

MODELIZANDO EN MATEMÁTICA: HACIA LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE PROBABILIDAD

Fabían Valiño
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González"
Buenos Aires (Argentina)

RESUMEN

En el contexto de este artículo, la modelización en matemáticas es considerada como un problema práctico generado o establecido generalmente en el mundo real, cuya resolución requiere de algunas técnicas elementales relacionadas con modelos matemáticos. Desde este punto de vista, se explora en este artículo una metodología conducente a la construcción del concepto de probabilidad simple desde una concepción *predictiva* que permite concebir a la probabilidad teórica como límite al infinito del cociente entre sucesos favorables y número total de sucesos.

INTRODUCCIÓN

Para muchos autores (Houston y otros, 1995), la modelización es un deber en cualquier curso moderno de matemáticas. Un modelo matemático es una representación simplificada de un aspecto de la realidad que incluye alguna entidad matemática, como puede ser por ejemplo una ecuación diferencial, una distribución de probabilidad, etc., conjuntamente con una serie de presunciones relativas a las simplificaciones de la realidad realizadas. Los modelos pueden ser utilizados para describir y predecir y son útiles en la medida de su validez. La modelización matemática es la actividad consistente en la creación o la modificación de un modelo y su utilización. Esta utilización permitirá responder algunas cuestiones matemáticas que surjan durante el proceso de modelización.

Estos autores coinciden en que es dificultoso que el alumno pueda crear un modelo matemático por sí mismo por lo que se hace necesario que:

- El docente explique previamente en qué se basa el modelo matemático que se presenta, su utilidad, sus puntos débiles, etc.,
- Un conjunto de modelos matemáticos hayan sido discutidos en clases anteriores por un profesor o por un grupo de profesores de materias afines (ejemplo el profesor de Física conjuntamente con el profesor de Matemáticas).
- Los modelos presentados por el profesor y que deben ser valorados a posteriori, no disten demasiado de los previamente analizados. Esto

significa que los alumnos puedan transferir sus construcciones anteriores en la interpretación y utilización del modelo matemático presentado, mostrando así las competencias adquiridas en esta metodología de trabajo.

El hecho de que se trabaje durante la E.G.B. 3 (Educación General Básica, tercer ciclo- alumnos de 7mo., 8vo. y 9no. Años) con los conceptos básicos de la probabilidad, permite llevar adelante durante el ciclo Polimodal, el proceso de modelización y formalización de conceptos que previamente se trabajaron de manera intuitiva.

Los contenidos relativos al estudio de modelos permiten establecer las bases de un posterior estudio estadístico con mayor profundidad en lo que a significación se refiere. Así se habla de la inferencia estadística y la obtención de conclusiones relativas a las características de una población a partir de los datos de una muestra obtenida de la misma. La interrelación de los modelos probabilísticos y estadísticos queda plasmada en estos casos, pues puede verse que en ellos se realizan análisis estadísticos de los datos de las muestras y las conclusiones se expresan en términos de probabilidad.

Cuando se trabaja con los alumnos la modelización en aleatoriedad se debe apreciar que se les está proponiendo un modelo que puede ser aplicable o no a una situación aleatoria cualquiera y no una simple colección de fórmulas y técnicas preestablecidas.

¿PUEDE CONSTRUIRSE EL CONCEPTO DE PROBABILIDAD A PARTIR DE MODELOS Y MATERIAL CONCRETO?

La primera actividad de modelización propuesta para integrar el portafolios tiene por finalidad que el alumno pueda construir el concepto de probabilidad de un suceso a partir de la frecuencia relativa de ese suceso a medida que el número de experimentaciones se hace mayor.

Algunos libros de texto apelan para la construcción de este concepto al lanzamiento de un dado o una moneda. La frecuencia relativa del número de caras o el número de ases en el dado tiende a estabilizarse hacia su valor de probabilidad a medida que aumenta el número de repeticiones del suceso.

"Observemos el proceso aleatorio <arrojar una moneda> y analicemos la frecuencia relativa de los resultados: en 50 lanzamientos, nuestro evento de interés será <que salga sol>... La gráfica expone cómo está variando la frecuencia relativa del evento a medida que aumenta el número de observaciones." (Castillo Padilla y otros., 1998: 79).

"Las distribuciones empíricas son, cada vez, más próximas a la distribución esperada cuanto mayor sea el número de lanzamientos del dado. Y llega a ser casi idéntica si el número de lanzamientos es muy grande". (Guzmán, et. al., 1998: 230).

