RAÍCES COMPLEJAS DE LAS FUNCIONES CUADRÁTICAS: INTERPRETACIÓN GRÁFICA

Haydeé Blanco
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González"
Buenos Aires (Argentina)

RESUMEN

En este artículo se presenta una forma de graficar la parábola conociendo sus raíces complejas.

Las funciones cuadráticas, $\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c}$, siendo **a**, **b** y **c** números reales (con **a** distinto de 0) tienen por gráficos curvas planas llamadas *parábolas*.

Estas curvas se pueden graficar confeccionando una tabla de valores, o bien llegando a la expresión canónica de la misma**, y = a.(x - h) + k = 0**, de la cual se obtienen sus ceros (raíces) y vértice.

Las raíces de una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ se calculan con la fórmula:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Las raíces se obtienen con:

$$\frac{-b + \sqrt{b^2} - 4ac}{2a}$$

y con

$$\frac{-b - \sqrt{b^2} - 4ac}{2a}$$

Si $b^2 - 4ac \geq 0$ las raíces son **números reales** pues el resultado da un número real. Por lo tanto en el gráfico la parábola corta al eje de las x.

En cambio si $b^2 - 4ac < 0$ las raíces de la ecuación son **números complejos** (pues el cálculo se remite a la raíz cuadrada de un número negativo). En el gráfico, observamos que la parábola **no corta al eje de las x.**

Daremos a continuación una interpretación gráfica de las raíces complejas de la ecuación cuadrática.

Sabemos que las raíces complejas son números complejos conjugados, es decir, si una raíz es

z = a + bi

la otra es

z = a – bi

La interpretación consiste en saber como graficar la parábola conociendo sus raíces complejas.

Observamos:

Si la parábola no tiene raíces reales, no cortará al eje de las x (estará "por encima" o "por debajo" del eje, según si el valor del coeficiente principal es positivo o negativo, respectivamente).

Pero la parábola simétrica a la dada respecto del vértice *siempre* cortará al eje en dos raíces.

Por lo tanto, graficamos la parábola simétrica que tiene raíces y luego al tomar la simétrica a ésta respecto del vértice, encontramos la parábola buscada.

Propiedad:

Si las raíces complejas son **a + bi** y **a - bi**, entonces la parábola simétrica respecto del vértice tendrá las raíces reales **a + b** y **a - b.**

Observamos que como la coordenada x del vértice: x_v está en el punto medio entre las raíces, tendremos que:

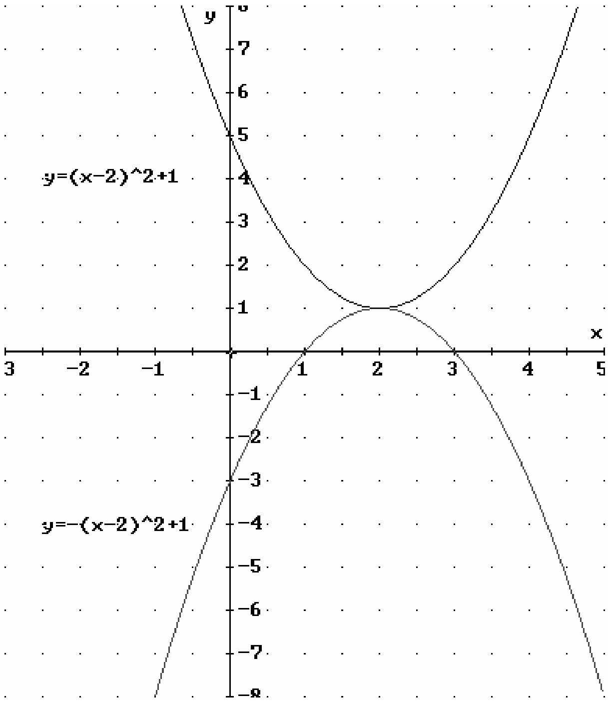
$$x_v = \frac{(a+b)+(a-b)}{2} = \frac{2a}{2} = a \cdot$$

