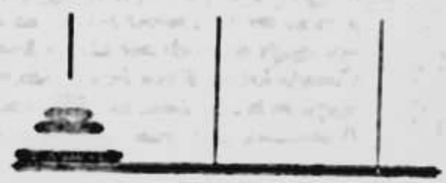
LAS TORRES DE HANOI: ¿SÓLO UN SIMPLE PASATIEMPOS?

Juan E. Nápoles Valdés[1]

PRELIMINARES

Este famoso puzzle fue concebido, en 1883[2], por el matemático francés Edouard Lucas. El nombre del puzzle también fue acuñado por Lucas, y apareció por primera vez en un artículo publicado en 1884, y firmado con el seudónimo de N. Claus[3].



El nombre completo del seudoautor, N. Claus de Siam, no es más que un ingenioso anagrama de "Lucas d'Amiens". Recordemos que Lucas había nacido el 4 de abril de 1842 en la ciudad de Amiens.

En su póstuma "L'aritmetique amusante"[4] podemos leer: *"Uno de nuestros amigos, el profesor N. Claus (de Siam), mandarín de la universidad Li-Sou-Stian, ha publicado en 1884 un juego inédito y patentado, que él llamó la Torre de Hanoi, un enigma real anamita de Tonkin ..."*.

Este anagrama está muy claro, así tenemos que N. Claus (de Siam) es Lucas d'Amiens, y la universidad (el colegio) Li-Sou-Stian es el colegio de Saint-Louis.

Observemos, además, que este coloso de la matemática recreativa, al encubrir su nombre, incorporó *ex profeso* el término "Siam" en alusión al nombre de un estado del Asia meridional, en la parte central de Indochina (Tailandia, que por demás, ha cambiado su nombre en varios momentos de su historia). Hay buenas razones para suponer que la denominación "Torres de Hanoi", estuvo fuertemente inspirada por los intereses colonialistas de los franceses en el sudeste asiático, en particular, por los avatares franceses en Hanoi durante los años 1882-83. Esta es la época en que Lucas estaba enfrascado en la concepción de su puzzle, y los periódicos parisinos no cesaban de informar respecto a la conflictiva situación de la capital de la Indochina Francesa.

---

[1] Universidad de la Cuenca del Plata, P. Martínez 964, (3400) Corrientes y UTN-FRR, French 414, Resistencia, Chaco (cuencadelplata@arnet.com.ar y napoles33@latinmail.com)

[2] Aunque existen algunas discrepancias sobre la fecha, en el Conservatoire National des Artes et Metiers, se encuentran descripciones de dos ejemplos presentadas por Lucas en 1888 (uno 'los grand modele pours les cours publiques' de 1.05 m de alto'), la tapa de la caja original, las instrucciones originales de 1883 que brinda la historia de Benares que presentamos más abajo y ofrece un premio de un millón de francos para una demostración de la solución completa.

[3] Claus, N.-"La tour d'Hanoi jeu de calcul", *Science et Nature*, vol. 1, no. 8, 127-128, 1884 (19 de enero).

[4] Editado por H. Delannoy, C.-A. Laisant y E. Lemoine, y publicada por Gauthier-Villars en 1895, ver pp.179-183.

En 1884, el escritor francés Henri de Parville (1838-1909) inventó[5] la siguiente fábula, asociada al *Problema de las Torres de Hanoi*:

> *"En el gran templo de Benares, debajo de la bóveda que marca el centro del mundo, descansa una placa de bronce en la que se colocan tres agujas de diamante, cada una de un codo[6] de alto, y tan anchas como el cuerpo de una abeja. En una de estas agujas, Dios, en la Creación, colocó 64 discos de oro puro, el disco más grande descansaba sobre la placa de bronce, y los demás, por orden decreciente de diámetro, se colocaban sucesivamente hasta llegar al de más arriba. Esta es la torre de Brahma.*
> *Día y noche, los sacerdotes, transfieren los discos de una aguja de diamante a otra, sin cesar, según las leyes fijas e inmutables de Brahma, que exigen que el sacerdote a cargo no deba mover más de un disco por vez, y que deba colocar este disco en una aguja de modo que allí no haya ningún disco más pequeño por debajo de el. Cuando los 64 discos hayan sido transferidos a una de las otras agujas desde la aguja en la cual Dios, en la Creación, los colocó, entonces la torre, el templo, y los Brahmanes, por igual, se desintegraran en el polvo, y con un trueno el mundo desaparecerá".*

De más está decir, que esta elaboración de Parville, introdujo nuevos e interesantes elementos folklóricos en la historia del puzzle de Lucas. En particular, sobre el Fin del Mundo según este relato, volveremos más adelante.

