Matemáticas en las aulas de Secundaria

Sección a cargo de

Inmaculada Fuentes Gil

Identificación de otros puntos notables de un triángulo a partir de la resolución de problemas

por

Elisa Liébana Rísquez, Rafael Ramírez Uclés y Antonio Moreno Verdejo

1. Introducción

Para Chapman [3], la enseñanza de las matemáticas escolares y la resolución de problemas están estrechamente relacionadas, si bien la relación se establece de distintas formas:

1. Enseñar para resolver problemas: el docente selecciona una secuencia de problemas para que el estudiante aplique los conocimientos que va adquiriendo.
2. Enseñar sobre la resolución de problemas: se focaliza en modelos determinados de resolución de problemas.
3. Enseñar a través de la resolución de problemas. En este caso, la resolución de problemas es el método de enseñanza. La instrucción se organiza seleccionando los problemas que permiten a los estudiantes reorganizar sus conocimientos y promover nuevos aprendizajes desde los conceptos y los procedimientos.

Uno de los atributos de los problemas que se presentan en la enseñanza es el contexto. Este lo consideramos como el aspecto del mundo del individuo en el cual se encuentran situados los problemas. La elección de las estrategias y representaciones matemáticas adecuadas depende normalmente del contexto en el que se presenta el problema (MECD, [12]).

Para Boaler [1], el uso del contexto en los libros de texto de matemáticas escolares y en los diseños de evaluación contiene numerosas concepciones erróneas. Una de ellas es la idea de que los contextos de la tarea influyen en la motivación de los estudiantes, pero tienen poco efecto sobre los procedimientos matemáticos y el rendimiento. Sin embargo, el trabajo de Lave [8] ha sugerido que el contexto específico en el que se sitúa una tarea es capaz de determinar no solo la resolución general, sino la elección del procedimiento matemático.

En este trabajo presentamos un enfoque para la enseñanza de los puntos notables de un triángulo desde este último punto de vista. Inicialmente analizamos algunas de las propiedades de estos puntos, que tradicionalmente se estudian en secundaria, mostrando ejemplos de problemas reales que podrían utilizarse en su enseñanza. Es decir, partiendo de la definición y sus propiedades, proponemos los problemas que resuelven.

En la segunda parte, invertimos el orden. Para ello, presentamos una selección de problemas que motivan la utilización de los puntos notables a través del estudio de las propiedades del punto solución. A continuación, se pretende promover nuestros aprendizajes a partir de otros problemas reales que impulsan el descubrimiento de nuevos puntos notables menos conocidos, pero con propiedades tan interesantes como las de los puntos clásicos.

PUNTOS NOTABLES DE UN TRIÁNGULO		
Definición del punto	Propiedad	Problema
Circuncentro: es la intersección de las tres mediatrices de un triángulo (O).	El circuncentro equidista de los vértices A, B y C; por lo tanto, es el centro de una circunferencia que circunscribe al triángulo.	*Se quiere colocar una antena como repetidor de la señal proveniente de tres pueblos. El criterio elegido para la ubicación es buscar el punto que equidista de los tres.*
Baricentro: es la intersección de las tres medianas de un triángulo (G).	El baricentro de un triángulo (tomado como región del plano) es el centro de gravedad del mismo.	*Se quiere construir una mesa con forma triangular, tal que solo se pueda apoyar sobre una pata. ¿Dónde debemos situarla para que la mesa permanezca en equilibrio?*
Incentro: es la intersección de las bisectrices de un triángulo (I).	El incentro es el punto que equidista de los tres lados del triángulo.	*Queremos ubicar tres gasolineras en cada una de las carreteras que unen tres pueblos. Para ello, queremos colocar un depósito que esté a la misma distancia de dichas carreteras. ¿Dónde tendríamos que colocar el surtidor y las tres gasolineras?*
Ortocentro: es la intersección de las tres alturas de un triángulo (H).	Las alturas de un triángulo bisecan los ángulos interiores del triángulo órtico. (El triángulo órtico es el que tiene menor perímetro de los inscritos [6].)	*Tres pueblos están ubicados en los vértices de un triángulo. En cada carretera vamos a colocar un almacén. Estos almacenes estarán conectados por carreteras interiores formando un nuevo triángulo, cuyo perímetro es la trayectoria que recorre un camión de recogida. ¿Dónde ubicamos los almacenes para que sea mínimo el trayecto?*

Tabla 1: Puntos notables de un triángulo.

2. Puntos notables clásicos: Definición. Propiedades. Problemas

Tradicionalmente, los puntos notables que se estudian en secundaria (y en cursos universitarios) son el circuncentro, baricentro, incentro y ortocentro. Se definen como intersección de unas rectas determinadas y tienen unas propiedades que permiten utilizarlos para resolver problemas. Un criterio para dar «notabilidad» a estos puntos clásicos es estudiar sus propiedades y los problemas que resuelven.

En la tabla 1 aparecen elementos relacionados con la definición, las propiedades y una situación real que sugiere la utilización de cada punto notable. Sin embargo, el listado de puntos a destacar en un triángulo ha dado lugar a infinidad de propuestas. Valga como ejemplo la *Encyclopedia of Triangle Centers*, donde se recogen más de 1000 de estos puntos [7].

Otro resultado parece darle notabilidad a estos puntos, si bien uno de ellos se queda fuera.

Proposición 1 ([13]). *En todo triángulo no equilátero se cumple la siguiente propiedad: el ortocentro (H), el baricentro (G) y el circuncentro (O) están alineados. La recta que contiene a estos tres puntos se llama* ***recta de Euler****.*

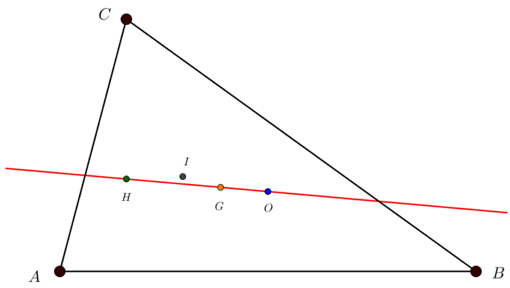

Figura 1: Recta de Euler.

