

EJERCICIOS, PROBLEMAS Y SITUACIONES PROBLEMÁTICAS EN MATEMÁTICA. EL PROBLEMA CONTINÚA...

José Luis Rey
Instituto Superior Leonardo da Vinci
Boulogne. Provincia de Buenos Aires. (Argentina)

"...La historia se ha repetido con frecuencia. El peligro de considerar a la matemática como una ciencia de definiciones y demostraciones de hechos evidentes, ha sido señalado muchas veces..."
Luis Santaló en *Matemática y Sociedad*

Iniciamos con una referencia más que adecuada para el desarrollo de los conceptos que se van a trabajar, del cuento de Conrado Nalé Roxlo¹ "Regla de Tres"

"...En los tiempos en que gozaba de libertad y podía ofrecer a los ángeles, que sin duda nos contemplaban enternecidos, el cuadro de una cabeza surcada ya por venerables hebras de plata junto a dos cabecitas castañas y rizadas, que a la luz de la lámpara y de la inteligencia buscaba la solución del mismo problema, se presentó éste: si un albañil trabajando seis horas levanta un metro de pared, ¿cuántos metros levantarán tres albañiles al mismo tiempo?..."

- *... Razonemos. Un albañil que trabaja solo, en un lugar desagradable como es una casa en construcción, pronto es invadido por la tristeza; el desaliento de pensar que tiene tanto trabajo para él solo por delante lo vence. Su mano cae floja y sin vigor, se enturbian los ojos por los recuerdos del pasado que asaltan al hombre que está solo. Es presumible que interrumpa su trabajo con frecuencia para secarse una lágrima con el dorso de la mano y suspirar. Quizá el crup le arrebató un hijo, quizá un golpe de mar, a su tierna esposa, allá, en la bella Italia... ¡pero no lloren, que es un suponer!... Bien, en esas condiciones el trabajo es malo y poco. Pero imaginemos a tres albañiles jóvenes, robustos, llenos de optimismo y de fundadas esperanzas de hacer la América. Se alienan con alegres canciones en que exaltan las dichas del trabajo honesto; se estimulan mutuamente con gritos de ¡fuerza!, si son italianos; ¡duro a la cabeza!, si son españoles; ¡hurra!, si pertenecen a la rubia Albión. En este último caso, lo más seguro es que cambien apuestas a quién hace más pared. Además se pueden prestar ayuda alcanzándose el balde, prestándose argamasa, dándose la mano gentilmente para subir al andamio. Tontos serían*

¹ Poeta y dramaturgo argentino (1898-)

si no aprovecharan condiciones tan favorables para hacerse, por lo menos, dos metros de pared cada uno y aun les sobraría tiempo para jugar un partido de bochas. Aquella noche vencieron la elocuencia y el buen sentido y mi hijo escribió: Si un albañil hace un metro de pared por día llorando, tres albañiles harán seis metros cantando y jugando a las bochas.

Por poco tiempo puede ayudar a mis hijos de esta manera, pues intervino la incomprensión de la directora, que arrastró a todos en la caída hacia la vulgaridad en un mundo que cree más en la potencia de los números que en la del alma "

Es muy común encontrar en distintos textos la mención sobre la importancia que se le debe otorgar a la resolución de problemas, así como también – sobre todo últimamente – leer sobre la necesidad de recurrir como una herramienta fundamental a la resolución de situaciones problemáticas, pero también es muy común encontrar que no existe una concepción muy clara respecto a las diferencias que existen entre el ejercicio, el problema y la situación problemática, cuando generalmente, si se hace un análisis un poco profundo, se nota que se consideran casi como sinónimos, y se deja de lado la concepción verdadera de los mismos, y se olvida – o se desconoce – la enorme y fundamental diferencia que los define como dos conceptos relacionados pero absolutamente distintos.

Se aclara además que la intención de este trabajo no es la de establecer las estrategias para resolver problemas, que no de ja de ser importante pero se considera suficientemente trabajado en infinidad de bibliografía como por ejemplo Polya (1945) y Schönfeld (1985) para mencionar sólo algunos de los más destacados.

Parece necesario en este punto entonces, definir claramente esta diferencia con el fin de separar aguas y poder clarificar, de ahora en adelante, a qué tipo de actividad se hace referencia.

