APREHENDER ÁLGEBRA UTILIZANDO CONTEXTOS SIGNIFICATIVOS

Adriana Rabino [1], Patricia Cuello[1], Mario de Munno [2]
[(1)]Colegio Salesiano "Don Bosco". [(2)] Colegio Secundario "Amuyen".
San Carlos de Bariloche. Provincia de Río Negro. (Argentina)
solla@bariloche.com.ar alberguel@bariloche.com.ar

ENSEÑANZA TRADICIONAL DE ÁLGEBRA

En la enseñanza tradicional no se tienen suficientemente en cuenta las dificultades en la comprensión, por parte del alumno, del tratamiento algebraico para la solución de situaciones problemáticas; logrando, en el mejor de los casos, que el alumno se convierta en un mero repetidor de procedimientos absolutamente rígidos, sin profundizar en el origen y significado de las distintas representaciones algebraicas y sus métodos de solución.

Gerard Vergnaud en su artículo: "Tiempo largo y tiempo corto en el aprendizaje del álgebra", analiza ciertos aspectos a tener en cuenta en la transición entre el tratamiento aritmético de una situación problemática a resolver y el tratamiento algebraico:

> *"El álgebra representa una doble ruptura espistemológica: por una parte , la introducción de un desarrollo formal en el tratamiento de problemas habitualmente tratados intuitivamente, por otra parte la introducción de objetos matemáticos nuevos como ecuación e incógnita, función y variable, monomio y polinomio. "*
> *" Algunas de las dificultades que se presentan en la Introducción del álgebra en el nivel medio: la significación del signo de igualdad, la introducción de procedimientos matemáticos nuevos, la función del álgebra con respecto a la aritmética, el sentido que se le puede dar eventualmente a la solución negativa de una ecuación, las nociones de sistema y de independencia".*
> *"... el equilibrio de la balanza permite dar sentido a la vez a las propiedades de simetría y transitividad del signo de igualdad y a las manipulaciones algebraicas que permiten resolver las ecuaciones con valores positivos".*
> *"La aritmética consiste en elegir de manera intuitiva las incógnitas intermedias así como los datos y las operaciones a utilizar para calcularlas, mientras que el álgebra consiste en extraer relaciones sin comprometerse en un cálculo, y después tratar las ecuaciones de manera casi automática sin tener en cuenta el sentido. Por otro lado, el álgebra exige más a menudo que se manipulen incógnitas, lo que es antiintuitivo: los alumnos rechazan razonar y operar sobre incógnitas o sobre números desconocidos".*

Asimismo, Patricia Perry en su artículo: “Aspectos claves en el álgebra escolar: ¿sabe que responderían sus estudiantes?, hace referencia a las ideas centrales consideradas por Booth (“Children´s difficulties in beginning algebra”- artículo, 1988). Menciona “aspectos que apuntan a diferencias importantes entre lo que implica hacer aritmética y hacer álgebra”, entre ellos:

> *" El foco de la actividad algebraica y la naturaleza de las respuestas: el foco de la actividad aritmética es encontrar respuesta numéricas particulares mientras que el foco en la actividad algebraica es deducir procedimientos y relaciones, expresarlos en forma general y manipular con ellas.*
> *El uso de la notación y la convención en álgebra: en aritmética , + significa realizar la operación de adición y el = significa escribir la respuesta, en cambio en álgebra + puede representar no sólo la acción de adicionar sino también el resultado de la correspondiente acción. De la misma manera el signo = puede representar no sólo la acción de escribir el resultado sino también una relación de equivalencia.*
> *El significado de las letras y variables: en aritmética las letras se usan principalmente como etiquetas para representar objetos concretos mientras que en álgebra el uso de la letra está destinado principalmente a representar valores. En casos donde la letra, para la aritmética, representa un valor numérico, este es único; mientras que en álgebra las letras se usan para generalizar números...”*

En álgebra, las letras se usan de diversas maneras. Pueden representar:

- ✓ un número o números desconocido/s específico/s, como en las ecuaciones **$5x + 3 = 13$** ó **$x^2 = 36$**,
- ✓ una cantidad variable que tiene relación con otra variable, como en **$y = 4x$**,
- ✓ una generalización que puede tomar valores de un conjunto numérico, como en **$x + (-x) = 0$**,
- ✓ un rótulo u objeto, como en **3P = 1Y** (3 pies = 1 yarda).

