TALLER DE GEOMETRÍA
SOBRE POLÍGONOS REGULARES ESTRELLADOS

Norma S. Cotic

Buenos Aires Argentina

La aceptación que existe con respecto a la idea que el conocimiento es producto de una continua y progresiva construcción, constituye el fundamento para considerar, que la actividad del alumno es el aspecto sustancial del proceso constructivo o mejor dicho : **el constructor del conocimiento es el alumno y la actividad es el medio que permite la construcción .**

Por lo tanto el gran reto didáctico es mantener al alumno "**en actividad constructiva** " permanente.

El Taller de Geometría es un ámbito propicio para desarrollar actividades que permitan el aprendizaje por descubrimiento, teniendo en cuenta:

- **Conocimientos previos de los alumnos.**
  El aprendizaje significativo de contenidos específicos requiere actividades que permitan que esos contenidos puedan ser construidos por los alumnos.
  O sea, deben adaptarse a los conocimientos previos de los alumnos, previamente explorados por el docente.

- **Delimitación de la temática, atendiendo a los objetivos y contenidos que se desea lograr.**
  Sobre la base del desarrollo integral del educando, puede destacarse que en el **dominio cognitivo** se trata de lograr la adquisición de estrategias para la búsqueda , selección, análisis y síntesis de información, así como, del pensamiento crítico para evaluar procesos y reconocer errores.
  En el **dominio afectivo** se fomenta la confianza en la propia capacidad resolutiva y la importancia del trabajo en grupo.
  En el **dominio social** se favorece la disposición positiva hacia la cooperación en trabajos con objetivos comunes y la flexibilidad para adaptar las ideas propias a las decisiones grupales.

- **Uso de materiales variados**
  El taller de Geometría debe ser el ámbito donde el alumno pueda encontrar los materiales y recursos necesarios que le permitan buscar la solución a las problemáticas y justificar "a priori" sus descubrimientos .

Se sugieren algunos: instrumentos de medición y construcción, Geoplano, Tangram, figuras y cuerpos en cartón, plástico o madera, varillas articuladas, software de dibujo y diseño, etc.

INTRODUCCIÓN

Los polígonos son en sí mismas figuras con enormes posibilidades de estudio, desde sus elementos esenciales básicos, son utilizados permanentemente para observar o verificar propiedades y realizar conexiones con otras figuras.

En el aula, es común visualizar , construir, calcular, descubrir propiedades y relaciones con polígonos regulares convexos desde la concepción del círculo como polígono regular con un número infinito de lados.

Esas posibilidades de investigar y desarrollar nuevos conceptos se pueden ampliar con el estudio de los polígonos regulares estrellados.

Si al dividir una circunferencia en partes iguales unimos los puntos de división de dos en dos, de tres en tres, etc. y al cerrarse la poligonal hemos recorrido la circunferencia un número entero de veces, obtenemos un polígono regular estrellado.

CONOCIMIENTOS PREVIOS NECESARIOS

- Polígonos: propiedades generales
- Construcción de polígonos regulares convexos.
- Uso de instrumentos de medición y construcción.
- Cálculo de ángulos interiores y exteriores de los polígonos.
- Polígonos inscriptos.

ACTIVIDAD SUGERIDA

¿Cuántos pentágonos regulares inscriptos pueden construir en la misma circunferencia?

Los alumnos trabajan sobre una circunferencia donde han marcado cinco puntos igualmente espaciados (pueden usar el transportador). La opción del pentágono regular ya conocido surge de inmediato. Después de un tiempo de análisis y discusión grupal se llega a obtener el más popular de los polígonos estrellados y, posiblemente, el emblema de la escuela pitagórica.

N = 5

N = 5
M = 2 saltar un punto p = 1

dos vueltas para completar el polígono v = 2

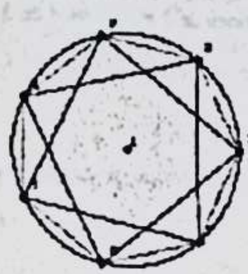
Intentan obtener otros polígonos con las características pedidas pero llegan a la conclusión: **No hay otras posibilidades.**

Surgen preguntas y conjeturas diversas, como las siguientes:
¿Cuántos hexágonos estrellados regulares habrá?
¿ Cuántos de 15 lados?
¿Se podrán construir?

