor que requiera menos comparaciones.

Denotamos con a_n el número de comparaciones necesarias para determinar los elementos máximo y mínimo de S. Cuando n = 1, es decir cuando S consta de dos números reales, $a_1 = 1$. Cuando n = 2, $|$S

$| = 2^2 = 4$, por lo que $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $x_i \in \mathbf{R}$ para i = 1, 2, 3, 4. Podemos particionar a S en dos subconjuntos de tamaño dos, $S_1 = \{x_1, x_2\}$, $S_2 = \{x_3, x_4\}$. Como cada uno de ellos posee dos elementos, utilizamos una comparación para determinar los elementos máximo y mínimo de cada conjunto. Luego si comparamos los elementos mínimos de S_1 y S_2, y después comparamos sus elementos máximos, encontramos los elementos mínimo y máximo de S, y vemos que $a_2 = 4 = 2a_1 + 2$.

En general, si $|S| = 2^{n+1}$, escribimos $S = S_1 \cup S_2$, donde $|S_1| = |S_2| = 2^n$. Para determinar los elementos máximo y mínimo de cada uno de los conjuntos S_1 y S_2, necesitamos a_n comparaciones. Si comparamos los elementos máximos de S_1 y S_2 y luego los elementos mínimos, necesitamos una comparación más para determinar finalmente cada uno de los elementos máximo y mínimo de S; en consecuencia

$$a_{n+1} = 2a_n + 2, \quad n \geq 1 \text{ y } a_1 = 1.$$

Vemos que se trata de una relación de recurrencia lineal, de primer orden, no homogénea y con coeficientes constantes.

La solución general de la relación homogénea asociada $a_{n+1} - 2a_n = 0$, esta dada por $a_n^{(h)} = c(2^n)$. Ahora, utilizamos el método de coeficientes indeterminados para hallar una solución particular $a_n^{(p)}$. Como f(n) = 2 no es solución de $a_{n+1} - 2a_n = 0$, sea $a_n^{(p)} = A$, una constante. Sustituyendo esta solución en la relación original vemos que A = 2A + 2, con lo cual A = –2.

Así $a_n = c(2^n) - 2$. Utilizando la condición inicial $a_1 = 1$, obtenemos c = 3/2. Por lo tanto la solución general de la relación está dada por $a_n = (3/2)2^n - 2$, $n \geq 1$.

FUNCIONES GENERATRICES

Comenzaremos con el siguiente concepto.

Sea $a_0, a_1, a_2, \ldots$ una sucesión de números reales. Se introduce una variable formal x y se construye la siguiente serie de potencias de x

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \qquad (1)$$

La función así obtenida se denomina *función generatriz* asociada a la sucesión de números $\{a_j, j \geq 0\}$.

Cabe aclarar que la serie de potencias (1) no es solamente una "serie de potencias formal" sino una función bien definida que converge para todo x en algún intervalo alrededor del origen. Sin embargo, en nuestro trabajo con funciones generatrices nos ocuparemos más de los coeficientes de las potencias de x que de la convergencia . Si bien el concepto de convergencia es muy importante, no lo necesitaremos para el material de esta sección. La mayoría de las operaciones usualmente realizadas con funciones generatrices pueden ser rigurosamente justificadas sin tener en cuenta la convergencia de la serie.

Examinaremos ahora varias fórmulas y ejemplos relacionados con las series de potencias, que luego usaremos para obtener los coeficientes de términos particulares en una función generatriz.

Ejemplo 3: Para cualquier $n \in \mathbf{Z}^+$, el teorema del binomio nos asegura que:

$$(1 + x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \ldots\ldots + \binom{n}{n} x^n,$$

de modo que $(1 + x)^n$ es la función generatriz asociada a la sucesión

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots\ldots \binom{n}{n}, 0, 0, 0, 0, \ldots\ldots$$

Queremos extender esta idea al caso en que n sea un entero negativo.

Si $n, r \in \mathbf{Z}^+$ y $n \geq r > 0$, tenemos

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{[n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)]}{r!}$$

Si $n \in \mathbf{R}$, usamos $[n\,(n-1)\,(n-2)\,.\,.\,.\,.\,(n-r+1)]\,/\,r!$ como la definición de $\binom{n}{r}$.