Vemos que el incentro no está contenido en la *recta de Euler* y el ortocentro sí. Luego esta propiedad matemática restaría notabilidad al incentro, del que veremos otras interesantes propiedades.

Por lo tanto, la importancia de los puntos notables se puede ver reforzada por dos argumentos: las propiedades matemáticas que satisfacen y/o los problemas que resuelven. Esto da sentido a cuestionar la «notabilidad» de otros puntos a partir de los problemas de la vida real que resuelven.

3. Otros problemas. Propiedad. Definición

Los puntos notables anteriores resuelven algunos problemas reales en los que hay que ubicar un punto para satisfacer una determinada propiedad del triángulo. Veamos otros problemas que, aparentemente, también están relacionados con los puntos notables. Haremos un análisis previo sobre el tipo de problema, estudiaremos las propiedades del punto que lo resuelve y veremos si es necesario definir un nuevo punto notable.

3.1. Problema 1

Existen diversas situaciones en la vida real, relacionadas con la idea de querer minimizar la máxima distancia de un punto con respecto a otros.

Por ejemplo, *si queremos colocar un parque de bomberos entre tres ciudades o tres pueblos de manera que la máxima distancia del parque a un pueblo sea lo mínima posible, ¿dónde debemos colocarlo?*

Intuitivamente podríamos pensar en colocarlo en un punto que equidiste de los tres, es decir, el circuncentro del triángulo que forman dichos pueblos. Pero realmente, en caso de incendio, lo importante es que no haya un pueblo demasiado lejano.

Podemos decir que, una vez construido el parque de bomberos, habrá un pueblo que esté a mayor distancia del mismo. Esa distancia es la que queremos que sea lo más pequeña posible. Matemáticamente, podemos enunciar la propiedad como **minimizar la máxima distancia.** Para ello, vamos a modelizar el problema suponiendo que no hay carreteras entre ciudades, y que posteriormente se construirían.

En el caso en el que el triángulo sea acutángulo o rectángulo, sí sería el circuncentro el más adecuado. Pero cuando el triángulo es obtusángulo, el punto que equidista de los tres pueblos se sitúa demasiado lejos de los tres pueblos, es decir, la distancia del circuncentro a los tres pueblos no es mínima. En este caso, como el circuncentro no minimiza la máxima distancia, obtendremos un punto diferente, que será el punto medio del lado mayor.

Estudiemos más detenidamente cada uno de los casos anteriormente citados.

3.1.1. El triángulo que forman las ciudades o los pueblos es un triángulo acutángulo

Será el circuncentro el que dé solución a este caso. Veamos por qué este punto es el que minimiza la máxima distancia.

Demostración. Sabemos que el circuncentro es el punto que está en las tres mediatrices a la vez, y cumple

$$\mathrm{dist}(A,O)=\mathrm{dist}(B,O)=\mathrm{dist}(C,O)=R,$$

donde R es el radio de la circunferencia circunscrita del triángulo $\triangle ABC$.

Supongamos que existe otro punto O' que minimiza, en primer lugar, las distancias a los vértices A y B. Es decir,

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}(A,O')&<\mathrm{dist}(A,O),\\ \mathrm{dist}(B,O')&<\mathrm{dist}(B,O).\end{aligned}$$

Como el circuncentro es el punto que equidista de los tres vértices, al movernos de O, la distancia a uno de ellos será más grande que R.

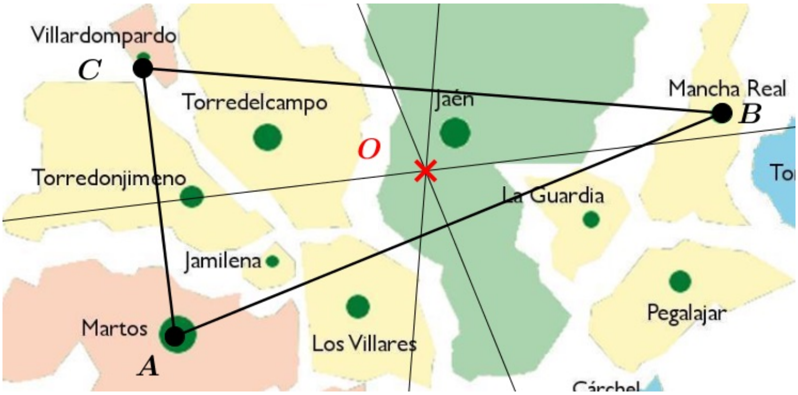

Figura 2: Problema en triángulo acutángulo.

Supongamos que existe un punto O' distinto de O. Estará en una de las regiones OAC, OBC, OAB.

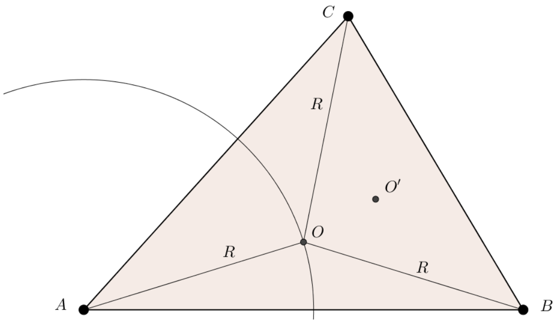

Figura 3: Demostración.

Supongamos que está en la región OBC. Como podemos ver en la figura 3, O' está fuera de la circunferencia de radio $R = AO$. Luego la distancia de B a O' disminuye, pero la de A a O' aumenta.

