

ENSEÑANDO LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL Y SUS RELACIONES CON ARITMÉTICA Y GEOMETRÍA.

María Cristina Ahumada - Héctor Nicolás Funes, María de las Mercedes Moya

1.- Introducción

En este trabajo se presentan los resultados de una experiencia realizada con los alumnos del Profesorado de Matemática y Física y con docentes del tercer ciclo de EGB3 y Polimodal en la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de Salta.

La nueva ley de Educación pone énfasis en la enseñanza de las herramientas provenientes de la Probabilidades y la Estadística. Los alumnos del profesorado en Matemática y los ya egresados de nuestra Facultad no tienen la posibilidad de recibir un enfoque particular hacia la enseñanza de las probabilidades y la estadística que necesitan para su desempeño profesional, porque la materia correspondiente se dicta conjuntamente a alumnos de otras carreras.

2.- Objetivos

El objetivo planteado en el curso fue reforzar los aspectos didácticos y tecnológicos de los estudiantes del profesorado y de los docentes del nivel medio.

Nos propusimos buscar junto a docentes y alumnos, caminos alternativos para transmitir los conceptos relativos a la Distribución Binomial. Un modelo teórico, siempre resulta poco atractivo para los estudiantes, pero a través de la experimentación, se puede llegar al concepto de la distribución teórica partiendo de la distribución empírica. Estas experiencias, especialmente realizadas con el dispositivo de Galton, llevan a relacionar conceptos dentro de la estadística y las probabilidades, como las poblaciones dicotómicas, la probabilidad frecuencial y las distribuciones de probabilidad.

Otro objetivo planteado fue que el docente - alumno sea capaz de construir su propio material didáctico, pudiendo usar para ello materiales descartables o accesibles. Para ello se puso énfasis en el uso de las transformaciones rígidas a fin de lograr las características geométricas requeridas en la construcción del dispositivo de Galton.

Por último, nos propusimos relacionar el dispositivo con el triángulo de Tartaglia y sus propiedades aritméticas.

3.- Contenidos sintéticos

- > Transformaciones Rígidas necesarias para la construcción del dispositivo de Galton.
- > Variables estadísticas. Variables dicotómicas. Pruebas de Bernoulli.
- > Probabilidades en espacios finitos. Probabilidad clásica y frecuencial. Sucesos.
- > Variable Aleatoria Binomial. Aparato de Galton.
- > Triángulo de Tartaglia. Números combinatorios. Propiedades aritméticas del Triángulo de Tartaglia.

4.- Desarrollo del curso

A pesar del título del curso, se comenzó recordando las transformaciones rígidas, esto provocó cierta curiosidad entre los alumnos, ¿qué tiene que ver con la distribución binomial?. Como la idea de la propuesta era relacionar distintos temas, y las transformaciones rígidas servirían de base para la construcción del dispositivo de Galton se decidió comenzar con ellas.

Luego de una breve exposición del tema los alumnos trabajaron en grupo resolviendo ejercicios del práctico propuesto, realizando además experiencias con espejos y con los diseños de Escher.

En un segundo encuentro se trabajaron las variables estadísticas y en especial las dicotómicas. Con diversos ejemplos se introdujo la sucesión de pruebas de Bernoulli destacando la importancia de contar el número de pruebas donde se cumple una característica. Además se recordaron los conceptos de probabilidad clásica y frecuencial e independencia de sucesos. Para esto se planteó el famoso problema presentado por el duque de Toscana a Galileo y que éste resolvió mediante una laboriosa tabulación de casos posibles.

He observado que al tirar tres dados, la suma 10 aparece con más frecuencia que la 9, sin embargo, los casos favorables para cada caso son:

Suma 10	1+3+6	1+4+5	2+2+6	2+3+5	2+4+4	3+3+4
Suma 9	1+2+6	1+3+5	1+4+4	2+2+5	2+3+5	3+3+3

Es decir en las dos situaciones hay seis casos favorables. ¿Cómo es posible entonces que me salga más veces la suma 10 que la 9?

