



G•E•M•A•D



Universidad de  
**los Andes**  
Centro de Investigación y  
Formación en Educación - Cife

Ciclo de conferencias

26 de octubre  
8:55 a. m.

Competencias matemáticas promovidas  
desde la razón y la proporcionalidad en  
la formación inicial de maestros de  
educación primaria

Gabriela Valverde

Universidad de Costa Rica

Asistencia virtual

<http://videosala.ugr.es/gemad>

Más información

<http://gemad.uniandes.edu.co>

## ESTRUCTURA DE LA PRESENTACIÓN

### Introducción

Problema  
Objetivos  
Antecedentes

### Marco Metodológico

Experimento de Enseñanza  
Fases del Experimento  
Recolección de Datos  
Análisis de la Información

### Análisis Retrospectivo de las Sesiones

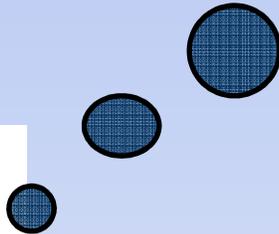
Tareas: Refresco de cola  
Crecimiento de bacterias

Conclusiones, Aportes y Limitaciones



## El Problema

**¿Cómo promover el desarrollo de las competencias matemáticas y del conocimiento matemático de futuros maestros, en relación con las nociones razón y proporcionalidad?**



Resultados del TF de Máster  
**Dificultades** relativas a la  
razón y la proporción

Adaptación del "Trabajo de  
aula" al **marco curricular  
actual** basado en la noción  
de competencia

Diseño  
instruccional

**Problema de  
Investigación**

Enfoque  
funcional

Investigaciones previas sobre  
**conocimientos matemáticos**  
de los futuros maestros  
subestructos del número  
racional

Necesidad de desarrollar la  
**competencia matemática** en  
la formación inicial de  
maestros  
Tarea compleja de abordar



## Objetivos Generales

**OG1**



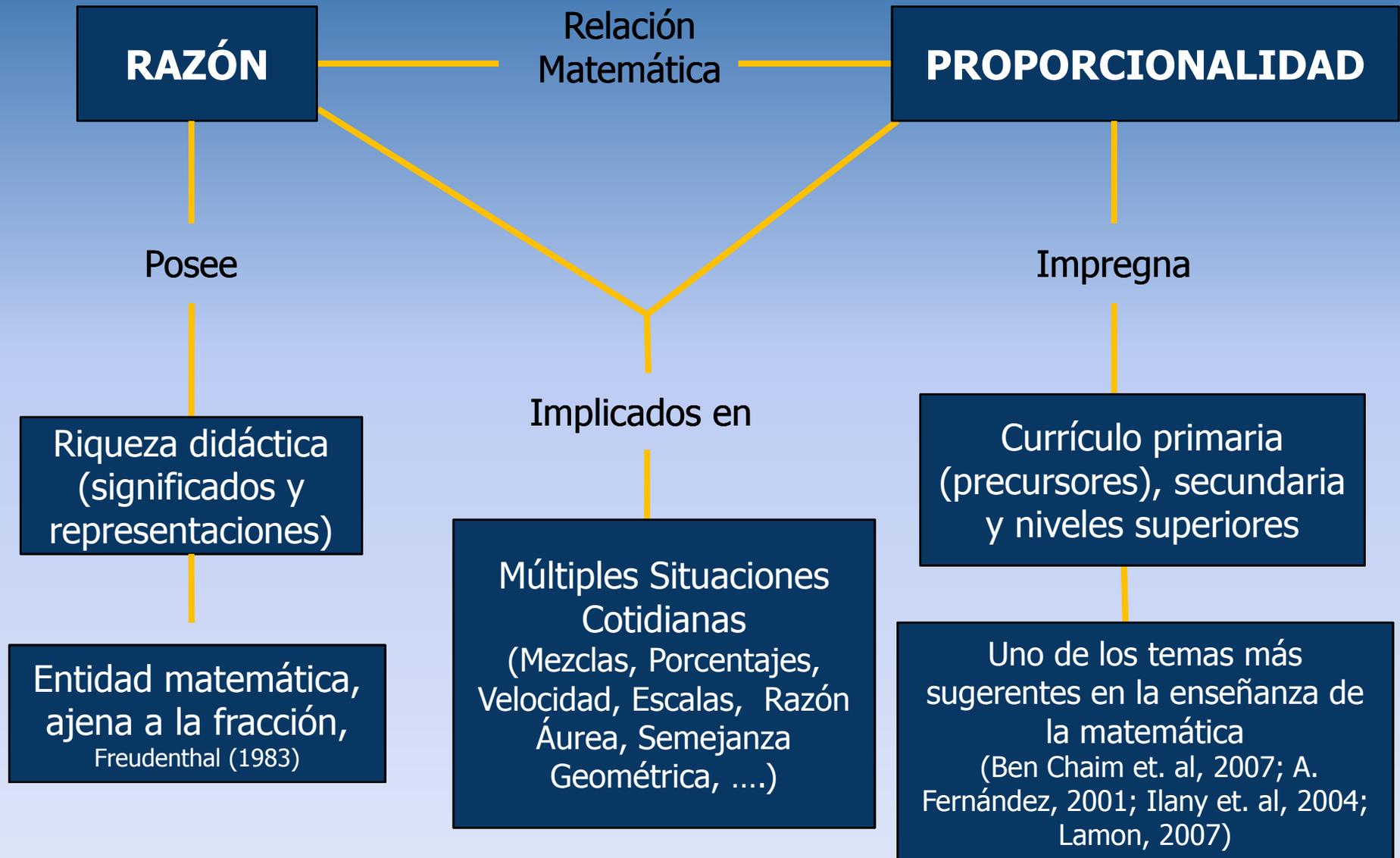
Estudiar el proceso de elaboración, puesta en práctica y análisis de una “**secuencia de trabajo en el aula**” que aborda la revisión y (o) reconstrucción de conocimientos asociados a la **razón y la proporcionalidad**.