Nuestro trabajo está dedicado a uno de los más famosos rompecabezas de la Historia de la Matemática, tanto para esclarecer algunos detalles históricos no muy conocidos, como para discutir su solución y mostrar que ésta, está vinculada con variadas ramas de la Matemática[7].

SOLUCIONES RECURSIVAS

Este enigma es bien conocido por los estudiantes de informática dado que aparece en, virtualmente, cualquier texto introductorio en estructuras de datos o algoritmos. Su solución toca dos temas importantes que son discutidos después:

- Funciones recursivas y pilas.
- Relaciones de recurrencia.

---

[5] De Parville, Henri-"Recreations mathematiques: La tour d'Hanoi et la question du Tonkin", *La Nature*, part I, Paris, 1884, 285-286.
[6] Antigua medida de longitud que equivale a 41,8 cm.
[7] Referencias generales pueden ser consultadas en http://mathworld.wolfram.com/TowersofHanoi.html

La solución, es decir, el Problema de las Torres de Hanoi que consideraremos en nuestro trabajo, es aquella variante de tres "torres" y un número pequeño de discos. Llamaremos a las tres torres, In (Inicio), Aux (Auxiliar) y Des (Destino); habremos resuelto nuestro problema, cuando todos los discos de In hayan sido transportados a Des. Por consiguiente, para un número dado N de discos, el problema es resuelto si nosotros desarrollamos las tareas siguientes:

1. Mover los N-1 discos superiores de In a Aux (usando Des como una torre auxiliar).
2. Mover el disco del fondo de In a Des.
3. Mover los N-1 discos de Aux a Des (usando In como torre auxiliar).

Asumamos que hay una función *Solve* para los argumentos -el número de discos y tres torres (Inicio, Auxiliar y Destino- en este orden). Entonces el cuerpo de la función podría aparecer como

```
Solve (N, In, Aux, Des)
        if N is 0 exit
        Solve (N-1, In, Des, Aux)
        Move from In to Des
        Solve (N-1, Aux, In, Des)
```

Esto realmente sirve como la definición de la función Solve. La función es recursiva, pues ella se llama repetidamente a sí misma, para valores decrecientes de N hasta que se ha obtenido una condición de terminación (en nuestro caso N=0). La pura simplicidad de la solución es impresionante. Para N=3 lo anterior se traduce en

1. Mueva de In a Des
2. Mueva de In a Aux
3. Mueva de Des a Aux
4. Mueva de In a Des
5. Mueva de Aux a In
6. Mueva de Aux a Des
7. Mueva de In a Des

Por supuesto "Movimiento" significa que se mueve el disco más alto. Para N=4 nosotros obtenemos la sucesión siguiente

1. Mueva de In a Aux
2. Mueva de In a Des
3. Mueva de Aux a Des
4. Mueva de In a Aux
5. Mueva de Des a In
6. Mueva de Des a Aux
7. Mueva de In a Aux
8. Mueva de In a Des

9. Mueva de Aux a Des
10. Mueva de Aux a In
11. Mueva de Des a In
12. Mueva de Aux a Des
13. Mueva de In a Aux
14. Mueva de In a Des
15. Mueva de Aux a Des

RELACIONES DE RECURRENCIA.

Sea T_N el número de movimientos necesarios para resolver el enigma con N discos. De la sección anterior $T_3=7$ y $T_4=15$. Es fácil ver que $T_2=3$ y $T_1=1$. Un matemático especializado también notaría que $T_0=0$. Derivemos una fórmula general.

La solución recursiva involucra mover dos veces (N-1) discos de una torre a otra y haciendo un movimiento adicional entre ellos. De aquí tenemos entonces

$$T_N \leq T_{N-1}+1+T_{N-1} = 2T_{N-1}+1.$$

La desigualdad sugiere que sea posible mover N discos con menos que $2T_{N-1}+1$ movimientos. Veremos que este no es el caso. De hecho, cuando corresponde mover el disco del fondo, se habrán movido N-1 discos de In a Aux en T_{N-1} movimientos. A menos que uno mueve el disco más grande de un lado a otro, toma simplemente un movimiento para moverlo de In a Des. Uno necesita entonces a lo sumo T_{N-1} más pasos para terminar la tarea. Por consiguiente

$$T_N \geq T_{N-1}+1+T_{N-1} = 2T_{N-1}+1$$

de donde

$$T_N=T_{N-1}+1+T_{N-1} = 2T_{N-1}+1.$$

Así, podemos definir la cantidad T_N como

$$T_0=0,\ T_N=2T_{N-1}+1 \text{ para } N>0.$$

Llamada, ocasionalmente, *Correspondencia de Lucas*. De aquí que podamos computar $T_1=2T_0+1=1$, $T_2=2T_1+1=3$, $T_3=2T_2+1=7$ y así sucesivamente.