Entonces, si $n \in \mathbf{Z}^+$, tenemos

$$\binom{-n}{r} = [(-n)(-n-1)(-n-2)\ldots\ldots(-n-r+1)]\,/\,r!$$

$$= (-1)^r\,(n)(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+r-1)\,/\,r!$$

$$= (-1)^r\,(n+r-1)!\,/\,[(n-1)!\,r!] = (-1)^r \binom{n+r-1}{r}$$

Para $n \in \mathbf{Z}^+$, el desarrollo en serie de Maclaurin para $(1 + x)^{-n}$ está dado por

$$(1 + x)^{-n} = 1 + (-n)x + (-n)(-n-1)\,x^2 / 2! + (-n)(-n-1)(-n-2)\,x^3 / 3! + \;.\,.\,.$$

$$= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-n)(-n-1)(-n-2).....(-n-r+1)}{r!} x^r$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{n+r-1}{r} x^r = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-n}{r} x^r$$

Esto generaliza el teorema binomial del capítulo 2 y muestra que $(1 + x)^{-n}$ es la función generatriz de la sucesión $\binom{-n}{0}, \binom{-n}{1}, \binom{-n}{2}, \binom{-n}{3}, \ldots.$

Ejemplo 4:
a) La serie infinita $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots.$ puede escribirse en forma más compacta como $1/(1 - x)$. Así $1/(1 - x)$ es la función generatriz de la sucesión 1, 1, 1, 1, ...

Si multiplicamos la función anterior por x, esto es $x/(1 - x) = x + x^2 + x^3 + \ldots$, obtenemos la función generatriz de la sucesión 0, 1, 1, 1, 1, ...

b) Como $1/(1 - x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots. = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$, tomando la derivada de cada lado obtenemos:

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} = \frac{d}{dx}(1-x)^{-1} = (-1)(1-x)^{-2}(-1) = \frac{1}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{d}{dx}(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots..) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots...$$

En consecuencia, $1/(1 - x)^2$ es la función generatriz de la sucesión 1, 2, 3, 4,...., mientras que $x/(1 - x)^2 = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 \ldots.$ es la función generatriz para la sucesión 0, 1, 2, 3, 4, ...

UTILIZACIÓN DE LAS FUNCIONES GENERATRICES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMBINATORIOS

Ejemplo 5:

Demostraremos que $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$, donde n es un entero positivo.

Esta identidad puede demostrarse de dos maneras: mediante un argumento combinatorio o utilizando la función generatriz.

Para la primera de ellas, consideremos los 2n objetos divididos en dos grupos, uno formado por n de los 2n objetos, y el otro por los n restantes. Para elegir n elementos del conjunto total podemos seleccionar k del primer grupo de $\binom{n}{k}$ maneras, y n – k del segundo grupo de $\binom{n}{n-k}$ maneras. Por la regla del producto, para cada valor fijo de k el número de reagrupamientos es igual a $\binom{n}{k}\binom{2n-n}{n-k}$. Dejando que k tome todos los valores posibles ($0 \le k \le n$), y sumando los correspondientes resultados se obtiene el número total de elecciones:

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{2n-n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$$

con lo cual se tiene probada la igualdad.

El uso de la función generatriz nos proporciona una segunda demostración. Sabemos que:

$$(1 + x)^{2n} = [\ (1 + x)^n\ ]^2$$

Comparemos los coeficientes de las respectivas enésimas potencias. Por el ejemplo 3, el coeficiente de x^n en $(1 + x)^{2n}$ es $\binom{2n}{n}$, y el de $[\ (1 + x)^n\ ]^2 = \left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+........+\binom{n}{n}x^n\right]^2$ es $\binom{n}{0}\binom{n}{n}+\binom{n}{1}\binom{n}{n-1}+$
$+\binom{n}{2}\binom{n}{n-2}+........+\binom{n}{n}\binom{n}{0}$. Como $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$, para $0 \le k \le n$, por ser números complementarios, se tiene que el coeficiente de x^n en $[(1 + x)^n]^2$ es $\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+......+\binom{n}{n}^2 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$. Luego se cumple la igualdad.

