LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS REALES. LOS CONTENIDOS INTERESANTES, LAS DIFICULTADES Y EL ERROR DE OCULTARLAS.

María J. Guasco.

Un relevamiento de programas y planificaciones, guías de T. P. y carpetas de enseñanza media y polimodal, presenta frecuentemente, bajo el título "Números reales", los siguientes contenidos:

- Revisión de números racionales.
- Existencia de números irracionales. La irracionalidad de $\sqrt{2}$.
- Determinación de números reales por encajes de intervalos.
- **Radicales. Simplificación. Extracción e introducción de factores. Radicales semejantes. Reducción a común índice. Operaciones con radicales.**
- **Potencias de exponente racional.**
- **Racionalización de denominadores.**
- **Representación de los números reales en la recta numérica.**

Los marcados en negrita son los temas que presentan también ejercitación y que se evalúan. Además, se reducen al trabajo con números algebraicos, quedando los irracionales trascendentes fuera de toda consideración.

Ejemplos de la ejercitación respectiva abundan, y prueban que el conocimiento del conjunto R no resulta tal, pues queda reducido al de algunos números algebraicos (muchos alumnos creen que irracional es sinónimo de raíz) y ciertas propiedades y procedimientos cuyo campo de validez ni siquiera se discute. (*1)

Por otra parte, esta ejercitación, a pesar de ser tan parcial, llega a insumir dos y hasta tres meses de clase (de un total de ocho del curso lectivo). Un tercio del trabajo del año dedicado a esta primera unidad!, en un programa donde figuran, y se sacrifican, temas como:

- Función lineal y cuadrática. Ecuaciones.
- Función exponencial. Ecuaciones. Logaritmos.
- Sucesiones. Idea de límite de una sucesión.
- Nociones de Geometría analítica.
- Nociones de Geometría del espacio.
- Nociones de Probabilidades y Estadística.

Debemos sacrificar estos temas a las operaciones con radicales?. Y a un estudio del número real?. Qué relevancia darles?.

Para ayudar a decidir, seleccionar contenidos, clarificar las preguntas anteriores, no daremos respuestas, pero nos aproximaremos a ellas mediante las siguientes preguntas. Aclaremos que la separación de las mismas no es tajante, y se realiza sólo para facilitar el análisis.

1) Con qué problemas o situaciones apareció históricamente el número real?.
2) Qué problemas matemáticos y extra matemáticos permite resolver, o simplifica, el número real?.

3) Cuáles son las características propias, novedosas de este conjunto respecto de Q?.
4) Que dificultades presenta su aprendizaje?. Y su enseñanza!.
5) Cuál podria ser su aporte a la formación de una cultura matemática en los estudiantes?.

1) Con qué problemas o situaciones apareció históricamente el número real?.

A los pitagóricos se les apareció este "monstruo deforme": no podía expresarse como cociente de enteros. Con qué problemas?. Problemas de medición de longitudes, o de razones entre segmentos. La razón entre la hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo isósceles no es un número racional: $\sqrt{2}$. (*2)

Es decir que para medir no alcanza con los números racionales. La densidad no alcanza: se necesita un conjunto completo. Por ello la Teoría de la medida se fundamenta en una teoría del número real. Algunos textos de media mencionan esto, pero no lo ejercitan ni lo enriquecen con abundantes ejemplos. Tampoco se evalúa. En consecuencia, se aprende? (*3).

2) Qué problemas matemáticos y extra matemáticos permite resolver, o simplifica, el número real?.

2.1. Problemas cotidianos, prácticos? Quizá ninguno. Para medir, en la práctica, en Física, Química, Biologia, Economía elementales, etc. bastaría con aproximar mediante números racionales, aún con números decimales simplemente!
El interés del tema fue, en su origen, matemático, puramente matemático podríamos decir. Fue una inquietud del espíritu del hombre por el conocimiento, por su valor como tal, no como instrumento, no por su utilidad práctica. Será por eso que se les apareció a los griegos y no a otros pueblos más pragmáticos.? (*4).

2.2. Actualmente es la base del Análisis Matemático. No se puede acceder a la noción de límite sin una idea de la completitud de R. (Y no es trabajando con radicales como se aprende Análisis). (*5) Y, ahora sí, el Análisis matemático es instrumento de infinitas aplicaciones matemáticas, físicas, químicas, biológicas, económicas,...

2.3. El estudio de algunas funciones trascendentes, como la función exponencial.
Su dominio es R, lo cual requiere preguntarse qué significa elevar a exponentes como $\sqrt{2}$ o π, qué propiedades de la potenciación justifican su continuidad y su crecimiento o descrecimiento monótono, etc. Y cuántas aplicaciones a otras disciplinas brinda este estudio!