Por lo tanto, el punto buscado tiene que estar a la vez en las tres mediatrices. El único punto que cumple esta propiedad es el circuncentro. □

3.1.2. El triángulo que forman las ciudades o los pueblos es un triángulo rectángulo

Siguiendo el mismo razonamiento que en el caso en el que el triángulo que forman los pueblos es acutángulo, obtenemos que para el triángulo rectángulo también es el circuncentro el que determinaría el mejor lugar para colocar el parque de bomberos. En este caso, el circuncentro coincide con el punto medio de la hipotenusa del triángulo.

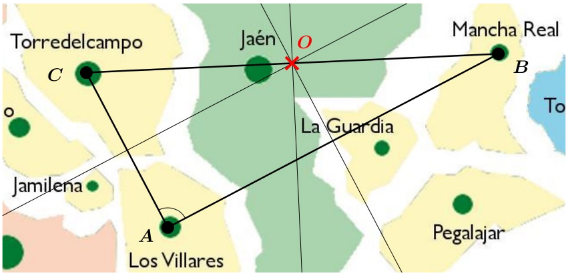

Figura 4: Problema en triángulo rectángulo.

3.1.3. El triángulo que forman las ciudades o los pueblos es un triángulo obtusángulo

En este caso, el circuncentro se encuentra fuera de la región del triángulo. Por ello y porque no haría mínima la distancia a los vértices, no sería la solución más acertada.

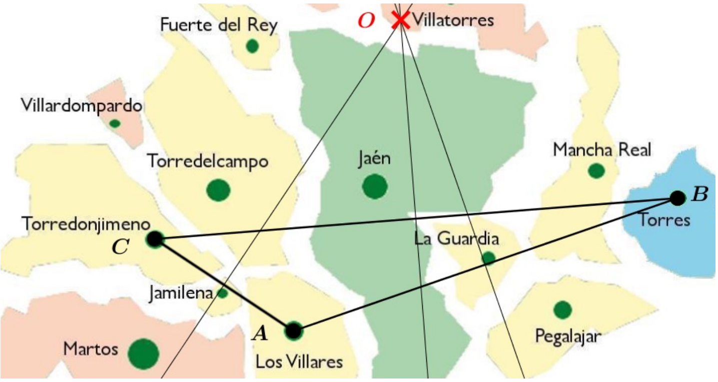

Figura 5: Problema en triángulo obtusángulo.

Estudiemos el punto que cumpliría que la máxima distancia a los vértices sea mínima. Un parque de bomberos necesita estar lo más cerca posible de los tres pueblos.

Punto distinto del circuncentro que minimiza la máxima distancia

Sea un triángulo $\triangle ABC$ tal que uno de sus ángulos sea obtuso. Veamos que existe un punto que minimiza la máxima distancia a los tres vértices del triángulo y que es distinto del circuncentro.

El punto que minimizará la máxima distancia a dos puntos, A y B, será su punto medio. Es decir, si nos movemos por la mediatriz, consideramos los puntos que equidistan de ambos, mientras que si nos situamos en uno de los semiplanos que determina la mediatriz, una de las distancias se hará mayor.

Ahora construimos una circunferencia con radio R, la mitad del lado mayor, y sobre esta circunferencia construimos el triángulo rectángulo que tiene como hipotenusa el lado AB.

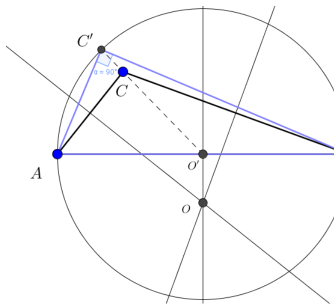

Figura 6: Procedimiento para minimizar la máxima distancia.

Como hemos visto en la figura 4, en un triángulo rectángulo, el circuncentro, que se encuentra sobre el lado mayor, es el que minimiza la máxima distancia. Concretamente, es el punto medio del lado AB, O'. Sea O el circuncentro del triángulo triángulo $\triangle ABC$. Entonces,

$$R = \mathrm{dist}(A, O') < \mathrm{dist}(A, O),$$
$$R = \mathrm{dist}(B, O') < \mathrm{dist}(B, O).$$

Además, $\mathrm{dist}(C, O') < \mathrm{dist}(C', O') = R < \mathrm{dist}(C, O)$.

Luego el punto que minimiza la distancia a los vértices del triángulo $\triangle ABC$ es el punto medio del lado mayor de dicho triángulo, O'.

En este problema, la distinción de casos en el tipo de triángulo (según sus ángulos) permite al estudiante reflexionar sobre las propiedades de uno de los puntos notables, el circuncentro. En el caso obtusángulo, el punto solución es diferente, lo que permite contrastar la propiedad de equidistancia con la de minimizar la máxima distancia.

3.2. Problema 2

Otro tipo de problemas de gran interés que se plantea en este trabajo, es el caso en el que se quiera bisecar el perímetro de un triángulo.

Si un autobús sale, por ejemplo, de Torredonjimeno, pasa por los otros dos pueblos y vuelve (figura 8), ¿cómo calcularíamos el punto de la mitad de este recorrido?

Sabemos de antemano que la mediana es la ceviana que biseca el área de un triángulo. Pero, **¿desde qué punto se biseca el perímetro?** Ninguno de los puntos notables anteriores cumple esta propiedad, por lo que investigaremos otros puntos que puedan dar respuesta a este problema.

