LA ESPONJA DE MENGER TIENE DIMENSIÓN d = 2,766833

Edgardo L Fernández Stacco
Universidad Provincial del Sudoeste.
Sede Carmen de Patagones. (Argentina)

Como nos informara en la III CAREM la profesora Nelly V. de Tapia, la Federación Española de Educación Matemática realizó un homanaje al Profesorado Argentino a través de una de sus figuras más relevantes: el Prof. Luis Santaló.

Con tal motivo, en el museo ELDER de la Gran Canaria se procedió a la inauguración del símbolo representado por la Esponja de Menger como agradecimiento a la acogida que tuvieron con un importante grupo de profesores y científicos españoles que por razones diversas tuvieron que abandonar España después de la Guerra Civil de 1936 a l939.

El homenaje se concretó con la colocación de retratos de Santaló en varios lugares "del fractal", y mediante una cámara multifoco se proyectarán las imágenes sobre una pantalla.

También la III CAREM comenzó con una magnífica conferencia de Miguel de Guzmán. Ambas circunstancias me indujeron a escribir lo que sigue, para familiarizar al profesorado en general con la esponja de Menger. Seguiré precisamente en su mayor parte el libro de Miguel de Guzmán y colaboradores sobre Estructuras Fractales.

Trataremos de ser lo más elemental posible.

Muchos conocen el triádico de Cantor. Se construye como sigue. Se toma el intervalo I = [0,1], y se lo divide en tres partes iguales, desechando el del centro.

Nos quedan entonces dos intervalos E_{11} = [0,1/3] y E_{12} = [2/3,1]. Dividiendo nuevamente ambos intervalos en tres partes cada uno y extremos el central, obtenemos entonces cuatro intervalos que denominamos E_{21} , E_{22} , E_{23} , E_{24} .

Continuando el procedimiento, obtenemos en el límite un conjunto bastante extraño.

Así, la medida del intervalo I es uno, la del primer par de intervalos es 2/3. Los cuatro que siguen tienen cada uno medida 1/9, por lo que su suma total es 4/9.

Obtenemos así, en la etapa k-ésima 2^k intervalos cerrados E_{kj}, j = 1,2,....,2^k cada uno de ellos de longitud 3^{-k}.

Pongamos, para cada k = 1,2,....

$$E_k = \bigcup_{j=1}^{2^k} E_{kj} \ .$$

Estos conjuntos E_k, k = 1,2,....forman una sucesión decreciente, esto es, $E_{k+1} \subset E_k$, para todo k.

El conjunto límite de este proceso es:

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \ .$$

se lo denomina el ***triádico de Cantor.***

NOTAS

1) **E no es vacío!**
En cada E_k están por lo menos los extremos de los 2^k intervalos cuya unión nos da E_k y, por lo tanto, también están en E. Además es cerrado por ser intersección de conjuntos cerrados.

2) **E no es numerable**
Se puede demostrar, que cada elemento de E es representable en forma única por la expresión:

$$a = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \ldots + \frac{a_n}{3^n} + \ldots$$

donde cada a_i es 0 ó 2. Por lo tanto, podemos escribirlo (en base 3) como:

$$a = 0{,}a_1a_2a_3a_4\ldots a_n \ldots$$

Recíprocamente, cada expresión de este tipo (sin unos!), corresponde a un punto de E. Supongamos que estén todos en este cuadro, es decir, que podemos numerar E:

$$a^1 = 0,a_1^1 a_2^1 a_3^1 a_4^1 \ldots$$
$$a^2 = 0,a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4^2 \ldots$$
$$a^3 = 0,a_1^3 a_2^3 a_3^3 a_a^3 \ldots$$

y formamos otro número $0,b_1b_2b_3 \ldots$ a partir de él, de acuerdo a la siguiente regla:

si $a_n^n = 0$, $b_n = 2$
si $a_n^n = 2$, $b_n = 0$.