En el desarrollo de estrategias algebraicas, los alumnos deberían comenzar utilizando el lenguaje coloquial para explicar sus razonamientos; progresivamente, incorporan el uso de la letra como objeto, ante la necesidad de una representación más práctica. Más adelante, la utilizará como incógnita en la resolución de ecuaciones.

Actualmente se trata de desarrollar la enseñanza-aprendizaje del álgebra iniciando a los estudiantes con un lenguaje transicional que facilita la aproximación a una comprensión de los símbolos.

Se deben señalar importantes obstáculos habituales que se presentan en algunos aspectos del tratamiento algebraico de situaciones problemáticas: traducción del lenguaje coloquial al simbólico, generalización (siempre intentan asociar a un valor numérico), operaciones inversas (al despejar de una ecuación), interpretación de la solución de un sistema de ecuaciones o de una ecuación, diferencias entre el tratamiento dado a valores conocidos y desconocidos ($3 + 2x = 5x$).

“Al comienzo los alumnos tienden a recurrir y asociar las letras a otros aspectos accesibles de su experiencia personal . Por ejemplo: asocian la letra con el número de orden en el alfabeto y se sugiere que esto se debe a las experiencias de los estudiantes con los rompecabezas y actividades donde se utilizan códigos.” (Mc Gregor y Stacey,1997).

ENSEÑANZA A PARTIR DE LA MATEMÁTICA EN CONTEXTO (M.I.C.)

Los símbolos tienen que servir realmente para recordar y comprender los procesos que se han seguido, y para facilitar y hacer posibles los cálculos.

Para poder comprender el sentido de los símbolos hace falta que se haya interiorizado la doble relación entre las situaciones concretas y las expresiones algebraicas:

SITUACIÓN CONCRETA $\longleftrightarrow$ EXPRESIÓN ALGEBRAICA

Streefland(1995) encontró, a partir de sus experiencias de enseñanza, que la comprensión del significado de símbolos literales es un constituyente importante en el proceso de matematización vertical (formalización progresiva) en los alumnos. “El cambio del significado de una letra, necesita ser observado y se debe tener cuidado durante el proceso de aprendizaje. De esta manera el nivel matemático del pensamiento de los niños evoluciona”.

La dificultad del lenguaje algebraico frecuentemente se subestima y no es explicativo por si mismo: “su sintaxis consiste en un largo número de reglas basadas en principios que, parcialmente, contradicen el lenguaje cotidiano y el lenguaje de la aritmética y que, además, son mutuamente contradictorios” (Freudenthal 1992) .

Por ejemplo 3 + 4 es un problema de aritmética, se debe interpretar como sumar 3 a 4. Sin embargo, a + b no es fácilmente interpretado como un problema.

Por lo general no se dedica a este doble proceso ni el tiempo ni los recursos suficientes. La introducción al método algebraico se hace, la mayoría de las veces, con demasiada rapidez y sin valorar de forma adecuada las dificultades que conlleva su correcta asimilación. Éstas no se deben , únicamente, a una asimilación deficiente de los procesos matemáticos previos, sino que se deben también a la naturaleza de los elementos y de la propia actividad algebraica. El salto al nivel formal se realiza demasiado rápido y no deja tiempo a los estudiantes a desarrollar sus propios esquemas. En definitiva, el álgebra tradicional, es vista como estéril, desconectada de otros aspectos de la matemática y del “mundo real”. (Romberg y Spence 1993).

Para que el método algebraico se pueda incorporar como algo natural, es necesario que, además de cambiar los símbolos, se produzca un cambio en su significado, es decir, que no se haga solamente una sustitución de los números por letras, sino que se realice el paso de números a variable.

A menudo el cambio se produce únicamente en los símbolos y se realiza sólo el paso:

NÚMEROS LETRAS

El igual de las ecuaciones ha perdido su carácter unidireccional y hay que manejar simultáneamente sus dos lados. Es necesario que los alumnos lleguen a asimilar la situación de equilibrio que representa el igual y su propiedad simétrica. Sólo así se conseguirá que las reglas formales de resolución no sean meros trucos carentes de sentido.

Desde el punto de vista formal es posible dar un sentido a las operaciones algebraicas usadas al resolver ecuaciones, utilizando una balanza.