**OG2**



Investigar cómo **contribuye** esta secuencia en el proceso de desarrollo de la **competencia matemática** de futuros maestros de primaria, resolviendo problemas elaborados para el caso y utilizando una metodología de trabajo colaborativo.

# ¿Por qué la razón y la proporcionalidad?



# Participantes

```
graph TD; A[Participantes] --- B[Grupo 1 (G1)  
85 estudiantes]; A --- C[Grupo 2 (G2)  
42 estudiantes]; B --- D[Asignatura Matemáticas y su Didáctica  
Diplomado en Maestro: Educación Primaria  
Plan de Estudios 2001]; C --- D; D --- E[Curso académico 2009-2010  
Universidad de Granada]
```

Grupo 1 (G1)  
85 estudiantes

Grupo 2 (G2)  
42 estudiantes

Asignatura Matemáticas y su Didáctica  
Diplomado en Maestro: Educación Primaria  
Plan de Estudios 2001

Curso académico 2009-2010  
Universidad de Granada

# Antecedentes de la Investigación

Estudios sobre el  
Conocimiento  
Matemático Común

Descripción del conocimiento  
**deficiente, limitado**

Ball, Lubienski y Mewborn (2001), Chapman,  
2004, Ma(1999), Pelead y Herschkovitz (2004)

Desarrollo del conocimiento  
**5 enfoques predominantes**

Ponte y Chapman (2006, 2008)

Estudios sobre los  
Subconstructos de los  
Números Racionales

Contextos escolares

**errores, alternativas didácticas**

Kieren (1976), Gairín (1998), Behr, Harel, Post y  
Lesh (1992), Vizcarra (2007)

Entornos de profesores en  
formación inicial o en activo

**deficiente, limitado a parte-todo**

Stacey et al. (2001), Ball (1990), Simon (1993)

# Antecedentes de la Investigación

Estudios sobre la  
Razón y la  
Proporcionalidad

```
graph LR; A[Estudios sobre la Razón y la Proporcionalidad] --> B[Contextos escolares]; A --> C[Entornos de profesores en formación inicial o en activo];
```

Contextos escolares  
estrategias, errores, propuestas de  
enseñanza

Noelting (1980), Tourniaire y Pulos (1985), Lamon (2007), Fernández (2001), Rapetti (2003), Bjorg (2005), Alatorre y Figueras (2005), Modestou y Gagatsis (2007), Oller (2012)

Entornos de profesores en  
formación inicial o en activo  
errores, alternativas didácticas  
(modelización, auténticas actividades,  
flexibilidad, herramientas análisis EOS,  
representaciones )

Ben-Chaim, Ilany y Keret (2008); Berenson y Nason (2003); Berk, Taber, Carrino y Poetzi, (2009); Monteiro (2003); Rivas y Godino (2010); Simon y Blume (1994)

# ESTRUCTURA DE LA PRESENTACIÓN

## Introducción

Problema  
Objetivos  
Antecedentes

## Marco Metodológico

Experimento de Enseñanza  
Fases del Experimento  
Recolección de Datos  
Análisis de la Información

## Análisis Retrospectivo de las Sesiones

Tareas: Refresco de cola  
Crecimiento de bacterias

Conclusiones, Aportes y Limitaciones

# Metodología del Estudio

Tipo de Experimento de Enseñanza



Desarrollo del conocimiento del profesor  
*Teacher Development Experiment, TDE*  
(Simon, 2000)

Objetivo del Experimento



**Estudiar**, desde un enfoque funcional, el conocimiento matemático de los estudiantes.  
**Promover** el desarrollo del conocimiento y de la competencia matemática.