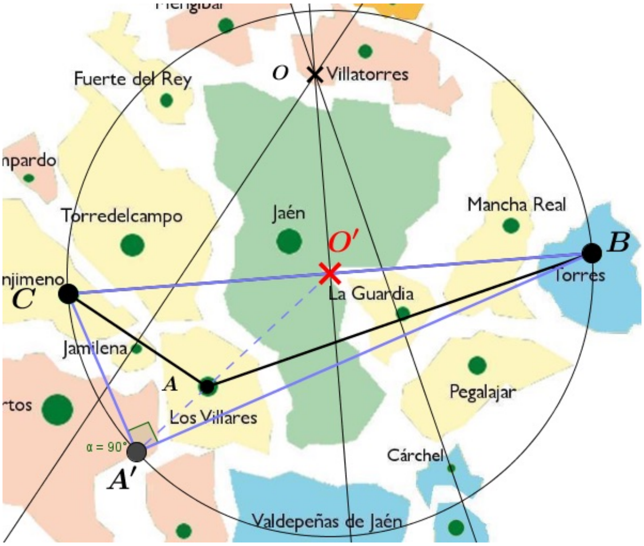

Figura 7: El parque de bomberos en el triángulo obtusángulo.

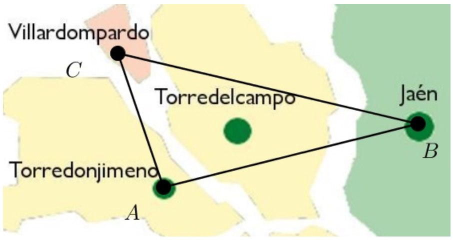

Figura 8: Problema 2.

3.2.1. Punto de Nagel

Para definir el punto de Nagel, necesitamos definir conceptos previos.

DEFINICIÓN 1. Una circunferencia no inscrita, tangente a los tres lados de un triángulo, se llama **circunferencia exinscrita** y su centro **exincentro**.

En una circunferencia exinscrita (hay 3), el centro es el punto de corte de una bisectriz interior y dos bisectrices exteriores.

DEFINICIÓN 2. Dado un triángulo $\triangle ABC$, el **triángulo antimedial** es el triángulo $\triangle A'B'C'$ que se forma al hacer paralelas a los lados por los vértices opuestos del triángulo inicial.

DEFINICIÓN 3. Llamamos **ceviana de Nagel** al segmento de recta que une un vértice del triángulo con el punto de contacto del lado opuesto a dicho vértice y la circunferencia exinscrita relativa a dicho lado [5].

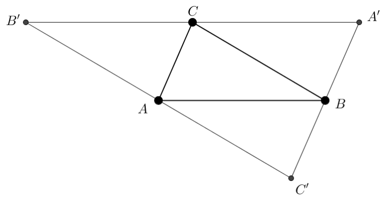

Figura 9: Triángulo antimedial.

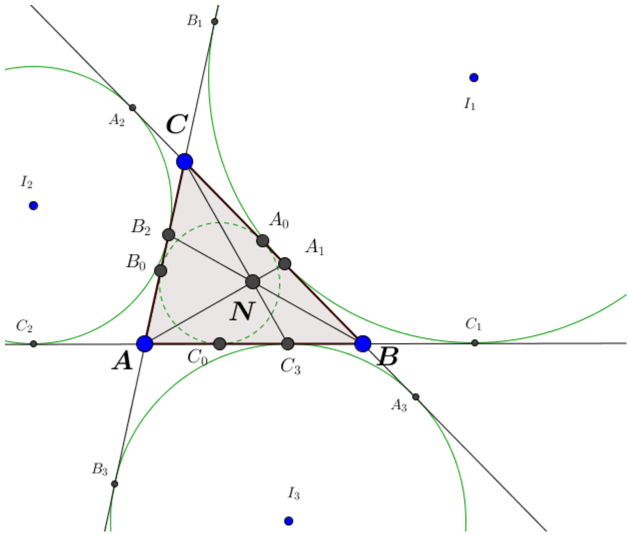

Figura 10: Cevianas de Nagel.

Proposición 2. *Las cevianas de Nagel concurren en un punto, que se denomina **punto de Nagel** (N en la figura 10), y ese punto es el incentro del triángulo antimedial.*

Proposición 3 ([11]). *Las **cevianas de Nagel** bisecan el perímetro del triángulo, es decir, las dos partes del perímetro del triángulo situadas a uno y otro lado de cada ceviana de Nagel tienen igual longitud.*

Demostración. Consideramos la notación utilizada en [10] sobre círculos tritangentes. Queremos demostrar que cada ceviana de Nagel biseca el perímetro del triángulo.

Sean

$$a = BC, \quad b = AC, \quad c = AB, \quad s_a = AB_0 = AC_0, \quad s_b = BA_0 = BC_0,$$
$$s_c = CA_0 = CB_0, \quad s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Tomamos

$$t = AB_1 = AC_1, \quad u = CA_1 = CB_1, \quad v = BA_1 = BC_1.$$

Se cumple

$$t = AB_1 = AC + CB_1 = b + u, \tag{1}$$
$$t = AC_1 = AB + BC_1 = c + v. \tag{2}$$

Sumamos ambas ecuaciones y tenemos

$$2t = b + c + (u + v) = a + b + c = 2s, \text{ o sea, } \ s = t.$$

En (1) y (2) despejamos u y v, y sustituimos t por s:

$$u = t - b = s - b \Rightarrow u = s_b \Rightarrow \boxed{CB_1 = CA_1 = BC_0 = BA_0} \tag{3}$$
$$v = t - c = s - c \Rightarrow v = s_c \Rightarrow \boxed{BC_1 = BA_1 = CA_0 = CB_0} \tag{4}$$

1. La ceviana AA_1 biseca el perímetro del triángulo: $A_1C + CA = s = AB + BA_1$. Esta es la prueba:
   - $A_1C + CA = (CB - A_1B) + CA = a + b - A_1B \overbrace{=}^{(4)} a + b - CA_0 = a + b - s_c = a + b - (s - c) = a + b + c - s = 2s - s = s.$
   - $AB + BA_1 = AB + (BC - CA_1) = c + a - CA_1 \overbrace{=}^{(3)} c + a - BC_0 = a + c - s_b = a + c - (s - b) = a + b + c - s = 2s - s = s.$
2. Con las cevianas BB_2 y CC_3 se razona de manera análoga.

