¡CANTOR, GALILEO Y ZENÓN, UN SOLO CORAZÓN!

Vicente Messina
Instituto Superior Leonardo da Vinci
Boulogne. Buenos Aires. (Argentina)

Lo que se ha dicho una vez puede ser repetido siempre.
Zenón de Elea, citado por Simplicio

"Nuestra primera impresión ingenua de la naturaleza y de la materia es la de la continuidad. Así se trate de un trozo de metal o de un volumen líquido, invariablemente lo concebimos como divisible hasta el infinito, y nos parece que cada partícula, por pequeña que sea, posee siempre las mismas propiedades que el todo.
David Hilbert

La finalidad de Zenón de Elea al señalar esta paradoja o antinomia, no es polemizar contra el movimiento, sino contra el concepto de movimiento, es decir, contra el conjunto de implicaciones lógicas conexas con este término.

Además su interés es fundamentar el sistema filosófico de Parménides, con un argumento que pruebe que la concepción de movimiento debe ser revisada, dado que en el sistema parmenídeo el ser es inmóvil. Que el movimiento es un dato empírico es indudable, así como es indudable que Aquiles alcanza a la tortuga, pero a raíz de esta paradoja surge toda una problemática que no debía evitarse para comenzar a conceptuar la idea de movimiento.

Recordemos el enunciado del problema: sobre una recta se mueven en igual dirección (con movimiento continuo y uniforme) Aquiles y la tortuga. La velocidad de Aquiles es 100 mayor que la velocidad de la tortuga. Aquiles le da una ventaja a la tortuga de s metros. Zenón concluye que Aquiles nunca alcanzará a la tortuga. Lo curioso de este problema, además de la conclusión, es que no importa que ventaja tenga la tortuga, puede ser un metro o un kilómetro, según Zenón, Aquiles nunca la alcanzará. El argumento planteado por Zenón es que mientras Aquiles recorra la distancia s la tortuga avanza $s/100$, mientras el primero recorre $s/100$, la segunda avanzará $s/(100)^2$. Repitiendo este razonamiento n veces, la tortuga siempre estará delante de Aquiles, aunque sea por una fracción extremadamente pequeña. En esta paradoja, como en la paradoja de la flecha, Zenón supone que una suma de infinitos términos es infinita. Veamos una posible solución.

Siendo la velocidad de Aquiles $V_A = 100\,V_T$, y la velocidad uniforme $v = \dfrac{x}{t}$, con x_A indicamos la posición que ocupa Aquiles y con x_T la posición ocupada por la tortuga, de modo que tendremos,

$$\frac{x_A}{t} = 100\,\frac{x_T}{t} \Rightarrow x_A = 100\,x_T \Rightarrow \frac{x_A}{100} = x_T$$

La distancia que recorre la tortuga es una centésima de la recorrida por Aquiles, pero tenemos que agregarle la ventaja s que le da Aquiles, por lo tanto nos queda:

$$(1)\ x_T = \frac{x_A}{100} + s$$

	0	1	2	3	4	...	n
x_A	0	s	$s+\frac{s}{100}$	$s+\frac{s}{100}+\frac{s}{100^2}$	$s+\frac{s}{100}+\frac{s}{100^2}+\frac{s}{100^3}$		
x_T	s	$s+\frac{s}{100}$	$s+\frac{s+\frac{s}{100}}{100}$	$s+\frac{s+\frac{s}{100}+\frac{s}{100^2}}{100}$	$s+\frac{s}{100}+\frac{s}{100^2}+\frac{s}{100^3}+\frac{s}{100^4}$		

Tabla. Se indican las sucesivas distancias de Aquiles y la tortuga

En el instante inicial Aquiles se encuentra en la posición cero y la tortuga en la posición s como indica la figura 1 y en la columna 0 de la tabla

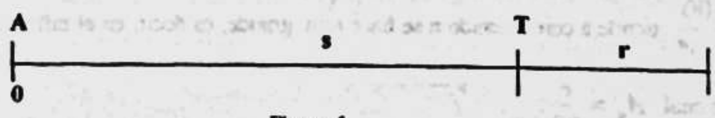
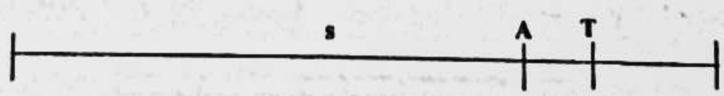


Figura 1

Cuando Aquiles recorra la distancia s la tortuga estará en s + s/100, como se puede observar en la columna 1 de la tabla, esto se esquematiza en la figura siguiente