3) Cuáles son las características propias, novedosas de este conjunto respecto de Q?.

3.1. Corresponde al ámbito del Análisis matemático, no del Álgebra: de N a Z, y de Z a Q, se pasa algebraicamente; en cambio cualquier definición de R a partir de Q "esconde" nociones del Análisis.

Sin embargo, el relevamiento que mencionamos al principio mostró una absoluta algebrización del conjunto en la escuela media.

3.2. La existencia de solución en ciertas ecuaciones algebraicas no resolubles en Q, como por ejemplo:

$$x^2 - 2 = 0$$

En efecto, se amplía el espectro de ecuaciones con solución. Sin embargo, creemos que no es éste el aspecto más importante, pues:

- hay números racionales que no son solución de ecuaciones algebraicas (por ejemplo π).
- siguen quedando ecuaciones algebraicas sin solución en R (por ejemplo $x^2 + 9 = 0$).

A partir de acá, las próximas características serán realizadas a la par de la pregunta (4). Qué dificultades presenta su aprendizaje? Y su enseñanza!.

3.3 y 4.1 La completitud. Esta es, creemos, la propiedad más fuerte e interesante del nuevo conjunto. (*6).
No son nada sencillos la enseñanza y el aprendizaje de esta propiedad. No parece intuitiva, suele confundirse con la densidad, no es fácil hallar ejercitación adecuada. (*7).
La enseñanza – aprendizaje de la completitud de R constituye un riquísimo campo abierto a la investigación didáctica.

3.4 y 4.2. La imposibilidad de "alcanzar" los números irracionales en cualquier número finito de aproximaciones decimales o racionales, por enorme que sea. (*8).
Y la imposibilidad de "alcanzar" ciertos irracionales (los trascendentes) en la recta numérica, empleando regla y compás, o aproximaciones decimales (aunque sepamos que todos los números reales tiene su propio lugar, o punto, en la recta).

3.5 y 4.3. La expresión complicada de muchos números irracionales. No es fácil aceptar que existen números que no tienen expresiones sencillas y cortas, sino que requieren, para su escritura, de las operaciones elementales. (*9).
Las calculadoras facilitan obtener aproximaciones decimales del número "raro", pero quizás oscurecen la comprensión de que éste no es el número que aparece en el visor de la máquina.

3.6 y 4.4. La potenciación.
La potenciación, que apareció en N como una multiplicación reiterada, va estableciendo rupturas y requiriendo restricciones de la base a medida que se amplia el conjunto numérico al que pertenece el exponente. (*10).

5) Cuál podría ser su aporte a la formación de una cultura matemática en los estudiantes?
Muchos de los desarrollos hasta aquí expuestos escapan a la escuela media, pero no el conocimiento de la complejidad que presentan.
Es un error ocultar las dificultades (*11), aunque aún no se posean todas las armas para resolverlas exhaustivamente.

- Mostrar estas dificultades, cómo aparecieron y por qué, cómo reaccionaron algunos matemáticos ante ellas.
- Dejar planteadas preguntas, así como muchos estudiosos lo hicieron.
- Intentar respuestas, a veces parciales, a ellas.
- Enseñar a formularse preguntas (*12)

es parte, y muy importante, de nuestra labor docente.

Hay más matemática en la demostración (sencilla, por otra parte) de la irracionalidad de $\sqrt{2}$, que en la extracción de factores y en la racionalización de denominadores. Lo que no hay más, es destrezas algebraicas, pero éstas no constituyen ni el único, ni el más importante de los contenidos a transmitir a nuestros alumnos.
La Matemática, aún en la escuela media, no es sólo cálculo algebraico. Es amplia, tiene partes difíciles y otras livianas, algunas poéticas y otras áridas, plantea interrogantes, se relaciona con las personas, las épocas y las otras ramas del conocimiento. Está viva.

Referencias bibliográficas y citas

(*1) El sentido de un conocimiento matemático se define:

- no sólo por la colección de situaciones donde este conocimiento es realizado como teoría matemática; no sólo por la colección de situaciones donde el sujeto lo ha encontrado como medio de solución,
- sino también por el conjunto de concepciones que rechaza, de errores que evita, de economías que procura, de formulaciones que retoma, etc.

G. Brousseau. 1983.

(*2) También son segmentos inconmensurables la longitud de cualquier circunferencia y su respectivo diámetro; y también los lados de los rectángulos de oro. La divina proporción, reverenciada por los griegos, por los renacentistas, por Le Corbusier, es un números irracional! (Por qué casi nunca la mencionamos junto a $\sqrt{2}$ o π, etc.?).