Dado que los problemas de razonamiento algebraico tienen múltiples trayectorias de solución, son aptos para aproximaciones creativas. Se debe entusiasmar a los estudiantes a considerar y explorar métodos alternativos de solución y , una vez que resolvieron el problema, reflexionar sobre sus métodos propios de resolución y comparar trayectorias de solución de sus compañeros. Habiendo seguido el trayecto de razonamiento de otros en la solución de un problema es una buena manera de desarrollar razonamientos lógicos y verificar estrategias.

Una vez que los alumnos tienen experiencia en describir en prosa trayectos de solución, se pueden discutir las representaciones simbólicas de los pasos. Los estudiantes deben ser asistidos para que comprendan cómo las ecuaciones y sus modificaciones representan acciones con los objetos. De esta manera, los alumnos comprenderán mejor el proceso de traducción de “palabras a símbolos”.

PRÁCTICA PROPUESTA PARA EL TALLER (COMPARAR CANTIDADES)

El manejo de sistemas de ecuaciones permite enfrentarse a una gama amplia de situaciones, en contextos de todo tipo, relacionados con la vida cotidiana, con aplicaciones de las matemáticas a otros campos de conocimiento, o con el análisis y resolución de problemas planteados desde otras partes de las propias matemáticas. Pero, para que sea efectivo ese aumento en la capacidad de resolver problemas que proporcionan los sistemas, es preciso que el que los utiliza sepa qué es un sistema de ecuaciones y que significa su solución, así como que sea capaz de resolverlos con ciertas garantías de éxito.

La idea fundamental para resolver sistemas de ecuaciones es que se puede sustituir un sistema de ecuaciones por otro más sencillo con tal de que tenga las mismas soluciones que él, o lo que es lo mismo, que sea equivalente al dado (trueque, intercambiar y comparar cantidades, notación de libreta).

Las cuatro estrategias que se desarrollan en este trabajo son: “adivina y chequea (ensayo-error)”, “razonando con el cambio”(trueque), “tabla de combinaciones”(tabla de doble entrada) y “notación de libreta” (método de eliminación de Gauss). Los estudiantes se dan cuenta que “la libreta” es más poderosa que “adivina y chequea”; que una estrategia razonable puede, a veces, ser más eficiente para resolver un problema. Más adelante los alumnos visualizan que estas estrategias son isomorfas.

Entonces, el próximo paso es escribir la información del problema en ecuaciones y resolver el problema utilizando estas ecuaciones. Dado que los estudiantes vieron diferentes representaciones, las ecuaciones tienen un significado ahora y pueden relacionarse con cualquiera de las otras estrategias.

De esta manera, los estudiantes comprenden el significado de la ecuación y el rol de las variables y además, pueden relacionar el significado con el contexto de la situación problemática. Como se dijo antes, no son forzados a utilizar más que las estrategias concretas pre-formales. El objetivo de la unidad es que comiencen a utilizar variables y ecuaciones, sabiendo de donde provienen. Los estudiantes siempre pueden seguir utilizando cualquiera de las estrategias mencionadas para resolver el problema; una estrategia con la cual se sientan cómodos y que sea apropiada para la situación problemática.

Estas estrategias son matematizaciones conceptuales del problema. Mediante la interacción y discusión, los estudiantes (con el docente) explicitan estas representaciones y son formalizadas usando variables y ecuaciones. Al final de la unidad, los alumnos aplican los conceptos y representaciones formales para resolver un problema.

Las situaciones realísticas juegan un rol importante en el desarrollo de los conceptos matemáticos: primero, ellas conforman el mundo de problemas que necesitan ser resueltos, los problemas realísticos son la fuente de donde los estudiantes desarrollan matemática; segundo, pueden aplicar sus conocimientos matemáticos para resolver problemas en situaciones reales (Gravemeijer, 1994).

EXPERIENCIAS PREVIAS

Las primeras versiones de la unidad “Comparar cantidades” fueron probadas en escuelas holandesas par ver si las ideas del diseñador eran viables. Pasó que los estudiantes eran más creativos y lograban obtener mejores resultados que los previstos. Los pasos para llegar a manejar estrategias y modelos más sofisticados para resolver sistemas de ecuaciones no fue tan difícil como pensamos al principio.

Mientras el problema tenga sentido para el alumno(que pueda entender de que se trata el problema), puede empezar a resolverlo y en muchos casos llegar a resolverlo.

Aprendimos que los estudiantes pueden hacer más de lo que imaginamos.