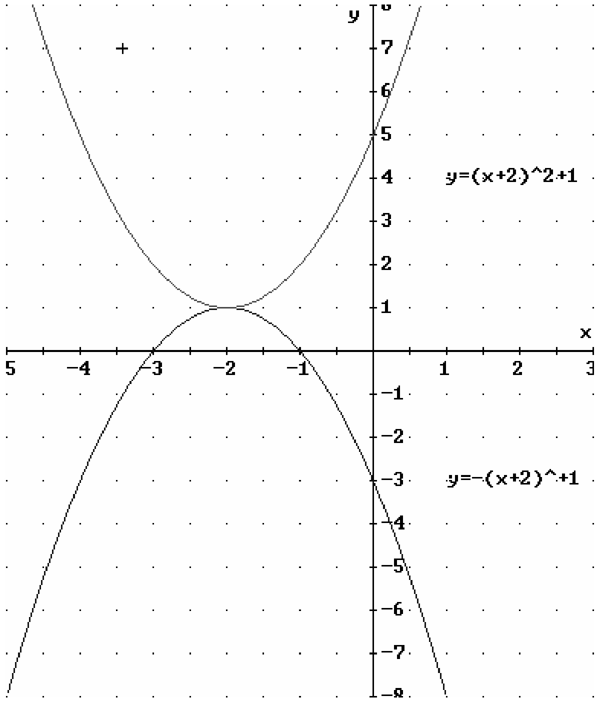
Conociendo la coordenada x del vértice, se halla la coordenada y del vértice: y_v reemplazando la x_v en la expresión dada. De esta forma se conoce el vértice de la parábola buscada.

Con este dato más las raíces podemos graficar la parábola auxiliar y al tomar la simétrica respecto del vértice obtenemos el gráfico buscado.

Ejemplo:

Graficamos $y = x^{2} - 4x + 5$





Hallamos los ceros de la parábola encontrando las raíces de la ecuación $x^2 - 4x + 5 = 0$.

Aplicamos la fórmula:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

y obtenemos:

$$\frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = \begin{Bmatrix} \dfrac{4+2i}{2} = 2 + i \\ \dfrac{4-2i}{2} = 2 - i \end{Bmatrix}$$

Luego las raíces son **2 + i** y su conjugada **2 – i**.

La parte real es **a = 2** y la imaginaria **b = 1** y **–1**. Entonces graficamos la parábola que tiene raíces reales **a + b** y **a – b** o sea 2 + 1 = 3 y 2 - 1 = 1.

El vértice de ésta es V = (x_v; y_v) con $\mathbf{x_v = a = 2}$ y la coordenada y_v se calcula: $\mathbf{y_v = 2^2 - 4.2 + 5}$ entonces, V = (2; 1).

Luego tomamos su simétrica respecto del vértice y obtenemos la gráfica de la parábola deseada.

En el segundo gráfico, graficamos: $y = x^2 + 4x + 5$ y su simétrica.

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPIEDAD

Sabemos que una cuadrática cuyo gráfico no corta al eje **x** tiene la forma

$$\mathbf{y = a.(x - h) + k = 0}$$

con **a** y **k** ambos positivos (por encima del eje) o ambos negativos (por debajo del eje).

Vamos a demostrarlo para ambos positivos. La demostración es análoga para ambos negativos.
Las **raíces complejas** surgen al resolver

$$a.(x - h)^2 + k = 0.$$

Despejando:

$$(x-h)^2 = -\frac{k}{a}$$

$$|x-h| = \sqrt{-\frac{k}{a}}$$

esto da un número complejo

$$|x-h| = \sqrt{\frac{k}{a}}\ i$$

$$x-h = \sqrt{\frac{k}{a}}\,i \qquad \text{ó} \qquad x-h = -\sqrt{\frac{k}{a}}\,i$$

$$x = h + \sqrt{\frac{k}{a}}\,i \qquad \text{ó} \qquad x = h - \sqrt{\frac{k}{a}}\,i$$

Entonces la parte real de las raíces es **h** y la imaginaria:

$$\sqrt{\frac{k}{a}} \quad \text{y} \quad -\sqrt{\frac{k}{a}} \ .$$

Además, observamos que al tomar el punto medio entre las dos raíces se obtiene que la coordenada $\mathbf{x_v}$ es **h** coincidiendo con la parte real de las raíces.

Ahora, la parábola simétrica a **y = a. (x – h) ² + k** respecto del vértice es: **y = - a. (x – h) ² + k.** Esta nueva parábola tiene las siguientes raíces **reales**:

$$\mathbf{-\ a\ (x-h)^2 + k = 0}$$

$$(x-h)^2 = \sqrt{\frac{k}{a}}$$

$$|x-h| = \sqrt{\frac{k}{a}}$$

$$x-h = \sqrt{\frac{k}{a}} \qquad \text{ó}$$

$$x-h = -\sqrt{\frac{k}{a}}$$

$$x = h + \sqrt{\frac{k}{a}} \qquad \text{ó} \qquad x = h - \sqrt{\frac{k}{a}}$$

Esto es lo que queríamos mostrar dado que h y $\sqrt{\frac{k}{a}}$ son las partes real e imaginaria de las raíces de la parábola original.

CONCLUSIÓN

El objetivo del tema es obtener la parábola con raíces complejas fácilmente, graficando su parábola simétrica con raíces reales, que el alumno trabaja con mayor habilidad