En un práctico se plantearon experiencias con dados, bolillas, cartas etc, con la idea de que experimentarían la necesidad de contar en la repetición de casos y compararan los resultados de calcular probabilidades con la definición clásica y la frecuencial. Es aquí donde se presenta el dispositivo de Galton como una solución práctica para contar experiencias en una sucesión de pruebas de Bernoulli donde las probabilidades de éxito y fracaso son iguales.

¿Qué es el dispositivo de Galton?

Se hizo una breve referencia histórica del creador de este dispositivo, a los fines de clarificar su importancia tanto en su momento como en la actualidad, ya que Sir Francis Galton (1822-1911) solía estar obsesionado con la idea de contar y de medir. En su laboratorio medía cabezas, narices, brazos, piernas, color de ojos y pelo, capacidad respiratoria, altura, peso. Además compiló estadísticas del tiempo, de las propiedades de los gemelos idénticos, de la frecuencia de los bostezos, de la esterilidad de las herederas, de la duración de la vida, de la herencia de los rasgos físicos y mentales, etc.

Quizás la obsesión de Francis Galton por contar lo llevó a idear este dispositivo, con la idea de contar las ocurrencias de un acontecimiento particular al repetir un experimento muchas veces.

Se cree que el dispositivo creado por Galton es el que se muestra en la figura siguiente, y que

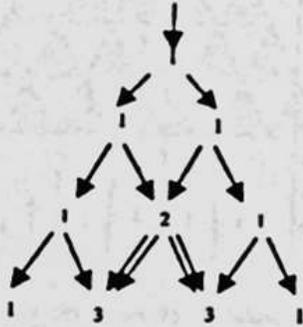
consiste en una serie de topes dispuestos en filas y cuyo funcionamiento fue explicado con el detalle en el curso.

Las bolillas caen desde la parte superior hasta la inferior, por acción la gravedad, pasando por una serie de topes. En cada tope el azar interviene haciendo que la bolilla se dirija hacia la izquierda o hacia la derecha con la misma probabilidad.

Esquemáticamente, se observaron y contaron los caminos diferentes puede elegir una bolilla al caer por el dispositivo.

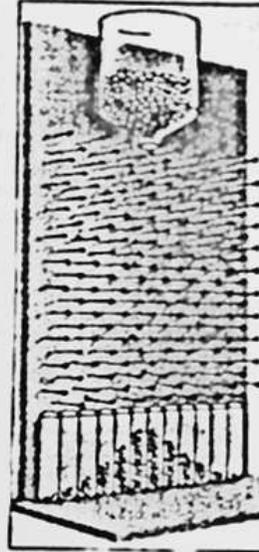
A modo de ejemplo mostramos que si tenemos un aparato de muchas filas podemos ir mirando fila a fila los caminos diferentes que una bolilla particular puede tomar.

Así por ejemplo, en la cuarta fila:



Hay 8 caminos diferentes en la cuarta fila: (I,I,I) (I,I,D) (I,D,I) (I,D,D) (D,I,I) (D,I,D) (D,D,I) (D,D,D).

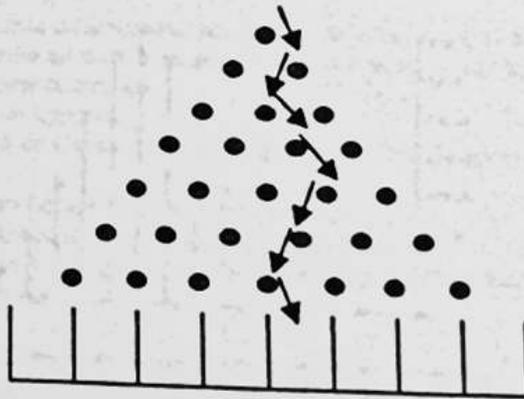
Y se puede continuar contando todos los caminos posibles, según el número de filas que se tenga cada dispositivo particular.