La mayoría de los alumnos, aún antes de tratarse el contenido de las probabilidades, tienen un conocimiento intuitivo de esas probabilidades simples. Expresada de modos distintos, las afirmaciones permiten inferir que existe una aproximación intuitiva de este concepto:

- *"Hay una chance en dos de que salga cara".*
- *"Puede salir tanto cara como ceca, los dos tienen la misma posibilidad".*
- *"Las posibilidades de cara son de una en dos".*
- *"Es la mitad".*

Razonamientos similares se obtienen a partir del lanzamiento de un dado con respecto a la salida de una de sus caras. Es decir, pareciera que al realizar la experiencia de lanzar una moneda varias veces para hacer notar que las frecuencias relativas de la salida de cara o de ceca se aproximan a medida que aumenta el número de repeticiones del suceso "lanzar una moneda y observar la figura visible" ya es un hecho conocido por el alumno independientemente de la realización de la experiencia.

Esta modalidad de actividad pareciera confirmar lo que el alumno ya conoce intuitivamente. Se distinguirá entonces la construcción del concepto de probabilidad según una modalidad *confirmatoria* o una modalidad *predictiva* (Valiño, 2002). La modalidad confirmatoria es la que se acaba de caracterizar mientras que la modalidad predictiva es la que se propondrá como actividad.

Para realizar esta tarea los alumnos deben contar material concreto especial que consiste en un conjunto de bolsas iguales realizadas en tela opaca (de modo tal que no pueda observarse el contenido de la bolsa al trasluz) conteniendo un número determinado de canicas, fichas, etc.

Las canicas deben ser indistinguibles al tacto para asegurar la equiprobabilidad de extracción de las mismas. Las bolsas se preparan de modo tal que contengan cada una el mismo número con la correspondiente proporción de colores elegidos; estas canicas constituirán la *población* sobre la que se efectuará el cálculo de frecuencias relativas. Así, por ejemplo, si la población es de diez : cinco transparentes, dos celestes y tres blancas, cada bolsa deberá tener exactamente el mismo contenido que las restantes. Estas condiciones garantizan la equiprobabilidad de elegir cualquiera de las bolsas.

Los alumnos trabajarán en grupos de tres con determinados roles asignados que cumplirán según su propia organización: uno de los alumnos será el encargado de obtener la *muestra*, es decir, realizar la extracciones (de a una y con reposición) de canicas de la bolsa y volver a incorporarlas para mezclar su contenido, otro alumno registrará el color de la bolita obtenido en cada extracción hasta llegar a cumplimentar el *tamaño de la muestra* y comunicará al tercer alumno los resultados obtenidos para cada color anotado en la muestra; finalmente, el tercer alumno del grupo realizará

los cálculos de frecuencia relativa correspondiente a cada uno de los colores obtenidos en la muestra, *acumulando* frecuencias en cada nueva muestra registrada.

Los alumnos seleccionarán aleatoriamente el *tamaño de la muestra* y deberán diseñar una planilla de forma tal que puedan exhibir los resultados obtenidos durante el proceso de experimentación. El equipo entonces elige una de las bolsas pudiendo palpar su contenido pero no mirar en su interior para determinarlo, incluso pueden contar el número de elementos que contiene lo que constituirá la población en cuestión. Así ya están en condiciones de comenzar con el proceso de experimentación.

Supongamos que un equipo determinado elige 7 como tamaño de la muestra, llevan a cabo el experimento dos veces y registran los siguientes resultados:

- ✓ Primera muestra: celeste, transparente, transparente, celeste, transparente, transparente, transparente.
- ✓ Segunda muestra: blanca, transparente, transparente, celeste, blanca, blanca, celeste.

Un posible diseño de planilla puede ser el que se muestra a continuación en la figura 1:

Muestra Nro.	MUESTRA	COLOR...CELESTE....		COLOR...TRANSPARENTE...	
		FREC.ABS.	FREC. REL.	FREC. ABS.	FREC.REL.
1	C, T, T, C, T, T, T	2	$\frac{2}{7} \cong 0,286$	5	$\frac{5}{7} \cong 0,714$

FIGURA 1. Posible diseño de planilla para la actividad propuesta

Como en la segunda muestra aparece un nuevo color, es necesario ampliar la planilla. El diseño podría aparecer tal como se muestra en la figura 2:

Muestra Nro.	MUESTRA	COLOR CELESTE		COLOR TRANSPARENTE		COLOR BLANCO	
		FREC.AB	FREC.R	FREC.A	FREC.R	FREC.A	FREC.
1	C,T,T,C,T, T,T	2	0,285...	5	0,714...		
2	B,T,T,C,B, B,C	4	0,2857...	7	0,5	3	0,214...
3							

FIGURA 2. Posible diseño de planilla para la actividad.