El número así formado no está en el cuadro, y sin embargo está en E y por lo tanto E no puede ser numerable, tiene la potencia del continuo.

Sin embargo, este conjunto E tiene medida de Lebesgue unidimensional nula.

En efecto, en cualquier etapa k, la familia de intervalos $\{E_{kj}\}$, $j = 1,2,\ldots,2^k$ es un cubrimiento de E formado por intervalos disjuntos. Entonces, indicando con L(E) la medida de Lebesgue en R, se tiene

$$L(E) \leq L\left(\bigcup_{j=1}^{2^k} E_{kj}\right) = \sum_{j=1}^{2^k} L(E_{kj}) = 2^k ..3^{-k} = (2/3)^k \quad .$$

Puesto que la desigualdad es cierta para todo k, y $(2/3)^k$ tiende a cero para k tendiendo a infinito, L(E)= 0. Por lo tanto vemos que el conjunto de Cantor es bastante raro.

3) Pero hay más!

Observemos que cada punto, viene determinado por la sucesión de intervalos $\{E_{kj}\}$, $k = 1, 2,\ldots$, $1 \leq j \leq 2^k$, formada en cada etapa k por el intervalo E_{kj} ($1 \leq j \leq 2^k$) que contiene al punto. Además el diámetro de estos intervalos tiende a cero.

De esta forma dado cualquier intervalo (a,b) que contenga un punto $x \in E$ existe un intervalo E_{kj} de la sucesión $\{E_{kj}\}$ asociada al punto x, tal que $E_{kj} \subset (a,b)$.

Ahora bien, los puntos del intervalo abierto central resultante de dividir E_{kj} en tres partes no son del conjunto E.

Así pues, el conjunto E no contiene intervalos, es decir el conjunto está infinitamente “agujereado” o también se dice que es “poroso”.

4) Cada punto x $\in$ E es límite de la sucesión formada por los extremos de los intervalos E_{kj} de la sucesión
$\{E_{kj}\}$ asociada a dicho punto. Entonces, todo punto de E en límite de una sucesión de puntos de E.

DIMENSIONES FRACCIONARIAS

Cuando queremos medir un conjunto geométrico debemos tener en cuenta algunas cuestiones.

La primera, es como cubrimos el conjunto y la segunda, qué evaluar de estos cubrimientos.

El problema más difícil es qué evaluar, o, lo que es lo mismo, en qué “orden de tamaño medir”.

Así surge el concepto de DIMENSIÓN asociado a un proceso de medida.

Si en R^n consideramos la familia *R* de los rectángulos Q de R^n de la forma:

$$[a_1,b_1) \square \ldots \square [a_{n,}b_n) = Q$$

o sea:

$$Q = \{(x_i) \in R^n, a_i \leq x_i < b_i\}$$

definimos el volumen V(Q) de un tal rectángulo así:

$$V(Q) = (b_1 - a_1) \ldots (b_n - a_n)$$

Dado un conjunto E   R consideremos todos los cubrimientos {Q } de E, es decir, tales que

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$$

y definimos

$$L^n(E) = \inf \{ \sum_{i=1}^{\infty} V(Q_i) \ , \{ Q_i \} \text{ es cubrimiento de } E \}.$$

Vale que:

1) $L^n(\emptyset) = 0$

2) $L^n(A) \leq L^n(B)$ si $A \subset B$ (monotonía)

3) Para cualquier familia numerable $\{E_k\}$, k = 1,2,.... de subconjuntos de R^n se verifica:

$$L^n(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} L^n(E_k) \qquad \text{(subaditividad).}$$

Hemos definido así la medida exterior de Lebesgue; la función de conjunto L^n asocia a cada subconjunto de R^n un número real.

No daremos aquí la definición de conjuntos medibles Lebesgue, pero todos los abiertos los son, así como todos aquellos que se obtienen a partir de ellos mediante uniones y/o diferencias. Son los llamados Borelianos o conjuntos de Borel, entre los que se encuentran naturalmente los cerrados.