EL MÉTODO DE LAS FUNCIONES GENERATRICES

Ahora recibiremos la ayuda de la función generatriz para resolver relaciones de recurrencia. En lugar de encontrar la solución de una relación de recurrencia mediante una expresión para el valor de la sucesión, también podemos determinar la función generadora de la sucesión y a partir de ella obtener la solución general.

Presentaremos el funcionamiento de este método mediante un ejemplo. Si bien el ejemplo seleccionado resulta más sencillo de resolver utilizando el método de coeficientes indeterminados, el método de las funciones generatrices es la herrramienta indispensable para resolver relaciones de recurrencia de orden superior a 2 y de sistemas de relaciones de recurrencia.

Consideremos la siguiente relación de recurrencia

$$a_{n+2} - 5\, a_{n+1} + 6a_n = 2, \quad n \geq 0$$

con condiciones iniciales $a_0 = 3$, $a_1 = 7$.

Multiplicamos esta relación por x^{n+2}, puesto que n+2 es el máximo subíndice que aparece en ella. Esto nos da

$$a_{n+2}\, x^{n+2} - 5\, a_{n+1}\, x^{n+2} + 6a_n\, x^{n+2} = 2\, x^{n+2} \qquad n \geq 0$$

Luego sumamos este conjunto infinito de ecuaciones y obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^{n+2} - 5\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+2} + 6\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 2\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2} \qquad (2)$$

Queremos despejar a_n en términos de n. Para esto, sea f(x) = $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ la función generatriz para la sucesión a_0, a_1, a_2, ... Podemos volver a escribir la ecuación (2) de modo que todos los subíndices de a concuerden con el exponente correspondiente en x

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^{n+2} - 5\,x \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1} + 6\,x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 2\,x^2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Luego esta ecuación toma la forma

$$(f(x) - a_0 - a_1x) - 5x\,(f(x) - a_0) + 6\,x^2\, f(x) = \frac{2\,x^2}{1-x}$$

o

$$(f(x) - 3 - 7x) - 5x\,(f(x) - 3) + 6\,x^2\, f(x) = \frac{2\,x^2}{1-x}.$$

Despejamos f(x) para obtener :

$$(1 - 5x + 6x^2)\, f(x) = 3 - 8x + \frac{2x^2}{1-x}$$

de lo cual se sigue que

$$f(x) = \frac{10x^2 - 11x + 3}{(1-x)(1-2x)(1-3x)}\,.$$

Hacemos una descomposición en fracciones simples para obtener

$$f(x) = \frac{2}{(1-3x)} + \frac{1}{1-x}$$

Para encontrar la solución general a_n, debemos determinar el coeficiente de x^n en f(x), es decir necesitamos averiguar el coeficiente de x^n en cada uno de los dos sumandos. Utilizando el ejemplo 4 a), f(x) puede ser reescrita como

$$f(x) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n + \sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

Por lo tanto $a_n = 2\,(3^n) + 1, \quad n \geq 0.$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alberto, M; Schwer, I.; Camara, V; Rogiano, C.; Meinero, S. (2002). *Elementos de Matemática Discreta*. Santa Fe: Centro de Publicaciones. UNL.

Albertson, M.; Hutchinson, J. (1988). *Discrete mathematics with algorithms*. N.Y. John Wiley & Sons.

Grimaldi, R. (1997). *Matemática Discreta y Combinatoria. Una introducción con aplicaciones*. Tercera Edición. México: Adisson Wesley Iberoamericana.

Liu, C. L. (1995). *Elementos de Matemáticas Discretas*. México: Mc Graw Hill.

Santos, L. M. (1994). *La resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas.* Cuaderno de Investigación Nº 28. CINVESTAV–IPN. México.

Young, R. (1992) *Excursions in calculus. An interplay of the continuous and the discrete.* Mathematical Association of America. Washington, D.C.

Fumero, Y; Alberto, M. (2002). *Relaciones de recurrencia y funciones generatrices*. En Alberto, M; Schwer, I.; Camara, V; Rogiano, C.; Meinero, S. (2002). *Elementos de Matemática Discreta*. Santa Fe: Centro de Publicaciones. UNL.