

JUICIOS HEURÍSTICOS SOBRE PROBABILIDAD EN ALUMNOS DEL PROFESORADO EN MATEMÁTICA

*Andrea L. Lavalle, Elda B. Micheli, Silvia Boché
Universidad Nacional del Comahue
Neuquén. (Argentina).*

En el presente trabajo se analizó la presencia de razonamientos heurísticos en alumnas del Profesorado en Matemática que ya habían cursado la asignatura “Probabilidad y Estadística” y que asistieron a un taller sobre enseñanza de la probabilidad. Los problemas utilizados son ítems de investigación citados por Shaughnessy (1992). Se detectaron razonamientos inapropiados en los problemas relacionados con el descuido del tamaño de muestra, la falacia de la proporción baja y el error de atribución fundamental. Además se percibieron dificultades de argumentación en las respuestas brindadas. A partir de una exploración acerca de las respuestas obtenidas en este grupo reducido de alumnas se intentó formular líneas de investigación a futuro sobre posibles implicancias en los planes de formación.

INTRODUCCIÓN

Un aspecto relevante para llevar a cabo la enseñanza de contenidos de estocástica en el nivel de enseñanza obligatoria, es la formación de grado de los Profesores de Matemática, tanto en los contenidos y la metodología de enseñanza apropiada, como en el conocimiento de los errores y obstáculos de enseñanza aprendizaje. La concepción que generalmente subyace en los planes de formación docente, centrada principalmente en el contenido y con una metodología tradicional de tipo expositivo, ha mostrado limitaciones ya que no se manifiestan correlaciones evidentes entre el conocimiento matemático adquirido y la capacidad de organizar eficazmente la enseñanza. Es decir, un amplio conocimiento estadístico, aún cuando es esencial, no es suficiente para que un docente sea capaz de enseñar probabilidad.

Como parte de una propuesta de modificación de la asignatura “Probabilidad y Estadística”, tendiente a orientarla hacia una formación específica para los futuros profesores, se implementó un taller sobre enseñanza de la probabilidad sustentado en el “análisis didáctico de contenido” (Godino et al, 1998). En esta propuesta, los autores establecen que los cursos de formación deben contemplar diversos aspectos complementarios, entre los que se destacan:

- c) reflexión sobre el significado de los objetos matemáticos particulares y el estudio de las transformaciones que experimentan para adaptarlos a la enseñanza;

- b) conocimiento de las dificultades, errores y obstáculos de los alumnos en el aprendizaje y sus estrategias de resolución de problemas;
- d) ejemplificación de situaciones didácticas, metodología de enseñanza y recursos didácticos.

A este taller asistió un grupo de diez alumnas del profesorado en matemática, que ya habían cursado la asignatura específica. Como parte de las actividades previstas en el apartado b) y para propiciar el conocimiento acerca de errores de aprendizaje en probabilidad, se les pidió que resolvieran un conjunto de problemas. Éstos responden a ítems de investigación sobre juicios heurísticos citados por diferentes autores (Shaughnessy, 1992; Kahneman & Tversky, 1972). La actividad se completó con la lectura de los resultados reportados en investigación, con el propósito de hacer conscientes a los futuros docentes de las dificultades del razonamiento estocástico y de sus particularidades, para que comprendan las dificultades que enfrentarán sus alumnos.

Existen dos motivaciones en la realización de este trabajo. Por un lado, una motivación de tipo cognitivo que busca explorar las respuestas brindadas por este grupo de estudiantes, los cuales se supone tienen adquirido el conocimiento formal a través de la asignatura. En este sentido se trata de observar si presentan un razonamiento normativo o si existen evidencias de heurísticas en sus soluciones, qué formas de representación utilizan y qué contenidos están disponibles.

Por otra parte, los ítems suministrados se han utilizado en estudios de tipo psicológico, cuyo objetivo es explorar si los razonamientos de tipo intuitivo permiten sacar conclusiones estadísticas válidas. Por lo tanto, una segunda motivación es iniciar un rumbo en la investigación sobre la formación inicial en probabilidad, que tenga en cuenta tanto los resultados de investigaciones de tipo psicológico acerca de razonamientos heurísticos como sus posibles consecuencias didácticas. A partir de una exploración acerca de las respuestas obtenidas por este grupo reducido de alumnas se intenta formular posibles implicancias para los planes de formación, las cuales pueden orientar futuras investigaciones.