Por lo tanto, hemos demostrado que las cevianas de Nagel bisecan el perímetro de un triángulo. □

Volviendo al análisis del problema que queremos resolver en este caso, el propósito era conseguir bisecar el perímetro de un triángulo.

Hemos conseguido demostrar que el punto que permite trazar las líneas para encontrar el punto que biseca es el punto de Nagel.

Estamos en condiciones de poder darle solución al problema que se planteaba al comienzo de esta sección.

PROBLEMA. Un autobús hace una ruta entre tres pueblos que forman un triángulo. ¿Dónde debemos situar un surtidor de gasolina de manera que el autobús recorra la mitad de la ruta antes de repostar?

Si analizamos el problema, el autobús puede realizar tres rutas diferentes, dependiendo del pueblo en el que salga, por lo tanto, el punto donde se tendría que colocar el surtidor cambiaría. Esto es, dependiendo del pueblo en el que inicie la ruta, el punto que biseca el perímetro del triángulo que forman los tres pueblos cambiaría.

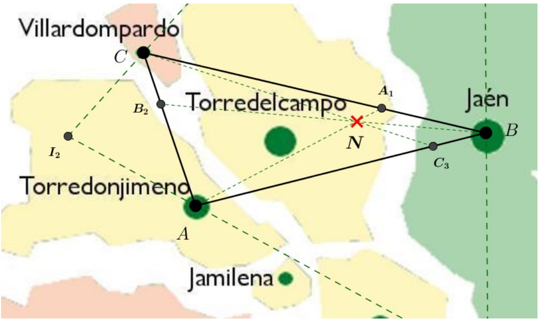

Figura 11: Mapa del problema 2.

En este caso queremos que el autobús siga la ruta: Torredonjimeno–Jaén–Villardompardo.

El procedimiento gráfico más sencillo para hallar el punto donde situar el surtidor es construir en primer lugar el punto de Nagel como hemos visto en la figura 10. A partir de esto, se traza la ceviana de Nagel, uniendo Torredonjimeno con el punto de Nagel y donde corte esta a la carretera que une Jaén con Villardompardo, sería el punto A_1 donde situaríamos el surtidor.

Razonando de forma análoga para los otros dos pueblos, obtendríamos que los surtidores serían los puntos B_2 y C_3 (figura 11).

Por lo tanto, el punto A_1 bisecaría el perímetro de ABC partiendo desde Torredonjimeno, B_2 biseca el perímetro partiendo desde Jaén, y por último, C_3 bisecaría el perímetro de ABC partiendo desde Villardompardo.

3.3. Problema 3

Normalmente, en los problemas de los libros de texto, se asocia el baricentro con el centro de gravedad del triángulo. Si bien para la definición de baricentro como punto de corte de las medianas no es necesario diferenciar entre puntos, poligonales o región, para el concepto físico de centro de gravedad es necesario matizar esta distinción.

1. El baricentro de tres puntos, A, B, C, se define analíticamente como $G = (A+B+C)/3$. Por ser la media aritmética, se cumple que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.
2. Cada mediana divide al triángulo en dos partes de igual área (en relación a su equilibrio). Podemos observar en la figura 13 que, como bien hemos indicado antes, el baricentro se encuentra en el punto donde se intersecan sus medianas. Este punto es también el centroide de la superficie del triángulo.
3. Pero si consideramos un triángulo solo como línea poligonal cerrada, es decir, sin tomar área, algo parecido a un triángulo (musical) sin grosor, para obtener el centro de gravedad se halla la media ponderada de los puntos medios de los segmentos:
$$G' = \frac{E \cdot a}{a+b+c} + \frac{F \cdot b}{a+b+c} + \frac{D \cdot c}{a+b+c}.$$

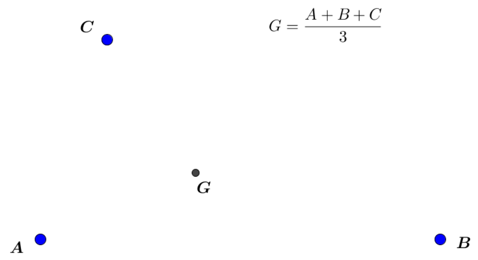

Figura 12: Centro de gravedad de tres puntos.

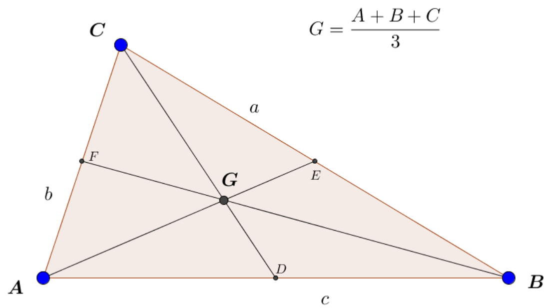

Figura 13: Centro de gravedad de triángulo como poligonal cerrada.

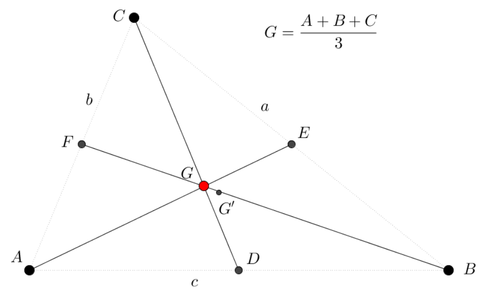

Figura 14: Centro de gravedad del triángulo como perímetro.

Como era de esperar, el centro de gravedad de un triángulo tomado como linea poligonal cerrada, no coincide con el del triángulo entendido como puntos no alineados o superficie.