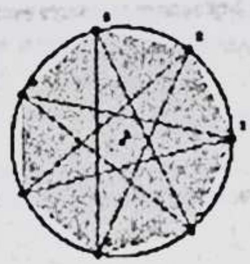
Seguramente habrá muchos polígonos estrellados de 10 lados.
O sea a más lados más polígonos estrellados (luego descubrirán el error de esta conjetura).

Los mismos alumnos proponen responder esos cuestionamientos y realizan varias pruebas con la circunferencia dividida en seis arcos iguales, pero solo logran encontrar el conocido hexágono regular convexo.

Por supuesto, continúan investigando con circunferencias divididas en 7, 8, 9 , etc. Arcos de igual medida .
Así obtienen con 7 puntos, los siguientes heptágonos estrellados regulares.



N = 7
M = 2



N = 7
M = 3

Con los datos obtenidos en las distintas construcciones comienzan a proponer situaciones que invitan a la discusión y permiten al docente incorporar propiedades y responder dudas.

En la puesta en común, se van completando los datos en la tabla de resultados. Siempre con la justificación y verificación correspondiente.

POLIGONOS ESTRELLADOS REGULARES – TABLA DE RESULTADOS

N° de divisiones (N)	N° de puntos saltados (p)	N° de vueltas para completar el polígono	N° de polígonos regulares estrellados
5	1	2	1
6			0
7	1 2	2 3	2
8	2	3	1
9	1 3	2 4	2

Pueden continuarse las observaciones y obtener diferentes polígonos estrellados hasta justificar la siguiente condición:

> **Para obtener polígonos estrellados deben existir números primos con el número obtenido de dividir el número de divisiones de la circunferencia(N) por dos y ser distintos de uno.**

O sea , como existen dos números primos con el número 7, menores que 7/2, el 2 y el 3. Podemos, por tanto, construir dos heptágonos regulares estrellados uniendo las divisiones de 2 en 2 y otro de 3 en 3.

SITUACIONES PROBLEMÁTICAS

Mientras realizan las construcciones surgen problemáticas diversas que invitan al análisis y permiten lograr conclusiones interesantes, como las siguientes:

1. En el caso N = 8 y M = 2 no se obtiene lo que entendemos en general por polígono estrellado o sea que los lados se corten y lo que se obtiene es un polígono convexo.

   Esta situación se presenta porque el valor del salto M divide exactamente a N, que es el número de lados del polígono. En este caso cuando damos la primera vuelta, volvemos al vértice de partida habiendo dado N/M saltos que son los lados del polígono regular (no estrellado) que se obtiene. Lo mismo sucede con el caso de N = 15 y M= 3. Hay muchos otros ejemplos que se pueden proponer y verificar.

2. En el caso N = 5 y M = 2 se obtiene el mismo polígono estrellado que con N = 5 y M = 1. Por lo tanto solamente se considera uno de ellos.

3. En el caso N = 14 y M = 6 o N = 7 y M = 3 se obtiene el mismo polígono estrellado.

   Sucede que entre 14 y 6 hay un divisor común que es el 2, por lo tanto es necesario establecer la condición que **M y N no tengan divisores comunes es decir que sean primos entre sí.**

INCORPORANDO LA COMPUTADORA

La utilización del lenguaje LOGO para investigar sobre este tema constituye un recurso que debe aprovecharse para el desarrollo del pensamiento lógico. En general los alumnos acostumbrados a trabajar con este lenguaje, proponen de inmediato procedimientos donde aparece el concepto de variable, en este caso: longitud del lado y amplitud del ángulo y el concepto de recursión que llevan a la solución de la problemática propuesta y a la verificación inmediata de los resultados, establecimiento criterios generales que pueden luego aplicarse a polígonos diversos. Por ejemplo experimentando con el procedimiento siguiente:

```
Para pol :l :a
ad :l
de :a
pol :l :a
fin
```

Se ingresan datos para el lado y ángulo y se observan las figuras que se obtienen, probando con variedad de ángulos por ejemplo con:

pol 70 160 se obtiene un eneágono estrellado

pol 60 150 se obtiene un dodecágono estrellado

pol 70 144 se obtiene un pentágono estrellado

El docente puede aprovechar la oportunidad de revisar conceptos como: ángulo interior, ángulo exterior, ángulo inscripto , suma de ángulos interiores de un polígono regular y los procedimientos de construcción de polígonos y demostración de las propiedades fundamentales.