Vemos que, en el caso del triádico de Cantor, la medida de Lebesgue, L(E) = 0. Es decir, tiene la misma medida que un conjunto finito de puntos. Pero hemos visto que E tiene la potencia del continuo, el mismo número de puntos que I = [0,1]. Luego la medida de Lebesgue, no es un buen instrumento para medir ciertos conjuntos, más o menos patológicos.

Pero, **¿qué decir si introducimos categorías intermedias entre L(E) = 0 y L(I) = 1?**

Esto se hace introduciendo la dimensión de Hausdorff y otras dimensiones, como la de homotecia que es más fácil de aplicar en el caso que nos ocupa, y que en muchos casos coinciden

Examinemos un conjunto de Cantor en R^2.

.

Sea $Q = [0,1]x[0,1]$. Tomemos en cada esquina un cuadrado cerrado de lado r, $0 < r < ½$. Estos cuatro cuadrados no se superponen entre ellos. Llamamos Q_i , $1 \leq i \leq 4$ a estos cuadrados, y sea

$$E_1 = \bigcup_{i=1}^{4} Q_i \quad .$$

Despreciemos el resto del cuadrado. Repetimos el procedimiento, sobre cada uno de estos cuadrados. Tenemos que tomar ahora un cuadrado en cada esquina de lado r^2 que llamamos Q_{ij} , $1\leq i,j \leq 4$.

Obtenemos así una colección de 16 cuadrados de lado r^2, a cuya unión llamamos E_2 .Repitiendo el procedimiento, llegamos a la etapa n de la formación de 4^n cuadraditos cuya unión es el conjunto E_n . El conjunto de nuestro interés es el conjunto E tal que

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \quad .$$

Nos preguntamos: **¿Cuál es la dimensión de E?**

Puesto que en cada una de las etapas el conjunto E_n es unión de cerrados, parece adecuado decir que la dimensión "natural" de E es 2. Sin embargo como E_n es unión de 4^n cuadrados distintos de radio r^n, la superficie de E^n 4^n r^{2n} , lo que significa que, siendo $r < ¼$, la superficie de E_n se hace tan pequeña como deseemos tomando n suficientemente grande.

Como E está incluido en E_n para todo n, la superficie de E es nula y ello nos sugiere descartar la dimensión 2 para E.

Una forma de asignar una dimensión fraccionaria a E consiste en considerar tal conjunto como límite de los conjuntos E_n y asignarle en consecuencia una medida d-dimensional, límite de las medidas d-dimensionales de los conjuntos E_n .

Si d = 2 sabemos que la medida bidimensional que corresponde a E_n es 4^n r^{2n} , o lo que es equivalente, 4^n $(l_n)^2$,donde $l_n = r^n$ – es el lado de cada uno de los cuadrados que componen E_n.

Si d = 1, podemos estimar la medida unidimensional de E_n pensando en la suma del perímetro de los cuadrados que lo componen, que puede ser expresada como 4.4^n $(l_n)^2$. Resulta natural considerar la expresión 4^n $(l_n)^3$ como estimación de la medida tridimensional de E_n. Es decir , la medida d-dimensional de E_n se estima con:

$$k.4^n \, (l_n)^d$$

donde k es una constante que depende de la dimensión, pero que no varía y que solo influye como factor de proporcionalidad en el límite, pero sin alterar el hecho de que este sea cero, finito o infinito para una dimensión dada. Por el contrario, el parámetro que determina cuál de estos tres resultados finales tendrá lugar es la dimensión d.

Sabemos que salvo el caso excepcional de r = ¼ , las dimensiones enteras nos conducen a límites cero o infinito.

Ajustemos d para que el límite de la expresión que será nuestra estimación de la medida d-dimensional de E, no sea cero ni infinito.