La expresión anterior es conocida como una relación de recurrencia que, como se puede notar, es también una función recursiva, pues T_N se define en términos de sus valores anteriores. Otras relaciones de recurrencia pueden ser más complicadas, por ejemplo, $f(N)=2f(N-1)+3f(N-2)$.

Las relaciones de recurrencia aparecen bajo las más varias formas en numerosas ramas de la Matemática y sus aplicaciones.

Volviendo a la definición de T_N, definamos $S_N=T_N+1$.
Entonces $S_0=1$ y $S_N=T_N+1=(2T_{N-1}+1)+1=2T_{N-1}+2=2(T_{N-1}+1)=2S_{N-1}$.

Es decir, S_N puede definirse como

$$S_0=1,\ S_N=2S_{N-1} \text{ para } N>0.$$

Lo último se resuelve fácilmente en la forma (no-recurrente) $S_N=2^N$. De aquí que $T_N=2^N-1$ para $N\geq 0$.

UN POCO MÁS SOBRE LAS TORRES DE HANOI[8].

Como vimos, el Problema de las Torres de Hanoi, tiene una buena solución recursiva.

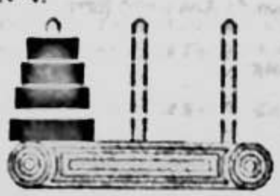
Trabajemos sobre ésta.

> Para resolver problemas de este tipo, es necesario preguntarse: "*¿si yo hubiera resuelto el caso N-1, podría resolver el caso N?*".

Si la respuesta a esta pregunta es positiva, se procede bajo la consideración que el N-1 caso *se ha resuelto*. Entonces, ¿cómo mover N discos de la torre In a la torre Des?

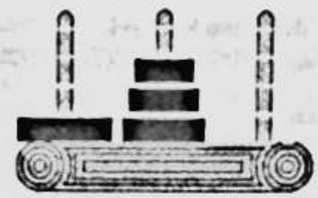
Si usted sabe mover N-1 discos de una torre a otra, resta sólo un disco en la torre In, simplemente muévalo al destino, entonces transporte el resto de los discos de la torre Aux hacia la torre Des.

Por ejemplo, consideremos el caso N=4:

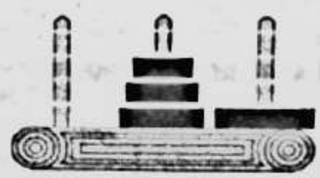


[8] Recomendamos consultar Bogomolny, A.-"Towers of Hanoi", http://www.cut-the-knot.com/recurrence/hanoi.html, Dubrovsky, V.-"Nesting Puzzles", Part I: Moving Oriental Towers, *Quantum* 6, 1996, 53-57 (Ene) y 49-51 (Feb); Kolar, M.-"Towers of Hanoi", http://www.pangea.ca/kolar/javascript/Hanoi/Hanoi.html; Ruskey, F.-"Towers of Hanoi", http://www.sue.csc.uvic.ca/~cos/inf/comb/SubsetInfo.html#Hanoi y Kraitchik, M.-"The Tower of Hanoi", §3.12.4 in *Mathematical Recreations*, New York: W.W. Norton, 1942, 91-93.

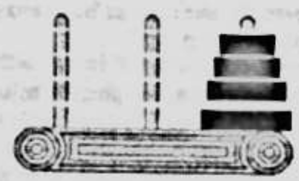
Primero mueva tres discos, hacia la torre Aux (tenga cuidado de cómo hacer esto).



Ahora mueva el disco de In a la torre de Destino.



Ahora mueva tres discos de la torre Aux a la torre de Destino (de nuevo, debemos preocuparnos sobre cómo hacer esto).



Así, ¡Hemos terminado!.
Más sucintamente.
Para mover N discos de In a Des, usando Aux como torre "de repuesto", se tendrá

- si N=1, simplemente hágalo,

si N>1 ...

- mueva N-1 discos de In a Aux, usando Des como repuesto,
- mueva el n-ésimo disco de In a Des,
- mueva los N-1 discos de Aux a Des, usando In como torre de repuesto.

¿CÓMO HACERLO EN C?

```
/ * La torre de Hanoi - la respuesta * /
/ * Cómo mover cuatro discos de la torre  1 a 3, usando 2 como suplente * /
#include void move(n,A,C,B)
int n,A,B,C;
/ *el número de discos para mover, inicio, la torre de destino y la torre de repuesto respectivamente * /
{
if (n==1){printf ("Mover de %d a %d \ el n",A,C);}
else {move(n-1,A,B,C);move(1,A,C,B);move(n-1,B,C,A);}
}

main ()
{
move(4,1,3,2);
}
```

SOBRE EL FIN DEL MUNDO.