RAZONAMIENTOS HEURÍSTICOS EN PROBABILIDAD

Una forma de dar explicación a los errores que se encuentran con frecuencia al resolver problemas de probabilidad es el uso de “heurísticas” o estrategias inconscientes que suprimen parte de la información del problema. También se entiende por “heurística” al proceso mental que reduce la complejidad del problema, de modo que sea accesible al resolutor. La investigación sobre psicología del aprendizaje en probabilidad y estadística se basa principalmente en los trabajos de Daniel Kahneman y Amos Tversky (1972). De acuerdo con estos autores, las personas realizan estimaciones sobre probabilidad usando ciertas heurísticas, como representatividad y disponibilidad. A continuación se detallan las características básicas de estas heurísticas, y de otros errores detectados en la investigación, que fueran descritos por Shaughnessy (1992) en su reseña sobre investigación en estocástica y se describen también los ítems suministrados a las alumnas en el mencionado taller.

Representatividad. Según la heurística de la representatividad, las personas estiman la probabilidad de un evento basándose en que el resultado debe representar de la mejor manera posible algún aspecto de su población de origen. Para indagar sobre esta heurística se utilizó el siguiente problema:

ÍTEM 1: En una familia de seis niños, ¿cuál de las siguientes secuencias de varones y mujeres cree que es más probable? VMMVMV; VVVVMV; VVVMMM. ¿Por qué?

Todas las secuencias son igualmente probables, pero las personas que utilizan esta heurística tienden a predecir la que les parece más representativa de una población en la que se supone que hay igual cantidad de varones que de mujeres. Por ejemplo, muchas personas creen que la secuencia VMMVMV es más probable que la secuencia VVVVMV, ya que es más representativa de una población 50 – 50. La secuencia VVVMMM no parece representar un proceso en el que interviene el azar, como es el de tener niños (Kahneman & Tversky, 1972).

Otro ejemplo del uso de la representatividad ocurre con el *descuido del tamaño de la muestra*:

ÍTEM 2: Se tiene una población que contiene 50% de bolas blancas y 50% de negras. Compare la probabilidad de obtener 7 blancas en 10 extracciones con la de obtener 70 blancas en 100 extracciones.

Si bien la proporción es la misma, es más probable obtener esa proporción en una muestra pequeña. La comparación de proporciones que lleva al descuido del tamaño de muestra utiliza un razonamiento de tipo proporcional, el cual es mucho más conocido y aplicado por la mayoría de las personas.

Otro fenómeno que se atribuye a menudo a la representatividad es la *falacia de la proporción baja*. Se propusieron dos problemas para analizar este error.

ÍTEM 3: a) Dada la siguiente descripción de una persona: sexo masculino; 45 años; conservador; ambicioso; no tiene interés en problemas políticos. Indique si corresponde con mayor probabilidad a un abogado o a un ingeniero. b) Se selecciona una persona al azar de una población formada por un 30% de ingenieros y un 70% de abogados. La persona seleccionada es de sexo masculino; 45 años; conservador; ambicioso; no tiene interés en problemas políticos. Indique si corresponde con mayor probabilidad a un abogado o a un ingeniero.

Este ítem es una modificación del presentado por Shaughnessy, en la redacción original sólo aparece la parte b). El hecho de conocer que la persona se selecciona de una población 30-70 no parece afectar en la estimación de la probabilidad, es decir, se pone más confianza en la descripción que en los datos. En muchos de estos ítems, llamados “descripciones de personalidad”, el abandono de datos de base puede ocurrir porque se perciben ciertos atributos como intrínsecos a una ocupación particular, o a una personalidad particular; esto es llamado *error de atribución fundamental*.

ÍTEM 4: Un taxi se ve implicado en un accidente de tránsito nocturno. Hay dos compañías de taxi que operan en la ciudad, azules y verdes. Se sabe que el 85% de los taxis en la ciudad son verdes y 15% son azules. Un testigo en la escena identificó el taxi involucrado en el accidente como un taxi azul. Este testigo se probó bajo condiciones de visibilidad similares, e hizo identificaciones correctas acerca del color en el 80% de los casos del ensayo. ¿Cuál es la probabilidad de que el taxi involucrado en el accidente fuera realmente un taxi azul?