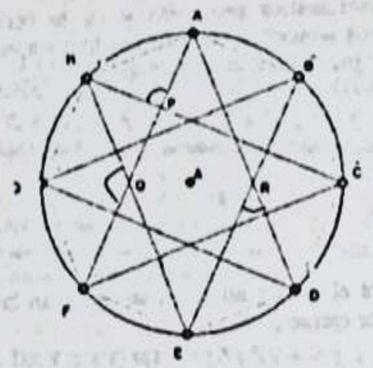
Otros programas que facilitan la investigación y construcción en estos temas son : Cabri II y Geometer's Sketchpad

ACTIVIDAD COMPLEMENTARIA

Los conocimientos previos y las construcciones realizadas amplían el espectro del docente en lo que se refiere a proponer actividades motivadoras diversas. Por ejemplo:

- Obtener la medida de los ángulos señalados en el polígono estrellado.

En la figura se han marcado tres ángulos aunque pueden considerarse otros.



Los alumnos con el uso del transportador dan una respuesta rápida y sin lugar a discusión.

Luego se les sugiere que justifiquen los resultados pero sin utilizar instrumentos de medición, con lo cual se moviliza la acción grupal y la discusión fundamentando la obtención de la siguiente propiedad:

Un ángulo formado por dos cuerdas que se intersecan en el interior de un círculo tiene una medida igual a la semisuma de los arcos interceptados

Por ejemplo:

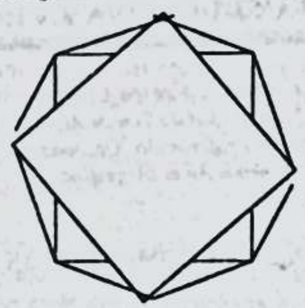
$$\angle\ APH = \tfrac{1}{2}\,(40^\circ + 120^\circ) = 80^\circ$$
$$\angle\ ERD = \tfrac{1}{2}\,(40^\circ + 40^\circ) = 40^\circ$$

La demostración de esta propiedad ejercita otras habilidades de pensamiento que no deben descuidarse en el aprendizaje de la matemática, por lo que se sugiere la misma, ya que resulta muy sencilla para los alumnos después de las actividades realizadas.

NOTA

Para generar estrellas con polígonos regulares se pueden utilizar los siguientes procedimientos simples:

- Los polígonos estrellados con un número par de vértices se construyen con la rotación de un polígono regular que tiene la mitad de vértices del original. Por ejemplo , el cuadrado genera con su rotación el octógono estrellado.



- Los polígonos estrellados con un número impar de vértices pueden generar un polígono estrellado al unir los vértices en forma alternada hasta llegar al vértice origen. Por ejemplo uno de los heptágonos estrellados.

CONCLUSIÓN

Se ha tratado de demostrar que el trabajo en el Taller de Geometría debe ser entendido como una construcción por descubrimiento que parte de lo intuitivo para consolidarse en conceptos sustentados en fundamentos sólidos previamente adquiridos.

Descubrir algo sin tener pruebas que lo validen significa no haber descubierto nada.

Durante todo el proceso se efectúa la evaluación orientadora por parte del docente, tanto de los avances logrados en forma personal como en lo grupal, ayudando a superar errores y animando a demostrar sus conjeturas con fundamentos sólidos.

La información que brinda está observación permanente ha de servir para mejorar también la futura preparación de actividades por parte del docente.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alsina, C., Burgués, C., Fortuny, (1996). *Enseñar Matemáticas.* Series Pedagógicas. Barcelona: Editorial Grao.

Alsina C., Burgués C., Fortuny J. (1995) *Invitación a la Didáctica de Geometría Nº 12.* Síntesis, Barcelona.

Artigue, M.; Dovady, R.; Moreno, L.; Gómez, (Ed.). (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática.* México D.F: Grupo Editorial Iberoamérica

Chevallard, Y. (1991), *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Ed. Aique

Ministerio de Cultura Y Educación de la Nación (1995) *Contenidos Básicos Comunes.* Argentina.

Santalo Luis A. (1993) *La geometría en la formación de profesores*- Red Olímpica. Argentina