Con referencia al ejercicio no se hará más que sintetizar su descripción ya que no se considera como el eje de la cuestión que se quiere desarrollar, y se puede tomar como suficiente clara la definición que se da en Pérez y Pozo (1997) donde se indica que "... la realización de ejercicios se basa en el uso de destrezas o técnicas sobreaprendidas (es decir, convertidas en rutinas automatizadas como consecuencia de una práctica continuada). Nos limitamos a ejercitar una técnica cuando nos enfrentamos a situaciones o tareas ya conocidas, que no suponen nada nuevo y que, por tanto, pueden superarse por los caminos o medios habituales..."

En Quaranta y Wolman (1995) se hace referencia a situación-problema "...donde los alumnos buscan y aplican diferentes procedimientos para la resolución de los mismos. Y decimos verdaderos problemas en el sentido en que éstos involucran un desafío intelectual y no simplemente una aplicación mecánica de nociones ya introducidas por el maestro..."

Básicamente la diferenciación que Brousseau hace respecto a la situación problemática en comparación con la postura piagetiana en relación a la significatividad que tiene un problema para el alumno, reside en que el medio con el que el alumno interactúa no es sólo la realidad sino también un medio generado por el docente, en el cual aparecen situaciones enmarcadas dentro de los

conceptos que se pretende que el alumno aprenda. La interacción de la cual habla Brousseau es más amplia, y específica a la vez, ya que se trata de la interacción con saberes elegidos – culturalmente aceptados como válidos – y competencias deseables. La significatividad que adquiere un problema no está signada entonces sólo por la experiencia y motivación del alumno sino que también estará realizada por la intencionalidad del docente al otorgarle un status relevante dentro de las conceptualizaciones que considera esenciales para el desarrollo de competencias específicas dentro del marco de su concepción de la matemática como ciencia y como área base para el desarrollo de un individuo.

Se presenta dentro de un marco específico, la situación didáctica² (Brousseau), donde "... el docente está implicado con el sistema de interacciones del alumno con los problemas que plantea..." (Brousseau, 1993).

En Gálvez (1997) se indica que "... se trata de enfrentar a los alumnos a una situación que evolucione de tal manera que el conocimiento que se quiere que aprendan sea el único medio eficaz para controlar dicha situación. La situación proporciona la significación del conocimiento para el alumno, en la medida en que lo convierte en un instrumento de control de los resultados de su actividad. El alumno construye así, un conocimiento contextualizado, a diferencia de la secuenciación escolar habitual, donde la búsqueda de aplicaciones de los conocimientos sucede a su presentación, descontextualizada..."

Como mencionan también Chevallard, Bosch y Gascón (1993), el profesor debe imaginar y proponer a los alumnos situaciones matemáticas que ellos puedan vivir, que provoquen la emergencia de

Un primer ejemplo

Uno de los momentos clave por las notorias dificultades que presenta es el del pasaje del lenguaje coloquial al simbólico, momento de la aparición del álgebra en los contenidos curriculares.

Si el docente plantea, como actividad inicial, por ejemplo, "encontrar cuál es el número que sumado a tres da por resultado ocho" se encontrará con la respuesta al problema, y puede llegar quizás a suponer que dicha actividad sirve como ejemplo inicial para introducir el concepto de variable o indeterminada. Probablemente no ha tenido en cuenta que, ante ese tipo de problema el alumno simplemente opere mentalmente y no necesite de otra herramienta que cumpla el mismo objetivo; al menos para ese tipo de ejemplos. La situación no sería la misma si, siguiendo con un ejemplo dentro del inicio al álgebra, la situación planteada adquiere la complejidad tal que la operatoria mental no le permita resolverla, como por ejemplo "cuál es el número al cual sumándole el doble de 7,29 da por resultado 40,08". Es más que probable que su estrategia de solución mental sea inadecuada para esta segunda proposición.

² Para una profundización del concepto ver Brousseau (1993)

genuinos problemas matemáticos y en los cuales el conocimiento en cuestión aparezca como una solución óptima a dichos problemas, con la condición adicional de que dicho conocimiento sea construible por los alumnos.

Es aquí donde se debe poner el acento a la hora de diferenciar- o por lo menos esta es la propuesta de este trabajo - un problema de una situación problemática.