En las columnas 2, 3, y 4 se indican las distancias que han recorrido la tortuga y Aquiles, nos falta indicar la distancia en la columna n, esta será:

$$x_A = s + s\underbrace{\boxed{\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+\frac{1}{100^3},+\cdots+\frac{1}{100^{n-1}}\right)}}_{A_n}$$

$$x_T = s + s\underbrace{\boxed{\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+\frac{1}{100^3}+\cdots+\frac{1}{100^n}\right)}}_{T_n}$$

Es posible hallar las sumas de las distancias, dado que son dos progresiones geométricas, cuya razón r es un centésimo y su primer término es 1/100, debemos descartar el primer término s, que luego sumaremos. Sabemos que la suma de una progresión geométrica con $0 < r < 1$ es:

$$S_n = a\frac{r^n - 1}{r-1} = a\frac{1-r^n}{1-r}$$

Reemplazando por los valores en nuestro caso tendremos:

$$A_n = \frac{1}{100}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{100}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{100}}\right) = \frac{1}{100}\left(\frac{1-\left(\frac{100}{100^n}\right)}{\frac{99}{100}}\right)$$

La fracción $\frac{100}{100^n}$ tiende a cero, cuando n se hace muy grande, es decir, en el infinito esa fracción es cero. Con lo cual $A_n = \frac{s}{99}$.

Si hacemos lo mismo con la suma T_n de la tortuga tendremos:

$$T_n = \frac{1}{100}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{100}\right)^n}{1-\frac{1}{100}}\right) = \frac{1}{100}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{100^n}\right)}{\frac{99}{100}}\right)$$

De la misma forma, la fracción $\frac{1}{100^n}$ tiende a cero cuando n tiende a infinito, por lo que la suma de la progresión geométrica $T_n = \frac{s}{99}$

La suma de las distancias recorridas por ambos corredores es

$$T = A = s + \frac{s}{99} = \frac{s100}{99}$$

Por lo tanto, podemos concluir que Aquiles alcanza a la tortuga en un punto ubicado en (s.100)/99, después de recorrer infinitos puntos. Aquí es donde se relaciona este problema con la paradoja planteada por Galileo en los *Diálogos relativos a dos nuevas ciencias* en la cual se comparan la cantidad de puntos de dos segmentos de distinta longitud, de la manera indicada en la figura 2, y se llega a la conclusión, aparentemente paradójica, de que es la misma cantidad.

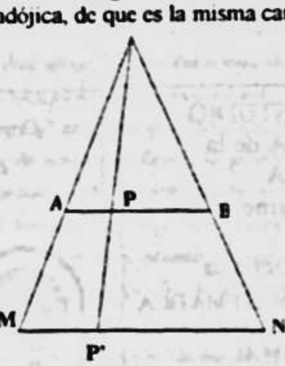


Figura 2 Se observa que a cada punto del segmento AB corresponde un punto (y solo uno) del segmento MN, por ejemplo P y P'

En la paradoja de Zenón, Aquiles ocupa la posición X_A en el tiempo t, mientras que la tortuga estará en la posición X_T en ese mismo tiempo t, es decir, para cada punto ocupado por Aquiles en el segmento que va desde el 0 hasta el punto de encuentro (s.100)/99, le corresponde un punto (y solo uno) para la tortuga en el segmento que va desde s hasta el punto de encuentro. Luego los puntos X_A son tantos como los X_T, es decir, el segmento recorrido por Aquiles tiene tantos puntos como el segmento recorrido por la tortuga.

Como se observa es la misma paradoja. Esta será retomada y solucionada por Cantor en su teoría de conjuntos transfinitos en donde se establece una jerarquía de infinitos de orden creciente, y prueba que los infinitos puntos que componen a los segmentos de las paradojas anteriores, son infinitos del mismo orden. Es decir, de acuerdo con Cantor la respuesta es: *sí, tienen la misma cantidad de puntos...*

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Crespo Crespo, C. (2001) *Seminario de Temas Avanzados en Ciencia III. Fundamentación lógica de la matemática.* Apuntes de Cátedra. Universidad Nacional de San Martín. Buenos Aires.

Geymonat, L. (1987). *El pensamiento científico*, Buenos Aires: EUDEBA.

Gomez, P. y Gomez C. (1995) *Sistemas formales, informalmente*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Dantzig, T.(1971). *El número. Lenguaje de la ciencia*, Buenos Aires: Editorial Hobbs Sudamericana.

Lamanna, P. (1970). *El pensamiento antiguo*, Buenos Aires: .Edicial.

Moledo, L. (1995). *De las tortugas a las estrellas*, Buenos Aires: A-Z Editora.

Northrop, E.P. (1960). *Paradojas matemáticas.* México: UTEHA.