Si podemos encontrar un valor d, esta será la dimensión que asignaremos a E. Es suficiente tomar d tal que

$$(l_n)^d = (1/4)^n$$

ya que entonces k. 4^n $(l_n)^d$ = k, para cualquier n, y este será el valor que la expresión tome en el límite.

Tomando en cuenta que $l_n = r^n$, $r^n.d = (1/4)^n$ y tomando logaritmos:

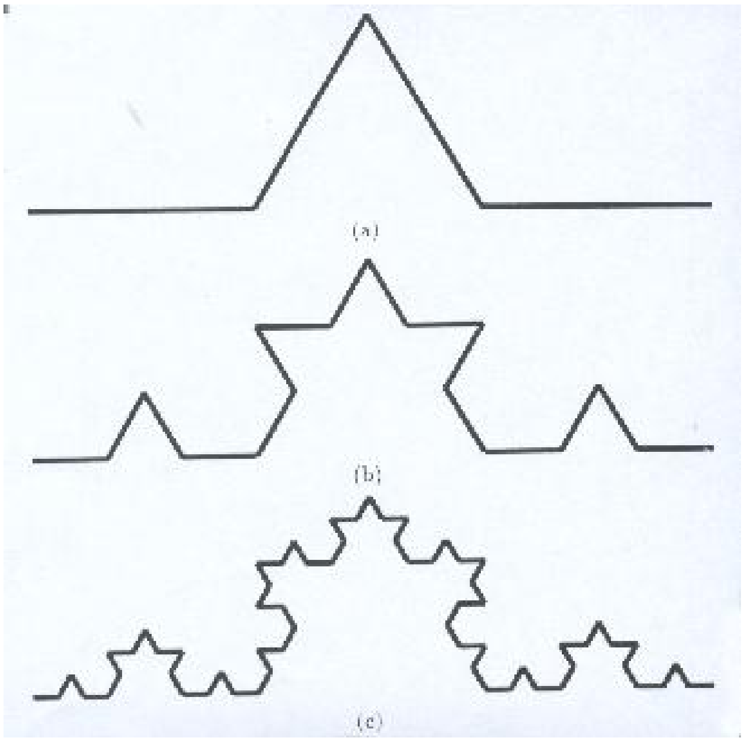
$$d = \log 4/\log (1/r).$$

Este es uno de los posibles conceptos de dimensión fraccionaria, la llamada dimensión de homotecia.

Ejemplo 1.
En el ***triádico de Cantor*** , r = 1/3 y n = 2. Luego, en este caso d = log 2/log 3 ≅ 0,6309296...

La dimensión topológica del conjunto de Cantor es cero, ya que el conjunto de Cantor no contiene ningún intervalo abierto, como vimos. Luego L(C) = 0.

Ejemplo 2.
La ***curva de Koch***.
En el intervalo I = [0,1], dividimos el intervalo por tres, pero los colocamos así

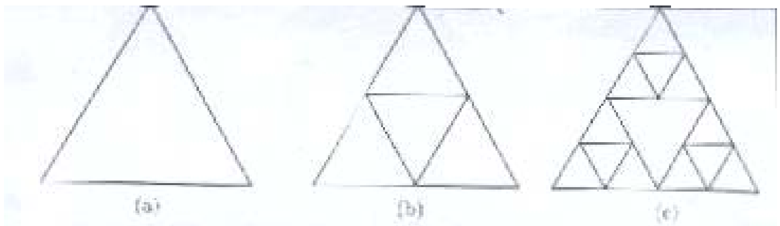


Aquí r = 1/3, n = 4 y resulta para la dimensión de la curva de Koch d = log 4/log 3 ≅ 1.261819...

Ejemplo 3.
El tapiz de Sierpinski.
Se toma un triángulo, por ejemplo de longitud 3 (equilátero). Dividimos cada lado por la mitad, construimos un nuevo triángulo dentro del anterior, que desechamos. Continuamos el procedimiento.