Cada equipo obtiene entonces un número determinado de registros y calcula una frecuencia relativa para cada uno de los colores muestreados y formulan alguna hipótesis acerca del número de bolitas de cada color que forma la población.

Los alumnos observan algunas disparidades de resultados entre las frecuencias relativas obtenidas por cada uno de los equipos aunque pareciera que aquellos equipos que consideraron muestras de mayor número o que repitieron más veces su experiencia pueden hacer alguna predicción acerca de los colores de las canicas que componen la población.

Pueden aparecer algunos interrogantes durante la situación de acción relativas a la elección del tamaño de la muestra. Independientemente de la elección de este número se garantiza la validez del experimento en función de la acumulación final de frecuencias absolutas con el correspondiente cálculo de frecuencias relativas. Sin embargo, y a los fines operatorios puede ser práctico elegir diez como tamaño de la muestra dado que facilita las divisiones para el cálculo de las frecuencias relativas.

Se muestra a continuación un posible diseño de la actividad de aleatoriedad que apela al uso de modelos matemáticos y al material concreto para que los alumnos construyan el concepto de probabilidad a partir de frecuencias relativas.

Para realizar esta actividad necesitas trabajar en grupo de tres integrantes.

Elijan una de las bolsitas de la caja de materiales sin mirar su contenido.

El objetivo de esta actividad será poder predecir qué contiene la bolsa que han elegido para lo cual se tendrán que llevar a cabo algunos pasos previos.

- En ningún momento puede verse el contenido de las bolsas.
- Pueden si quieren, contar los elementos que incluye pero no es necesario hasta el final de la actividad.
- Elijan un número de elementos al que llamarán tamaño de la muestra.
- Deberán diseñar una planilla en donde puedan consignar el número de muestra realizada, la composición de la muestra y la discriminación de los elementos de la muestra con su correspondiente frecuencia relativa.
- Cada vez que se procede a realizar un muestreo, las frecuencias relativas deben acumularse.
- Una vez fijado el tamaño de la muestra, uno de los miembros del equipo estará a cargo de elegir la muestra con reposición, otro miembro anotará los elementos de la muestra y finalmente el tercer miembro realizará el cálculo de las correspondientes frecuencias relativas.

Se recomienda realizar no menos de veinte muestreos.

- Una vez finalizado la actividad pueden contar el número de elementos que contiene la bolsa.
- ¿Pueden predecir cuál es el contenido a partir de las frecuencias relativas?
- Finalmente y ante la evidencia del contenido de la bolsa, indiquen la probabilidad de obtener cada uno de los colores de bolitas. Escriban un párrafo estableciendo qué relación encuentran entre frecuencia relativa de aparición de un suceso y su probabilidad.

CONCLUSIONES

Dado que todos los alumnos han trabajado con la misma población y en las mismas condiciones a excepción del número de elementos considerados en la muestra el docente puede institucionalizar cuestiones relativas a los grandes números y así obtener una nueva frecuencia relativa para cada color producto de la acumulación de las frecuencias relativas individuales logradas por cada equipo. En estas condiciones, puede predecirse con bastante certeza la composición de la población y sólo resta la verificación por parte de los alumnos.

Posteriormente, los alumnos responden de manera individual las otras actividades del trabajo de guía para construir el concepto de probabilidad de un suceso a partir de la frecuencia relativa de ese suceso producto de una gran repetición del experimento.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bennett, D.; *Randomness*. (1999). Boston, First Harvard University Press paperback edition.
- Castillo Padilla, J.; Gómez Arias, J. (1998). *Estadística inferencial básica*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Guzman, M. y otros (1988). *Matemáticas. Bachillerato I*. Madrid: Anaya.
- Houston, K. (2000). *Modelling is a must* en: http://www.nun.ac.uk/mathskills/newsletters/issue2/guest_nun.
- Valiño, F. (2002). Tesis de Licenciatura: *El portafolio como instrumento de valoración en la matemática del Nivel Polimodal: Una propuesta para los contenidos de aleatoriedad y probabilidades*. San Martín.
- Vergnaud, G. (2001) Competencias Matemáticas en <http://fractus.mat.uson.mx/Clases/Problematica992/Glosario.htm>
- WEAVER, W. (1982). *Lady luck*. Mineola, Dover Publications Inc.,