Dentro del marco de la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau) se da fundamental importancia a la enseñanza a partir de la resolución de situaciones problemáticas donde el uso de las mismas puede, a su vez, reinterpretarse de dos maneras distintas:

- a) la situación problemática como mecanismo disparador de una situación de aprendizaje en la cual se construirán por parte de los alumnos los conceptos y procedimientos matemáticos necesarios para la adecuada resolución de la misma, o bien
- b) la situación problemática como herramienta que permite establecer el grado de transferencia realizado por los alumnos de conceptos y/o procedimientos construidos aplicados a situaciones nuevas

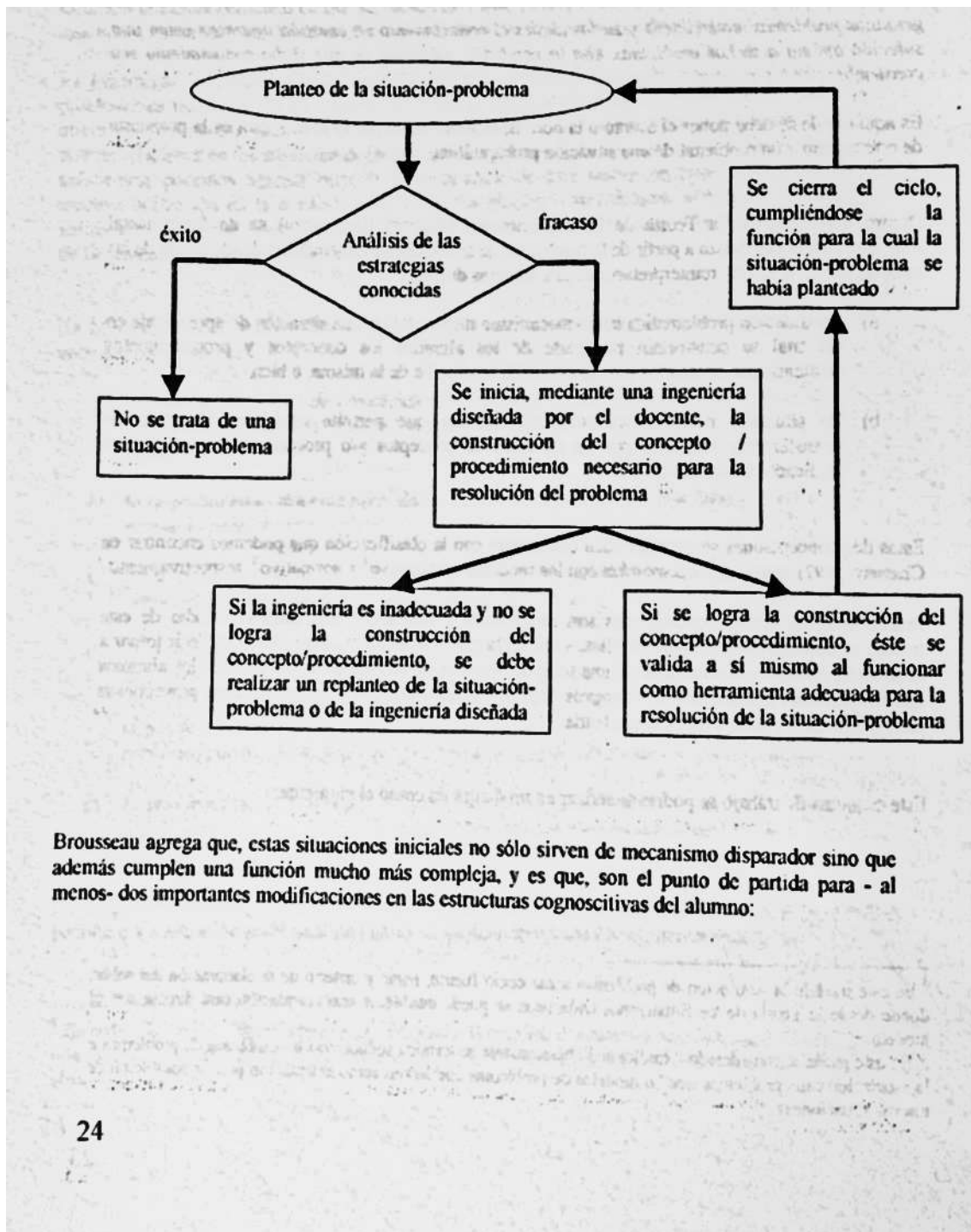
Estas dos concepciones se corresponden claramente con la clasificación que podemos encontrar en Charnay(1997), y que se corresponden con los modelos apropiativo³ y normativo⁴ respectivamente

Indudablemente ambas concepciones son importantes y deseables, pero para el estudio de este trabajo se centrará en la primera de ellas, - que es la que se considera como ideal - es decir tomar a la situación como desencadenante de una serie de procesos de construcción por parte de los alumnos que les permitan la elaboración de nuevos objetos matemáticos que a su vez resulten provechosos para la resolución de la situación planteada.