Este nuevo punto recibe el nombre de **punto de Spieker**. Veamos cómo se define y qué propiedades tiene.

DEFINICIÓN 4. Consideramos un triángulo $\triangle ABC$ y los puntos medios de cada lado de dicho triángulo, D, E y F. Llamaremos *triángulo medial* respecto a otro triángulo al que tiene como vértices los puntos medios del triángulo de partida.

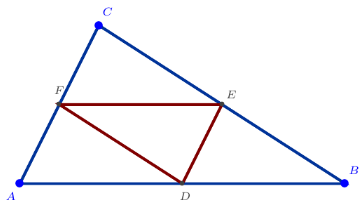

Figura 15: Triángulo medial.

Definición 5. Sea un triángulo $\triangle ABC$ (teniendo en cuenta solo la masa distribuida en los lados). El punto de Spieker de dicho triángulo es el centro del círculo inscrito en el triángulo medial o círculo de Spieker.

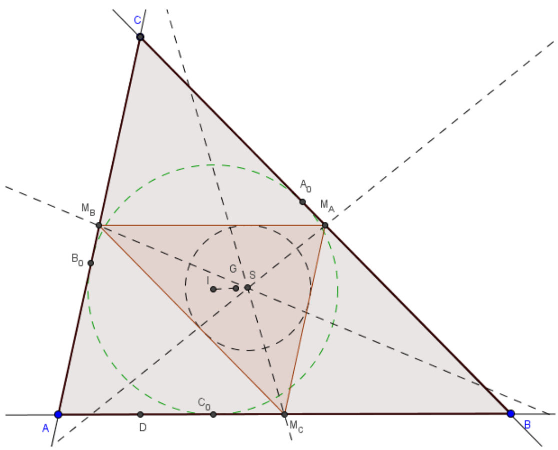

Figura 16: Punto de Spieker: G es el baricentro de ABC, I el incentro y S el punto de Spieker.

Proposición 4 ([11]). *Las líneas que unen el punto medio de cada lado con el punto de Spieker, es decir, las bisectrices del triángulo medial, bisecan el perímetro del triángulo, como las cevianas de Nagel, y, además, el punto de Spieker es el centro de gravedad del polígono.*

Demostración. En la figura 17, M_C es el punto medio de AB. Además, si prolongamos el lado BC hasta E de forma que $CE = CA$, P_C es el punto medio de BE. Entonces EA es paralela a M_CP_C y se tiene que $M_CA + AC + CP_C = M_CB + BP_C$. Como AE es perpendicular a CH, y CH es la bisectriz exterior de $\angle ACB$, M_CP_C es paralela a la bisectriz interior de $\angle ACB$, y, por lo tanto, es una bisectriz del triángulo medial $\triangle M_AM_BM_C$.

Veamos ahora que S es el centro de gravedad del perímetro del triángulo. Si $P_CK = P_CC$, entonces los segmentos P_CK, KB, BM_C son respectivamente iguales

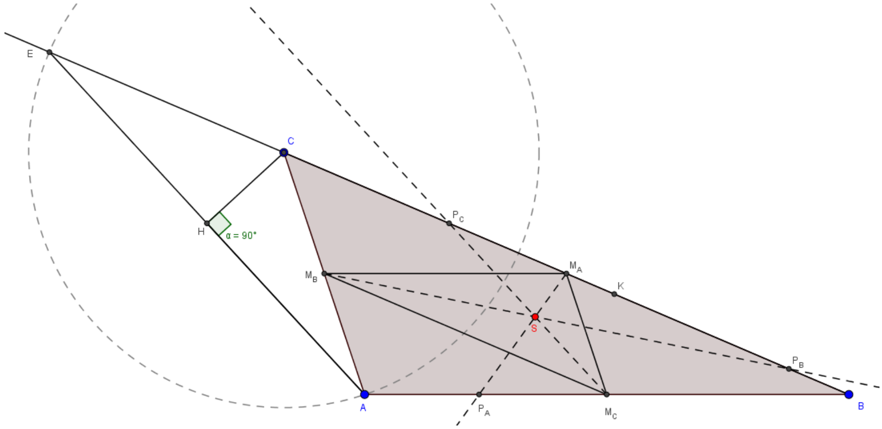

Figura 17: Demostración de la proposición 4.

a P_CC, AC, AM_C, y los puntos medios de esos segmentos iguales están situados a la misma distancia de la recta M_CP_C. Entonces el centro de gravedad de una masa distribuida uniformemente por el perímetro del triángulo está en la línea M_CP_C. □

Veamos otra propiedad que le confiere más notabilidad. Y retomamos el incentro, que parecía abandonado en la recta de Euler.

PROPOSICIÓN 5. *El **incentro** I, el **baricentro** G, el **punto de Spieker** S y el **punto de Nagel** N están alineados. Además, S es el punto medio del segmento IN, y se tiene que $GN = 2IG$.*

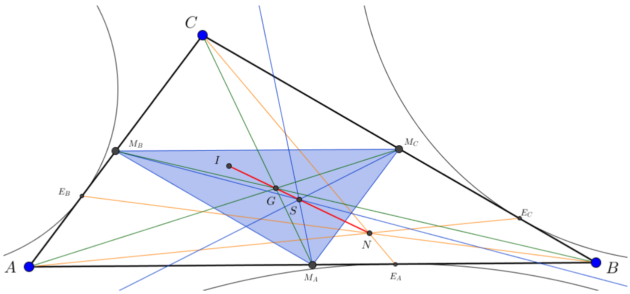

Figura 18: Resultado de la proposición 5.