(*3) La cuestión esencial de la enseñanza de la Matemática es entonces: cómo hacer para que los conocimientos enseñados tengan sentido para el alumno?.
El alumno debe ser capaz no sólo de repetir o rehacer, sino también de resignificar en situaciones nuevas, de adaptar, de transferir sus conocimientos para resolver nuevos problemas.
R. Charnay. Aprender por medio de la resolución de problemas.

(*4) (...) en una parte del mundo, beneficiada durante siglos por un intenso proceso civilizador, surgió poco a poco un pueblo, no muy numeroso, ni tampoco temible por su poder, ni por cierto bien organizado, que forjó una concepción absolutamente nueva sobre la vida humana, y que mostró por vez primera cuál debía ser la función del espíritu del hombre.
H.D.F. Kitto. Los griegos. Eudeba. 1962.

(*5) Dificultades de los estudiantes con el campo conceptual del Análisis:
(...) dificultades ligadas a la complejidad matemática de los objetos básicos de este campo conceptual: los números reales,...

M. Artigue. Enseñanza y aprendizaje del Análisis elemental. Qué nos enseñan las investigaciones didácticas y los cambios curriculares. Equipe DIDIREM Paris 7, IUFM Reims, expuesto en UBA, 2000.

(*6) Rever, al respecto, el análisis de las preguntas 1 y 2 de este trabajo.
Los conjuntos numéricos deberán quedar claramente caracterizados tanto por sus usos como por las propiedades que poseen. Un buen trabajo sobre la recta confirmará la intuición de que para cada punto de ella existe un números real y viceversa, recalcándose las propiedades de completitud y orden de este conjunto numérico.
C.B.C. del Polimodal. Bloque 1.

(*7) Cuando se empieza la enseñanza del Análisis, los números reales son objetos algebraicos. Los estudiantes saben bien que su orden es un orden denso, pero, según el contexto, pueden conciliar esta propiedad con la existencia de números precedente y sucesor de un real dado: por ejemplo, 0.9999... es percibido a menudo como el predecesor de 1.
(...) En la asociación entre los números reales y la recta real falta también, coherencia. Aún cuando a priori los estudiantes declaran aceptar el principio de una correspondencia biyectiva entre R y la recta, no están sin embargo convencidos de que tal o cual número determinado pueda colocarse en la recta. (Castela, 1996)
M. Artigue. Op. Cit.

(*8) Si marcara en la calculadora π, me daría un números con varios decimales pero no es π, sino un números racional cerca. Y si siguiera obteniendo más y más decimales, nunca sería π, porque π es irracional, así que tiene infinitos decimales, y sin periodo.
Expresado por un alumno de cuarto año.

(*9) Por ejemplo: $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}+\pi+e+\pi^2 \cdot e$
es un número real, y su expresión no puede acortarse ni simplificarse .
El alumno siente la necesidad de "hacer algo" con estas operaciones indicadas, como lo prueba el siguiente diálogo:

- Al ejercicio: Decir si 3 π es racional o irracional, qué respondieron?
- Yo contesté que es irracional. Pero no lo hice.
- Si respondiste eso, lo hiciste.
- Pero no lo hice, a 3 π no lo hice.

En una clase de 4° año.

(*10) El exponente real irracional requiere apoyarse en la definición que se haya elegido para número real (pares de sucesiones monótonas, cortaduras, sucesiones regulares), y en las propiedades de monotonía de la potenciación con exponente en Q:
Siendo a un números real positivo, cualesquiera sean los racionales x e y:
Si $a > 1$, $x < y \Rightarrow a^x < a^y$
Si $a < 1$, $x < y \Rightarrow a^x > a^y$

(*11) Leopoldo Varela, en Matemática. Metodología de su enseñanza. Prociencia. 1986.

(*12) La escuela no está para competir con el zapping. En la escuela debe darse tiempo a la reflexión, a la observación, a formularse preguntas.
J. A. Foncuberta, durante una clase en el Instituto Superior del Profesorado Dr. Joaquín V. González, 1998.
Muchos alumnos nos ayudarán con sus preguntas y sugerencias. No nos hagamos problemas si hay cuestiones que no podemos resolver. Basta contestar: lo averiguaremos. Es preferible al aprendizaje aburrido y sin participación de los alumnos. Hay que animarse por el bien de la educación.
J. A. Foncuberta. Fascículo Vectores y aplicaciones. Nueva Escuela, Ministerio de Cultura y Educación. 1994.