Este esquema de trabajo se podría sintetizar en un diagrama como el siguiente:

³ En este modelo la resolución de problemas actúa como fuente, lugar y criterio de la elaboración del saber, donde desde la Teoría de las Situaciones Didácticas se puede establecer una correlación casi directa con el modelo

⁴ En este modelo, considerado "tradicional" básicamente se termina reduciendo la resolución de problemas a la asociación con "problemas tipo" o modelos de problemas que sirven como orientación para la resolución de nuevas situaciones)



Brousseau agrega que, estas situaciones iniciales no sólo sirven de mecanismo disparador sino que además cumplen una función mucho más compleja, y es que, son el punto de partida para - al menos- dos importantes modificaciones en las estructuras cognitivas del alumno:

la prueba y rechazo de mecanismos que en oportunidades anteriores resultaron satisfactorios para la resolución de problemas, y que en esta oportunidad no resultan provechosos – lo cual implica una resignificación de dichos mecanismos, readaptándolos, es decir una modificación del rango de utilidad de los mismos – y

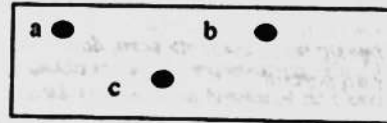
- la construcción de nuevos mecanismos que permitan la consecución de los resultados deseables ante la nueva situación – lo cual redimensiona también las estructuras cognitivas pues introduce nuevos conceptos, establece nuevas relaciones y conexiones, delimita nuevos rangos de validez y asigna limitaciones – a las estructuras existentes

Brousseau en este punto introduce la noción de obstáculo como potenciador para la búsqueda de alternativas a mecanismos que resultan inadecuados o insuficientes para los problemas planteados. Sin entrar en detalle profundo de este concepto, se indica que la situación planteada debe producir en el alumno un conflicto cognitivo, conflicto éste que se observa mediante la aparición de un obstáculo⁵ que le impide al alumno lograr el objetivo de la resolución de la situación con la sola aplicación de los conocimientos – conceptos, procedimientos, técnicas y recursos – hasta ese momento manejados por él, y que se “ajustaban” al modelo de situación como la que se plantea.

Esta nueva situación genera la necesidad de construir nuevas herramientas para “superar” dicho obstáculo, y estará justamente en esta construcción el centro y foco de la actividad matemática de la

Un segundo ejemplo

La actividad propuesta es la siguiente:
 Dados los tres puntos indicados a , b y c , donde a es el vértice de un ángulo, b pertenece a uno de los lados de dicho ángulo, y c pertenece a la bisectriz del mismo, construirlo.



En este caso, podemos suponer que el alumno no encontrará obstáculo alguno en la resolución de la actividad propuesta, pero se debe tener en cuenta que, en primer lugar, lo usual es enseñar a construir la bisectriz dado el ángulo, y que, generalmente las actividades de implementación posterior apuntan a fijar justamente dicho procedimiento, que, en este caso, no es el indicado para resolver el problema, y, en segundo lugar que posiblemente el alumno, independientemente de lo mencionado en el enunciado interprete que los tres puntos indicados en el esquema representan al ángulo, e intenten construir la bisectriz del mismo.

⁵ Brousseau establece una categorización en obstáculos de tipo *ontogénico* (de origen básicamente biológico, o madurativo, o relacionados con algún tipo de incapacidad específica), *didáctico* (en relación a las prácticas docentes) y *epistemológico* (en relación a los orígenes específicos de los saberes), siendo los dos últimos aquellos sobre los cuales se puede – y debe – intervenir

situación didáctica particular en que se encuentre y que, con la intencionalidad del docente provoca este nuevo "afrontar" una situación desconocida cuyos mecanismos de solución no se conocen.

Es justamente la construcción del nuevo concepto o procedimiento lo que dará sentido a esa problemática planteada, de tal manera que luego de haberse construido no sólo aparece como una nueva herramienta útil para la resolución de determinadas situaciones, sino que además planteará nuevas relaciones en los esquemas cognoscitivos del alumno; y si estas dos consecuencias no fueran suficientes, podemos agregar otra, la incorporación de esta nueva herramienta-concepto y su efectiva utilización en la resolución del problema planteado inicialmente servirá además para la validación y posterior institucionalización (en el sentido de la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau) del procedimiento realizado.