Muchas personas tienden a creer al testigo descuidando el dato sobre la proporción del 15%, el cual indica que “taxi azul” es un suceso de probabilidad baja. El accidente es percibido como una instancia representativa del 80% de identificaciones hechas por el testigo. Desde el punto de vista matemático, este problema es difícil aún para personas que hayan estudiado probabilidad.

Disponibilidad. Cuando las personas estiman la probabilidad de un suceso basados en qué tan fácil es para ellos llevar a la mente instancias particulares de ese suceso, están empleando la heurística de disponibilidad. Este juicio heurístico induce un sesgo basado en la propia experiencia y la perspectiva personal. Así, la disponibilidad es una heurística que afecta o refleja nuestra propia percepción de la frecuencia relativa. El problema utilizado es el siguiente:

ÍTEM 5: Un individuo debe seleccionar comités de un grupo de 10 personas ¿Qué opinas respecto de las siguientes afirmaciones?: a) Hay más comités distintos formados por 8 personas; b) Hay más comités distintos formados por 2 personas; c) Hay el mismo número de comités de 8 que de 2.

El resultado correcto es el c), aunque para muchas personas es más fácil pensar en comités de 2 personas, por lo que eligen b). Si se piensa que por cada comité de 2 personas se puede formar uno de 8, se podría llegar a la respuesta correcta sin necesidad de cálculos.

La Falacia de la Conjunción. La investigación sugiere que las personas son propensas a dar probabilidades más altas a los eventos conjuntos que a los eventos de origen. Para analizar este error se utilizó el siguiente problema:

ÍTEM 6: ¿Qué porcentaje debe ser más alto: el de “personas que sufrieron un ataque cardíaco” o el de “personas de 55 años y que sufrieron un ataque cardíaco”?

Un razonamiento correcto llevaría a pensar que las personas que cumplen ambas condiciones son menos que las que cumplen sólo una. De todas maneras, el contexto en el que está enunciado el problema induce a realizar razonamientos que involucran probabilidades condicionales. También hay que considerar que es difícil distinguir desde el lenguaje cuándo se refiere a una condición y cuándo a una intersección.

Errores en Probabilidad Condicional e Independencia. Los conceptos erróneos más prominentes de probabilidades condicionales se presentan cuando el evento condicionando ocurre después del evento que condiciona y cuando se confunde un condicional con su inverso. El problema utilizado fue propuesto y analizado por Falk (1989):

ÍTEM 7: Una urna tiene dos pelotas blancas y dos pelotas negras. Se sacan dos pelotas sin reemplazo. a) ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda pelota sea blanca, dado que la primera fue blanca? b) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera pelota sea blanca, dado que la segunda pelota es blanca?

La primera pregunta pide el cálculo de la probabilidad condicional $P(B_2/B_1)$, y la segunda pide el cálculo de $P(B_1/B_2)$. En general, es fácil ver que la primera probabilidad es $\frac{1}{3}$, porque cuando se extrae la segunda pelota, hay una blanca y dos negras en la urna. Lo que no es evidente es que la segunda probabilidad también es $\frac{1}{3}$. Además, el método de cálculo (teorema de Bayes), da poca o ninguna percepción intuitiva acerca de por qué el cálculo es $\frac{1}{3}$ para el segundo inciso.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

➤ Sobre el ítem 1:

Este problema en general fue resuelto correctamente. Seis alumnas solamente escribieron que las secuencias tienen la misma probabilidad argumentando que esta probabilidad es $\left(\frac{1}{2}\right)^6$ en todos los casos. Las otras alumnas se ayudaron con un diagrama de árbol para obtener la respuesta correcta. Una alumna resolvió planteando primero el supuesto de que hay 5 mujeres por cada hombre. Con esto obtiene $P(V) = \frac{1}{6}$ y $P(M) = \frac{5}{6}$. Luego realiza la aclaración: “como el enunciado no hace referencia a ese supuesto, realizo los cálculos con probabilidades $\frac{1}{2}$ para cada suceso”. En este caso debería indagarse con más detalle en base a qué consideraciones realizó el primer supuesto. Por lo tanto podemos decir que las alumnas analizadas no utilizaron la heurística de la representatividad en sus soluciones.