Haciendo una comparativa de este resultado con el de la *recta de Euler* vista anteriormente, observamos que en este caso es el incentro el que está contenido en la recta, y el ortocentro no. De esto, se podría obtener una propiedad interesante: *¿Cómo ha de ser un triángulo para que estas dos rectas coincidan?*

Hemos visto dos nuevos puntos (Nagel y Spieker) que merecen notabilidad por resolver problemas por sus propiedades interesantes y por estar en una recta con el incentro y el baricentro.

3.4. Problema 4

El último tipo de problemas a analizar trata sobre encontrar un punto desde el cual la suma de las distancias a los extremos del triángulo sea mínima.

Así, cuando queremos construir una carretera que conecte tres o más ciudades, aplicaremos este teorema para encontrar el trazado ideal.

La propiedad que se busca en el problema es la de **minimizar la suma de las distancias a los vértices de un triángulo.**

Problema. Imaginemos que hay que construir una autopista que una entre sí tres ciudades, de manera que el número de kilómetros construidos sea el menor posible. En términos matemáticos, este problema se enuncia así: dado un triángulo, ¿cuál es el punto en el que la suma de las distancias a sus vértices es menor?

Figura 19: Problema del punto de Fermat.

Se podrían plantear otros problemas, como dónde instalar un depósito de agua que abastezca a tres pueblos de manera que la longitud total de tubería utilizada fuese la mínima.

Ninguno de los puntos notables (circuncentro, incentro, baricentro u ortocentro) satisface lo que queremos, por lo que tenemos que encontrar el adecuado.

Definición 6. Se llama **punto de Fermat** al punto del plano para el cual la suma de las distancias a los vértices de un triángulo dado es mínima [2].

Proposición 6. *Para un triángulo con ángulos menores de 120º, el punto de Fermat coincide con el punto interior al triángulo con el que los lados del triángulo subtienden ángulos de 120º.*

Dicho punto se puede construir como intersección de las circunferencias circunscritas a los triángulos equiláteros construidos sobre los lados del triángulo original (véase [2]). Son los triángulos equiláteros de la figura 21.

Demostración. Para realizar esta demostración, nos basaremos en la realizada en la revista digital matemática *Educación e Internet* [4].

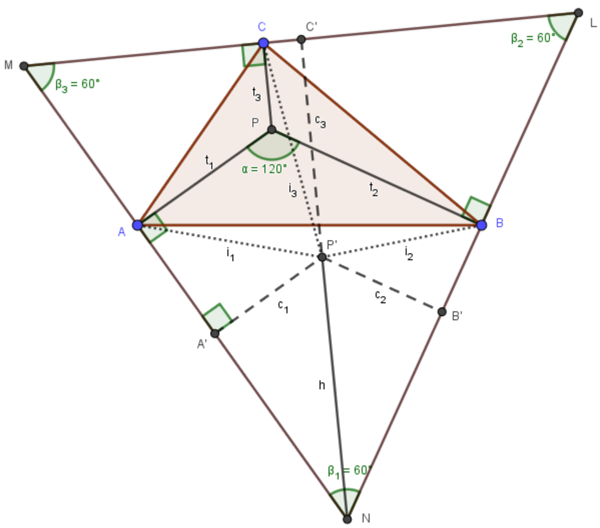

Figura 20: Punto de Fermat.

Sea el triángulo $\triangle ABC$ y sea P el punto del enunciado. Sean $t_1 = PA$, $t_2 = PB$ y $t_3 = PC$ en A, B y C, respectivamente. Entonces podemos afirmar que el triángulo $\triangle LMN$ formado por las perpendiculares a PA, PB y PC es un triángulo equilátero.

Para probar este resultado basta ver que los ángulos internos de $\triangle LMN$ miden 60^{o}. Sin pérdida de generalidad, lo haremos para el ángulo $\angle MNL$. Sea N la intersección de la perpendicular a PA con la perpendicular a PB. Consideramos el cuadrilátero $NAPB$. Entonces

$$\angle MNL + \angle PAN + \angle APB + \angle PBN = 360^{\text{o}}. \tag{5}$$

De la definición del punto P, se tiene que $\angle APB = 120^{\text{o}}$. Además, $\angle PBN = \angle PAN = 90^{\text{o}}$ por construcción. Sustituyendo en (5),

$$\angle MNL + 90^{\text{o}} + 120^{\text{o}} + 90^{\text{o}} = 360^{\text{o}} \Rightarrow \angle MNL = 60^{\text{o}}.$$

De donde se sigue que el triángulo $\triangle LMN$ es equilátero. Entonces, el teorema de Viviani dice que

$$t_1 + t_2 + t_3 = h,$$

donde h es la altura de dicho triángulo.

Sea ahora $P' \neq P$ y sean $P'A'$, $P'B'$ y $P'C'$ las perpendiculares a los lados del triángulo $\triangle LMN$. Se tiene que

$$P' \notin PA, \quad P' \notin PB, \quad P' \notin PC.$$

Sean $P'A' = c_1$, $P'B' = c_2$ y $P'C' = c_3$, y sean además $i_1 = P'A$, $i_2 = P'B$ y $i_3 = P'C$ las distancias de P' a los vértices del triángulo $\triangle ABC$.

Se considera, sin pérdida de generalidad, el triángulo $\triangle P'AA'$. Entonces, por construcción, $\triangle P'AA'$ es rectángulo en A', de donde $P'A > P'A'$. Esto es,

$$\left.\begin{array}{l} i_1 > c_1 \\ i_2 > c_2 \\ i_3 > c_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad i_1 + i_2 + i_3 > c_1 + c_2 + c_3 = h = t_1 + t_2 + t_3.$$

Lo que dice que P es el punto que minimiza la distancia tal y como queríamos demostrar.