Volvamos a la solución enunciada anteriormente, que podemos resumirla, cuantitativamente, en la siguiente tabla

N	1	2	3	4
T_N	1	3	7	15

Como sabemos que $T_N=2^N-1$, la demostración hay que completarla por inducción.
Ahora bien, la pregunta es ¿cuánto tiempo falta para el Fin del Mundo, según la leyenda?

Si consideramos que para mover un disco de una torre a otra, los monjes necesitan 1 segundo (tiempo generoso considerando la estructura y peso de los discos) y que la civilización humana disfruta de unos 10 mil años (cantidad también generosa a los efectos de nuestro problema, pues las civilizaciones hindú y china, aparecieron mucho después de la egipcia y la sumeria), tendremos que, como la leyenda habla de tres torres y 64 discos, se tendrá, que el tiempo total es

$$T_{64}=2^{64}-1 \text{ segundos.}$$

Repasemos, 1 minuto tiene 60 segundos, una hora 3600 segundos, un día 86400, un año (de 365 días) 31536000, y un milenio 31536000000000. De aquí, y aún añadiendo los años bisiestos necesarios (en números redondos, 2500), el tiempo invertido en estos 10 mil años es muy inferior a la cantidad de tiempo necesaria para mover los 64 discos de la torre de inicio a la de destino. Así que, ¡¡¡¡¡podemos dormir tranquilos!!!!!, el Fin del Mundo está lejos todavía.

OBSERVACIONES FINALES

El problema de obtener el número mínimo de movimientos requeridos para mover n discos de la torre In a la torre Des, es isomórfico a obtener un *camino hamiltoniano* sobre un hipercubo n-dimensional[9]. Por otra parte, en la solución $T_N=2^N-1$, el número de discos que se han movido después del k-ésimo paso es el mismo que el elemento que es necesario añadir o borrar en el k-ésimo sumando de la *Fórmula de Ryser*[10].

El número del disco a ser movido en el n-ésimo paso de la solución optimal al problema es 1,2,1,3,1,4,1,2,1,2,1,3,1,2, ...[11]. Lo que es más asombroso, esta es la *binary carry sequence* más uno.
Un grafo de Hanoi[12], puede ser construido considerando aquellos vértices correspondientes a la configuración de n Torres de Hanoi, donde los vértices son adyacentes si la correspondiente configuración puede ser obtenida por un movimiento no contradictorio (llamado *legal*). Esto puede ser resuelto, usando un Código Gray Binario[13].
Poole en 1994[14], dio rutinas en Mathematica®, para resolver una configuración de discos arbitraria en el menor número de movimientos posibles. La prueba de minimalidad es obtenida usando la *correspondencia de Lucas*, la cual relaciona el Triángulo de Pascal con el grafo Hanoi. Existen algunos algoritmos conocidos para transferir con 4 torres, pero todavía no se ha demostrado la minimalidad de éstos. Para referencias adicionales, consulte la referencia de Poole citada más arriba.

---

[9] Ver Gardner, M.-"Mathematical Games: About the Remarcable Similarity between the Icosian Game and the Towers of Hanoi", *Sci. Amer.* 196, May 1957, 150-156 y del mismo autor "The Icosian Game and the Tower of Hanoi", Ch.6 in *The Scientific American Book of Mathematical Puzzles & Diversions*, New York: Simon and Schuster, 1959.
[10] Consulte Vardi, I.-"Computational Recreations in Mathematics", Reading, MA: Addison-Wesley, 1991, 111-112.
[11] Ver Sloane, N.J.A.-"Sequences A001511/M0127 in "An on-line version of the Encyclopedia of Integer Sequences", http://www.research.att.com/~njas/sequences/eisonline.html
[12] Ver Chartrand, G.-"The Tower of Hanoi Puzzle", §6.3 in *Introductory Graph Theory*, New York: Dover, 1985, 135-139 y las referencias allí citadas.
[13] Recomendamos Gardner, M.-"Rosquillas anudadas y otras amenidades matemáticas", Editorial Labor, Barcelona, 1987, Cap. 2.
[14] Poole, D.G.-"The Towers and Triangles of Professor Clauss (or Pascal Knows Hanoi)", *Math. Mag.* 67, 1994, 323-344. Consulte también Poole, D.G.-"Towers of Hanoi", *Mathematica Notebook Hanoi.m*.