Ahora tenemos r = ½ , n = 3. Resulta

$$d = \log 3/\log 2 \cong 1.584963...$$



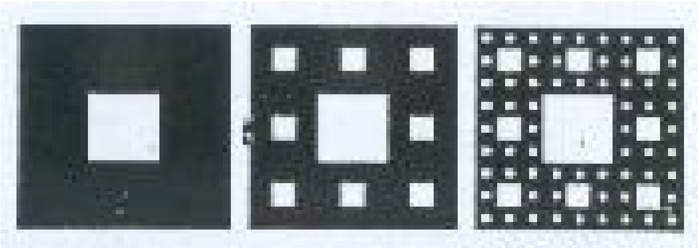
Ejemplo 4.

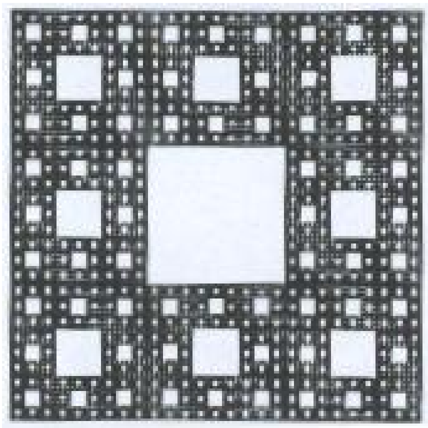
Tapiz cuadrado de Sierpinski-Mazurkiewicz.

Se toma un cuadrado de lado unidad. Lo dividimos en nueve cuadrados congruentes y sacamos el del centro. Luego sacamos el cuadrado del centro de los 8 cuadrados restantes. Y continuamos el procedimiento.

Ahora la razón de homotecia es r = 1/3 y n = 8. Por lo tanto, tenemos, para el tapiz cuadrado

$$d = \log 8/\log 3 \cong 1.892789....$$





Ejercicio 5.

La Esponja de Menger-Sierpinski-Mazurkiewicz.

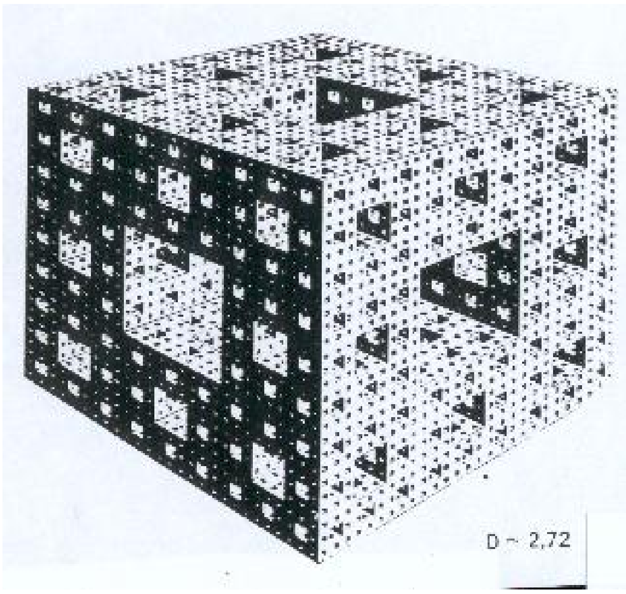
Es la generalización a tres dimensiones del tapiz anterior. Se obtiene partiendo del cubo unitario y dividiéndolo en 27 cubos congruentes.

Sacamos en el primer paso el cubo del centro. En el segundo los cubos del centro de las seis caras.

Nos quedan 20 cubos. Con ellos repetimos el procedimiento. Aquí r = 1/3 y n = 20. Tenemos entonces

$$d = \log 20 / \log 3 \cong 2,766833.....$$

Si calculamos el volumen, según Lebesgue L^3 (Esponja M-S-M) = 0-



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Estructuras Fractales y sus Aplicaciones. Miguel de Guzmán, M. A. Martín, M. Morán y M Reyes. Editorial Labor.

Space Filling Curves. Hans Sagan. Springer Verlag.