Si $P' = P$, el resultado es evidente. □

El proceso de construcción, que aparece en la figura 21, es el siguiente [2]:

1. Construir dos triángulos equiláteros en dos lados cualesquiera del triángulo.
2. Para cada nuevo vértice de los triángulos equiláteros, trazar una recta desde ahí hasta el vértice opuesto del triángulo dado.
3. La intersección de dos de estas rectas es el punto de Fermat.

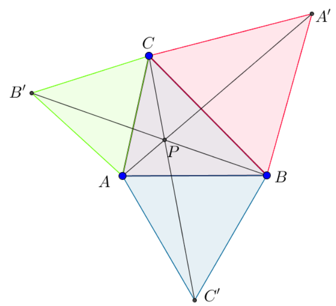

Figura 21: Proceso de construcción del punto de Fermat.

Un resultado conocido para los triángulos obtusángulos no considerados en la proposición 6 es el siguiente.

Proposición 7 ([9]). *Cuando el triángulo es obtusángulo con algún ángulo mayor o igual a 120º, el punto de Fermat coincide con el vértice correspondiente a dicho ángulo.*

Si bien el punto de Fermat es notable por sus propiedades y por resolver ciertos problemas, veamos su pertenencia a las rectas notables anteriores.

En el ejemplo propuesto, vemos que el punto de Fermat no pertenece a ninguna de las dos rectas notables vistas hasta ahora. Sin embargo, cuando ambas rectas coinciden, el punto de Fermat pertenece a dicha recta, conteniendo al incentro, baricentro, punto de Spieker, punto de Nagel, ortocentro y circuncentro.

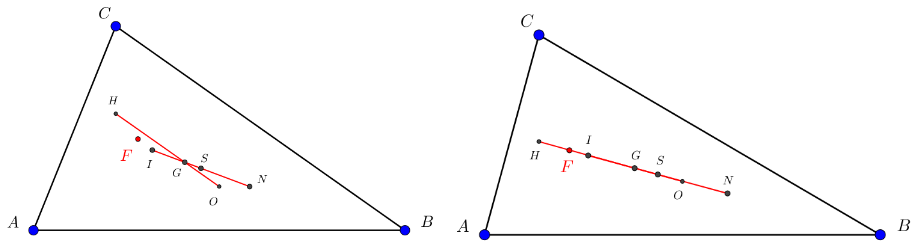

Figura 22: El punto de Fermat en las rectas notables.

4. Conclusiones

Tomar los problemas como punto de partida para comprender el significado de los puntos notables exige seleccionar unas situaciones que, en su solución, permitan al estudiante reflexionar sobre sus propiedades.

Como hemos visto, hay problemas de la vida real que permiten una modelización para obtener estos puntos. No obstante, el presentar al estudiante problemas reales que exijan en su solución unas propiedades concretas favorece que este conozca propiedades interesantes de otros puntos notables, enriqueciendo las ya conocidas de los puntos notables clásicos.

En este artículo nos hemos centrado en el punto de Nagel, el punto de Spieker, el punto de Fermat y la existencia de un punto que desde el cual la máxima distancia de ese punto a los vértices de un triángulo sea lo mínima posible. Aunque este estudio se ha realizado sobre triángulos, se podría extender a polígonos de más lados y estudiar si ocurre lo mismo o existen otros puntos interesantes diferentes a los vistos hasta ahora.

A continuación se enuncian los problemas para un polígono de 4 lados:

1. ¿Qué punto minimiza la máxima distancia a un conjunto de puntos?
2. ¿Qué punto biseca el perímetro de un polígono?
3. ¿Qué relación existe entre el centro de gravedad de un conjunto de puntos, de una poligonal o de una región?
4. ¿Qué punto minimiza la suma de las distancias a un conjunto de puntos?

Referencias

[1] J. Boaler, The role of contexts in the mathematics classroom: Do they make mathematics more "real"?, *For the Learning of Mathematics* **13** (1993), no. 2, 12–17.

[2] S. Cárdenas, El punto de Fermat, *Miscelánea Matemática* **40** (2004), 77–85, `http://miscelaneamatematica.org/Misc40/Cardenas_s.pdf`.

[3] O. Chapman, Mathematical-task knowledge for teaching, *Journal of Mathematics Teacher Education* **16** (2013), no. 1, 1–6.

[4] P. Díaz Navarro, El Punto de Fermat y el problema de Torricelli, *Revista Digital Matemática. Educación e Internet*, http:tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/MundoMatematicas/Torricelli/node4.html.

[5] M. Donaire, VIII Punto de Nagel, *Sobre Geometrías*, https://sobregeometrias.wordpress.com/2012/06/14/viii-punto-de-nagel/.

[6] F. J. García Capitán, El triángulo órtico en el Court 2009, *Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática* **37** (noviembre 2009–enero 2010), http://www.oei.es/oim/revistaoim/numero37/ortico.pdf.

[7] C. Kimberling, Encyclopedia of Triangle Centers, ETC, http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html.

[8] J. Lave, *Cognition in practice: Mind, mathematics and culture in everyday life*, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[9] E. Liébana Rísquez, *Otros puntos notables de triángulos*, TFM, Universidad de Granada, 2016.

[10] M. A. Morales Medina, Los círculos tritangentes, *Gaussianos* (2009), http://gaussianos.com/los-circulos-tritangentes/.

[11] M. A. Morales Medina, La línea de Nagel, *Gaussianos* (2010), http://gaussianos.com/la-linea-de-nagel/.

[12] Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, *Marcos y prueba de evaluación de PISA 2012. Matemáticas, Lectura y Ciencias*, INEE, Madrid, 2013.

[13] Recta de Euler, *Universo Formulas* (2014), http://www.universoformulas.com/matematicas/geometria/recta-euler/.

Elisa Liébana Rísquez, Rafael Ramírez Uclés y Antonio Moreno Verdejo, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada

Correo electrónico: elisa03@correo.ugr.es, rramirez@ugr.es, amverdejo@ugr.es