➤ Sobre el ítem 2:

Ninguna de las alumnas pudo resolverlo en forma completa. Dos contestaron que la proporción es la misma, es decir, $\frac{7}{10} = \frac{70}{100}$, y por lo tanto la probabilidad también. Para el caso de sacar 7 en 10 extracciones, cuatro alumnas intentaron (sin éxito) resolverlo con un diagrama de árbol, es decir, comenzaron la construcción del mismo hasta llegar a tres o cuatro extracciones, pero no realizaron el cálculo. Para el caso de sacar 70 en 100, una alumna comenta: “no puedo especificar todos los casos”. Las demás no respondieron.

➤ Sobre el ítem 3:

Una alumna contestó en ambos incisos que la probabilidad es $\frac{1}{2}$ tanto para abogado como para ingeniero. En este caso no sólo ha descuidado la proporción de base en el inciso b) sino que utiliza un argumento de equiprobabilidad que también es considerado un sesgo. Solamente 3 alumnas asignaron tanto en a) como en b) al ingeniero, cometiendo los errores estudiados. Las demás eligieron al ingeniero en a) y luego al abogado. Es posible que al estar en ítems separados, el dato que se agrega llame la atención y posibilite una mejor focalización en la proporción poblacional. No se indagó sobre este ítem por separado.

➤ Sobre el ítem 4:

Ninguna de las alumnas pudo resolver este problema. Siete de ellas lo dejaron en blanco. Dos dijeron que la probabilidad es del 80%, creyendo en el testigo. Una sola alumna contestó que si bien no podía calcular la probabilidad exactamente, creía que debía ser inferior al 80% debido a la proporción baja de taxis azules en la ciudad. A pesar de que el

problema pide el cálculo de la probabilidad, se considera que la alumna intuye un resultado utilizando correctamente los datos del enunciado.

- Sobre el ítem 5:
Todas resolvieron correctamente realizando el cálculo combinatorio.
- Sobre el ítem 6:
En este ítem, identificaron ambos sucesos y concluyeron que la probabilidad de la intersección es menor. Dos de ellas incluyeron diagramas de Venn, el resto argumentó con un texto explicativo. Ninguna confundió $P(A/B)$ con $P(A \cap B)$ a pesar de la incidencia del contexto en el problema.
- Sobre el ítem 7:
Para resolver este ítem realizaron un árbol y calcularon correctamente ambas probabilidades. Una de las alumnas del grupo analizado, si bien realizó correctamente el cálculo pedido en el inciso b), aclara a continuación que “cree que debe haber hecho algo mal ya que el resultado debería ser $\frac{1}{2}$ ”. Este es el único caso que presenta una intuición incorrecta, utilizando el sesgo de equiprobabilidad.

Los problemas en los que se observaron razonamientos incorrectos y dificultades de comprensión son los referidos al descuido del tamaño de muestra, la falacia de la proporción baja y el error de atribución fundamental. Se observa un razonamiento incorrecto en el ítem 1 al asignar mal las probabilidades y la utilización de la equiprobabilidad en el ítem 3 y en el 7b. Ninguna alumna resuelve todos los ítems y que en algunos casos no justifican sus respuestas.

Los contenidos que estuvieron disponibles en las resoluciones son: definición clásica de probabilidad, independencia, cálculo combinatorio, probabilidad condicional, teorema de Bayes. Los modelos de probabilidad no están incorporados como herramientas de cálculo de probabilidades. En el “problema del taxi”, si bien los conceptos necesarios son abarcados dentro de la asignatura “Probabilidad y Estadística” y fueron utilizados en la resolución de otros ítems, podemos ver que los modelos correctos están disponibles pero no son asociados espontáneamente con la situación que necesitan resolver. Las formas de representación utilizadas son el diagrama de árbol y diagramas de Venn. En los casos en que no tuvieron formas de representación adecuadas, tampoco tuvieron disponibles otras estrategias para resolver los problemas.