También se pueden observar los caminos particulares completos que una bolilla puede tomar. Por ejemplo, si el dispositivo tiene 7 topes en su última fila, en un camino particular la bolilla podría haber decidido así:

D I D D I I D

O sea eligió ir cuatro veces a la derecha y tres veces a la izquierda, en el orden indicado como muestra la figura.



Probabilidades para los caminos posibles

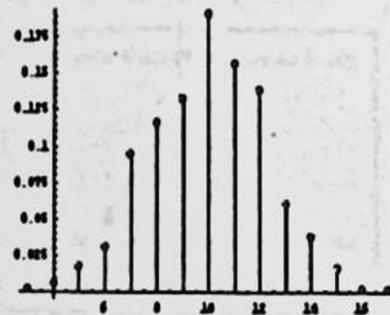
Una bolilla tendrá la oportunidad de caer en cualquier celda, y nos preguntamos que celda tiene mayor probabilidad de recibir la bolilla. De los 128 caminos posibles, ¿cuál tendrá mayor probabilidad de ocurrir? ¿Todos los caminos tienen la misma chance de ocurrir? ¿Todas las celdas tienen las mismas chances de ocurrir?

Para ello repetimos este experimento una gran cantidad de veces, usando muchas bolillas, entonces el llenado de cada celda nos dará una idea de la probabilidad, donde más bolilla tengamos la probabilidad será mayor.

Distribución Binomial

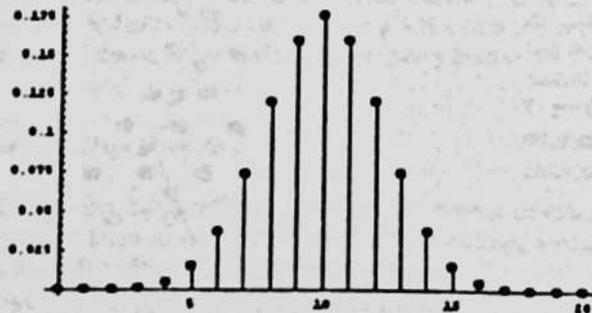
El dispositivo de Galton permite observar la forma de una distribución de frecuencias, que mediante un sencillo cambio de escala, constituye la distribución de probabilidades binomial empírica con n igual a la cantidad de topes de la última fila y probabilidad de éxito $\frac{1}{2}$. Esta distribución describe la probabilidad frecuencial de cada valor posible de la variable si el número de repeticiones es muy grande, o sea si el número de bolillas lanzadas lo es.

Se mostraron simulaciones de distintas distribuciones, con diferentes valores de n . La figura muestra una simulación para $n = 20$, realizada en computadora. Se compararon estos gráficos con los obtenidos en el dispositivo de Galton.



A partir de estas ideas se introdujo la distribución binomial teórica y se compararon ambas distribuciones.

La figura muestra la distribución teórica para $n = 20$ y $p = \frac{1}{2}$, cuya simulación es el gráfico anterior.



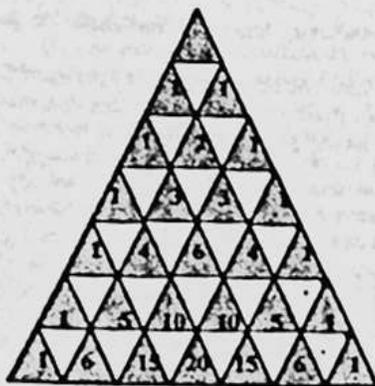
Luego se presentaron aplicaciones de la distribución binomial a distintas disciplinas.

Se usaron en las experiencias dos dispositivos, uno con hexágonos de madera y otro con tapitas de gaseosa, proponiendo así,

una forma de construcción económica y sencilla. Como una actividad más, los alumnos construyeron su propio dispositivo Galton, utilizando distintos recursos, poniendo a prueba su propia imaginación. Así en la construcción, logramos una aplicación de la geometría con las transformaciones rígidas.

Para trabajar con distribuciones binomiales empíricas pero con probabilidad de éxito distinta de $\frac{1}{2}$ se realizaron repetidas simulaciones usando dados, ruletas, y urnas con bolillas. Estas también se compararon con las distribuciones teóricas respectivas.