En Mathiaud (1995) refiriéndose a Douady (1984) se menciona su propia descripción de lo que entiende por problema:

- a) *el enunciado es fácil de comprender y el alumno es capaz de pensar en una posible respuesta al problema. Esto es independiente de su capacidad para proponer una solución*
- b) *la respuesta no es evidente pero, dados sus conocimientos, el alumno puede intentar una respuesta parcial*
- c) *para contestar en su totalidad al problema, el alumno tendrá que construir el conocimiento que el profesor quiere enseñar*
- d) *el problema es lo suficientemente abierto como para que el alumno pueda contemplar una serie de preguntas no formuladas en el texto y utilizar diferentes caminos. Sin embargo, las posibilidades que le son ofrecidas no son demasiado grandes de modo que él puede efectivamente escoger. Estas condiciones eliminan, por ejemplo, plantear un problema por medio de pequeñas preguntas a las que sólo existe una posible respuesta.*
- e) *El problema puede formularse al menos en dos marcos⁶, teniendo cada uno de ellos su propio lenguaje, entre los cuales sabemos establecer correspondencias*

No se puede establecer - a priori - si una determinada actividad adquiere el rango de ejercicio o problema (o situación problemática) hasta no analizar al menos los siguientes indicadores:

⁶ Entendiendo -según el autor referenciado- por marco al conjunto de objetos de una rama de la matemática, las relaciones entre dichos objetos, sus posibles formulaciones y las imágenes mentales que pueden asociarse a los objetos y sus relaciones

- los conocimientos previos que los alumnos efectivamente tienen
- el concepto / procedimiento cuya construcción será el centro de la actividad
- el grado real de obstáculo que representa dicho concepto / procedimiento efectivamente para los alumnos
- la construcción misma realizada por los alumnos
- la transferencia efectivamente lograda de dicho concepto / procedimiento a la situación planteada

A MODO DE CIERRE (PERO NO DEFINITIVO)

Lo fundamental es, a la hora de utilizar ejercicios, problemas o situaciones-problema, establecer claramente cuáles son las intenciones de los mismos, ya que, no se trata simplemente de subirse a la moda de utilizar un lenguaje complejo para definir una forma de trabajo y así pretender jerarquizar una tarea que se jerarquizará por sí sola si se diseña adecuadamente en función de las expectativas planificadas y pensando en la adecuada construcción de los objetos matemáticos por parte de los alumnos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Brousseau, G. (1993). *Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática*. En Dotti, E. y Vargas, J. (eds.) *Trabajos de matemática. Serie B. N° 19-93*. Universidad Nacional de Córdoba.
- Charnay, R. (1997). *Aprender (por medio de) la resolución de problemas*. En Parra, C. y Saiz, I. (comps.). *Aportes y reflexiones Didáctica de matemáticas*. Buenos Aires: Paidós.
- Chevallard, y, Bosch, M. y Gascón, J. (1993). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. México: Secretaría de Educación pública.
- Galvez, G.(1997). *La didáctica de las matemáticas* En Parra, C. y Saiz, I. (comps.). *Aportes y reflexiones Didáctica de matemáticas*. Buenos Aires: Paidós.
- Mathiaud, M. (1995). *Enseñar a partir de actividades* En *Enseñanza de las matemáticas: Relación entre saberes, programas y prácticas*. I.R.E.M. Topiques editions
- Pérez Echeverría, M.; Pozo Muncio, J. I. (1997). *Aprender a resolver problemas y resolver problemas para aprender* En Pozo Muncio, J. I. (coord) *La solución de problemas*. Buenos Aires: Santillana.
- Polya, J. (1981). *Cómo plantear y resolver problemas*. Ed Trillas, México, traducción de la segunda edición del original *How to solve it*, Princeton University Press, Princeton.
- Quaranta, M. E y Wolman, I.S. (1995). *Tras las huellas del "h"error. Piaget y Brousseau focalizando los errores en los procesos cognitivos y didácticos*. En Colección Documentos de Trabajo n° 13. Instituto de Investigaciones en Ciencias de la Educación. Facultad de Filosofía y Letras. Universidad de Buenos Aires.
- Schönfeld, A. H. (1985). *Ideas y tendencias en la resolución de problemas*. En *La enseñanza de la matemática a debate*. Madrid: Servicio de Publicaciones del MEC.