NUESTRA EXPERIENCIA

A partir del desarrollo de “Comparar cantidades” en 1er año Polimodal con tres grupos del Colegio Don Bosco y un grupo del Colegio Amuyen, ambos colegios de San Carlos de Bariloche, se pudo observar que el material de trabajo resultó claro para los alumnos, sin dificultades para su interpretación y realización. El carácter ameno de las actividades produjo entusiasmo en los estudiantes y todos trabajaron, pudiendo resolver las situaciones problemáticas utilizando estrategias formales y no formales. Cabe señalar que las mejores producciones fueron de aquellos alumnos que no se destacaban habitualmente.

Después de realizada cada sección, se socializaron y discutieron los resultados, jerarquizando el uso de las distintas estrategias para cada situación problemática. Esta “clasificación” de estrategias permitió que combinaran distintos métodos en cada una. Al hacer sustituciones, los alumnos no necesariamente pasaban por la unidad de la incógnita(despejando x, por ejemplo), sino que despejaban solo la parte que les convenía(por ejemplo si necesitaban sustituir 6x y tenían 3x escribían 2.3x sin despejar la x).

A partir del trabajo con las actividades del cuadernillo pudieron inventar problemas, resolver sistemas de ecuaciones “tradicionales”, interpretar problemas y resolverlos.

En definitiva trabajaron y aprendieron 6 métodos de resolución: sustitución, igualación, reducción, tabla de doble entrada, método de eliminación de Gauss y método gráfico.

CONCLUSIONES

Las situaciones realísticas son muy críticas para comenzar con ellas el desarrollo de los conceptos matemáticos.

Presentando a los estudiantes problemas en un contexto real, los mismos usan estrategias que no necesariamente fueron aprendidas en la escuela. El problema se resuelve de una manera que tiene sentido para ellos. De todas maneras, como es necesario que el alumno se mueva de “adivina y chequea” siguiendo el camino de la matematización vertical, que crezca en su “poder” matemático; debemos usar herramientas. Estas herramientas, o estrategias diferentes, son usadas como nexo entre lo concreto y lo abstracto. La experiencia nos enseña que si queremos estudiantes que utilicen estrategias matemáticas para resolver un problema, debemos proveer de problemas que exijan eso.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Socas, Camacho, Palarea y Hernández (1989). *Iniciación al álgebra*. Editorial Síntesis.

Grupo Azarquiel (1993). *Ideas y actividades para enseñar álgebra*. Editorial Síntesis.

Greenes, Findell: *Desarrollando habilidades de razonamiento de álgebra en los estudiantes*.

Artigue M., Douady, R., Moreno , L., Gómez, P. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*. Una Empresa Docente. Grupo Editorial Iberoamericana.

Radoford, Luis (2001). *Signos y significados en los pensamientos algebraicos emergentes de los estudiantes*. En *Educational Studies in Mathematics* 42.

Van Reeuwijk, M (1995). *El rol de situaciones realísticas en el desarrollo de herramientas para resolver sistemas de ecuaciones*. Presentado en la conferencia AERA. San Francisco.

Streefland, L. (1995). *Desarrollando actividades en donde se llega al álgebra naturalmente – ecuaciones.* . Presentado en la conferencia AERA. San Francisco.

Van Ameron, B. (1998). *Reinvención del álgebra*. Presentado en la Conferencia Internacional sobre Simbolización y Modelización en la Educación Matemática. Utrecht.

Campos Lins, R. (1994). *Campos semánticos y el problema del significado en Álgebra*. En Revista UNO. No 1.

Vergnaud, G. *Tiempo largo y tiempo corto en el aprendizaje del álgebra*.

Perry, P. (1999). *Aspectos claves del álgebra escolar: ¿Sabe qué responderían sus estudiantes?"* En Revista EMA . Vol.4 .No 3.

Malara, N. (1999). *Un proyecto de aproximación al pensamiento algebraico: Experiencias, resultados, problemas*. En Revista EMA. Vol5. No 1.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*.

Meyer, M., Ludwig M. (1998). *Enseñando Matemática en Contexto: una oportunidad de cambio. En* Innovations in Currículum. Vol.4 No 4.

Fundación Nacional para la Ciencia. Corporación Educacional de la Enciclopedia Británica. (1999). *Las Matemáticas en Contexto*. Desarrollado en conjunto con el Centro para la Investigación Educacional de Wisconsin y el Instituto Freudenthal de la Universidad de Utrecht. Holanda.