Triángulo de Tartaglia



Si se reemplazan los topes en el dispositivo de Galton, por los números de caminos correspondientes que llegan a él, se tiene el triángulo de Tartaglia (que también es conocido como el triángulo de Pascal).

A partir de esta disposición de números se pueden investigar las propiedades de los números combinatorios y además se logra identificar distintas sucesiones importantes en la aritmética, como la sucesión de Fibonacci.

5.- Evaluación

A lo largo del curso de evaluación los contenidos conceptuales y procedimentales, a través de la resolución de problemas y la realización de experiencias, con un intercambio de ideas para lograr un enriquecimiento mutuo.

Los docentes debían preparar y defender una propuesta didáctica que sea factible de llevar al salón de clases, utilizando el dispositivo de Galton y teniendo en cuenta su propia realidad docente. En las propuestas presentadas se destacan las siguientes ideas de trabajo:

- ❖ Estudiar una distribución binomial desde un texto literario.
- ❖ Proponer distintas construcciones del dispositivo de Galton, buscando mostrar más efectivamente los caminos seguidos por las bolillas.
- ❖ Simular el dispositivo de Galton usando como los bancos de topes y pelotas como bolillas.
- ❖ Investigar la construcción del dispositivo para distintas probabilidades de éxito y fracaso.

Todas las propuestas fueron presenciadas, valoradas y disfrutadas por los estudiantes y docentes del curso, generando nuevas ideas y propuestas alternativas.

6.- Conclusiones

Como resultado de este curso, docentes y alumnos tuvieron la oportunidad de

- ◆ Realizar experiencias, observar resultados, visualizar la regularidad estadística.
- ◆ Visualizar distribuciones empíricas y comparar con distribuciones teóricas.
- ◆ Despertar su imaginación y construir sus propios recursos tecnológicos.
- ◆ Planificar nuevas propuestas educativas para llevar al aula de E.G.B.3.
- ◆ Reflexionar sobre su propia práctica docente.
- ◆ Interactuar a través de sus actividades y experiencias.
- ◆ Generar nuevas ideas y propuestas, disfrutando del aprendizaje, tomando conciencia de la necesidad de un estudio permanente.

Se discutieron las dificultades de abordar los temas tratados en cada año del ciclo EGB 3 y Polimodal. Creemos que la experiencia fue valiosa, ya que las exposiciones finales de cada uno de los docentes fueron de buen nivel, lo que nos ayuda a crecer y continuar en nuestra propuesta educativa.

7.- Bibliografía

- [1] Guzmán, M. de; Colera, J. "*Matemáticas I y II*". COU. Ed. Anaya. 1992/1989.
- [2] Guzmán, M. de. "*Tendencias Innovadoras en Educación Matemática*" Ed. Red Olímpica Argentina. 1992.
- [3] Guzmán, M. de; Colera, J.; Salvador, A. "*Bachillerato 3*". Ed. Anaya. 1988.
- [4] Santaló, Luis. "*Probabilidad e Inferencia Estadística*". Cuadernos de la OEA. 1980.
- [5] Newman, James. "*SIGMA, El Mundo de las Matemáticas*". V3. Ediciones Grijalbo, 1979.
- [6] De Groot, M. H. "*Probabilidades y Estadística*". Ed. Addison Wesley Iberoamericana. 1988.
- [7] Ahumada, M.C. "*Estadística Descriptiva*". Notas teóricas. Fac. Ciencias Exactas. U.N.Sa. 1997.
- [8] Funes, H. "*Variabes Aleatorias*". Notas teóricas. Fac. Ciencias Exactas. U.N.Sa. 1997.
- [9] Ahumada, C.; Funes, H.; Moya, M. "*Estadística y probabilidades*". Notas teóricas realizadas especialmente para el curso de Capacitación para E.G.B. 3. CIUNSa- U.N.Sa- Red Federal de Capacitación Docente Continua. 1999.