Si bien la instrucción brindada en la asignatura ha proporcionado los contenidos y las representaciones utilizadas por las alumnas, se observa que han tenido mayor facilidad para resolver aquellos ejercicios similares a los que abordan en los trabajos prácticos (ítems 1, 5, 6 y 7) y mayor dificultad en los que son completamente diferentes (ítems 2, 3 y 4). Por otro lado, no debería resultar extraño el hecho de encontrar respuestas que incurren en los sesgos estudiados en

personas que han recibido instrucción en probabilidad ya que “el razonamiento inapropiado es amplio y persistente, similar en todas las edades, localizado incluso en investigadores experimentados y bastante difícil de modificar” (Garfield & Ahlgren, 1988). De todas maneras esto abre paso a una discusión sobre las características que debería tener la formación de profesores en referencia al estudio de este tipo de razonamiento ya que la particularidad de estudiar estas respuestas en los futuros formadores radica en que serán ellos los encargados de desarrollar en sus alumnos un conjunto de intuiciones correctas acerca del razonamiento bajo incertidumbre.

CONCLUSIONES

De las conclusiones detalladas a continuación, se desprenden implicancias para los planes de formación de los profesores de matemática que pueden ser considerados en investigaciones posteriores.

- Los cursos de probabilidad destinados a alumnos del Profesorado en Matemática, además de proveer contenidos y estrategias de resolución, deben contemplar el estudio de los errores de aprendizaje y el análisis de respuestas de alumnos de secundario a problemas sobre razonamientos heurísticos, como parte de la preparación para la tarea de enseñar. Además, dichos cursos deberían fundamentarse tanto en la resolución de situaciones problemáticas como en experiencias de toma y análisis de datos, para ayudar a los estudiantes a pensar estadísticamente. Tal vez sea oportuno que los profesores universitarios encargados de formar a los futuros docentes conozcan y practiquen la metodología recomendada para la enseñanza de la probabilidad en el nivel de enseñanza obligatoria. Es decir, respetando las diferencias de edades y responsabilidades, la utilización de una base metodológica adecuada puede ayudar a los estudiantes en la comprensión y propiciar que la formación sirva de modelo de actuación.
- Fischbein (1990) afirma que hay que tener en cuenta que más allá de las estructuras formales hay intuiciones y modelos intuitivos que influyen en las estrategias de pensamiento, en las interpretaciones y conclusiones. Por lo tanto, es importante que los futuros profesores desarrollen, junto con el razonamiento formal deductivo, un sólido sistema de intuiciones probabilísticas correctas. Para ello es necesario promover actividades que fomenten el conocimiento, análisis y confrontación de concepciones erróneas.
- Se observa que, aunque se pida justificación, las respuestas son solamente cálculos o comentarios acotados. Este tipo de respuestas no aporta ideas acerca de cómo están pensando o sobre si realmente comprenden los problemas a resolver. Por lo tanto se sugiere que la formación incluya tareas de socialización del conocimiento y validación de resultados.

-
- Por último, consideramos que los planes de formación de profesores deberían dedicar más tiempo e intensidad al estudio de la probabilidad, de tal manera que los futuros profesores cuenten con herramientas teóricas y metodológicas que les den seguridad en su futura práctica. En este sentido, el “análisis didáctico de contenido” puede sustentar una formación comprometida con la práctica docente.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Falk, R. (1989). Inferencia en la incertidumbre vía probabilidades condicionales. En Robert Morris (Ed.), *Estudios en educación matemática. La enseñanza de la estadística*. UNESCO.
- Fischbein E. (1990). Training teachers for teaching statistics. En Hawkins Anne (Ed.), *Training teachers to teach statistics*. International Statistical Institute. The Netherlands.
- Garfield, J. & Ahlgren, A. (1988). Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics: implications for research. *Journal for Research in Mathematics Education* 19, 44-63.
- Godino J.D., Batanero C., Flores (1998). Contextualising didactical knowledge on stochastics in mathematics teacher's training. En A. Olivier y K. Newstead (Eds.) *Proceedings of the 22 International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. University of Stellenbosch. South Africa.
- Kahneman, D y Tversky A. (1972). Subjective probability: A judgment of representativeness. *Cognitive Psychology* 3, 430-454.
- Shaughnessy, M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp 465-494). New York: Macmillan.