Fundamentación del Experimento



Marco curricular, basado en la noción de competencia matemática (estudio PISA)  
**Enfoque funcional** del conocimiento matemático.

# Fases en un Experimento de Enseñanza

**I. Preparación  
del Experimento**



**II. Experimentación y  
Análisis entre sesiones**

**Ciclos Iterativos  
(Re) Diseño  
(Re) Formulación de Supuestos**

**III. Análisis Retrospectivo**

*Molina, Castro, Molina y Castro (2011). Un acercamiento...*

# Fase I. Preparación del Experimento

**Análisis de contenido**,  
cognitivo, instrucción de la  
razón y la  
proporcionalidad (AD)

Identificación de  
objetivos,  
contenidos y  
tareas  
instruccionales

Estudio y  
elección de  
dinámica de  
aula

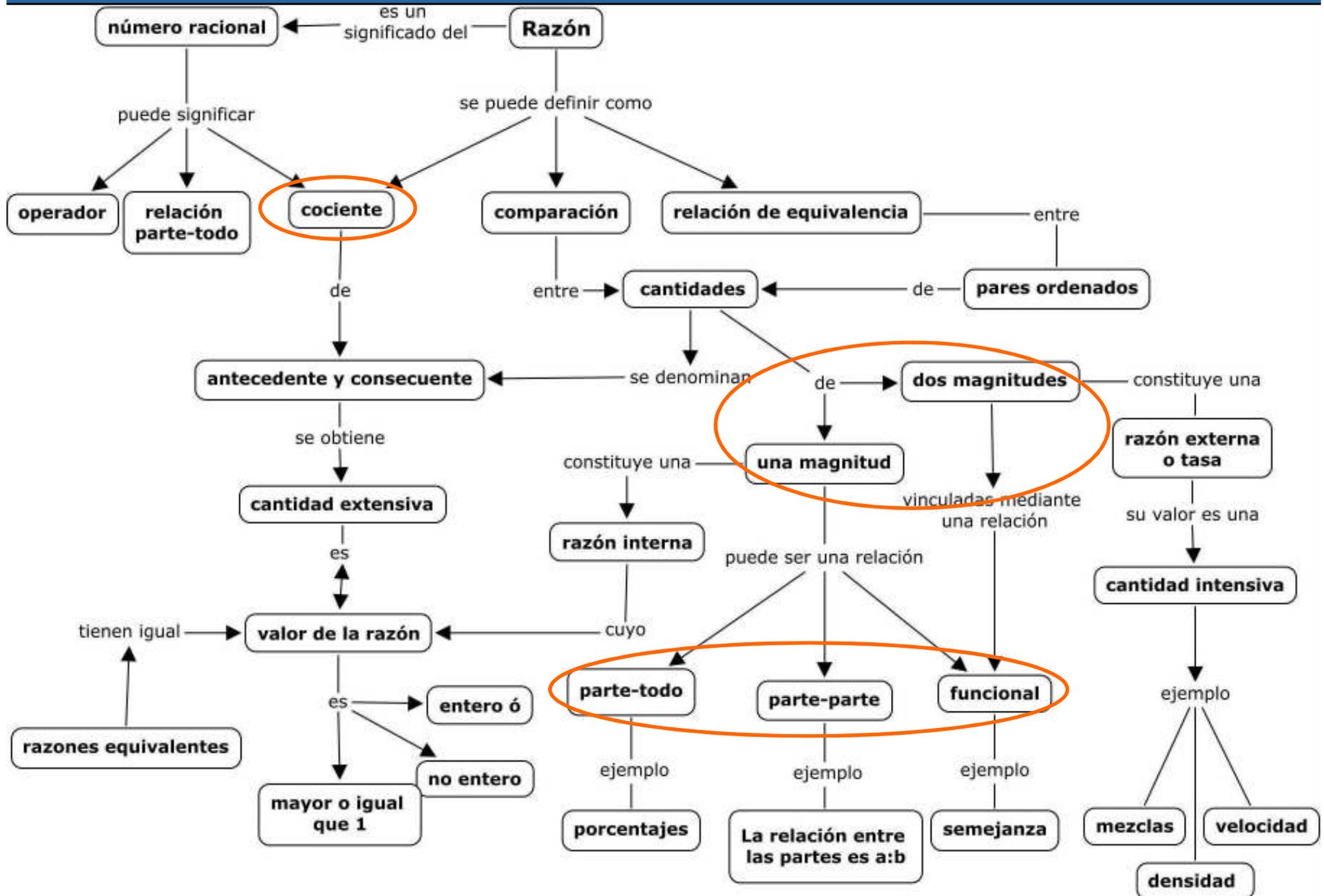
Ultimar el diseño de la  
intervención a partir de  
la información recogida

Negociación  
con los  
profesores de  
la asignatura

Diseño justificado de la  
secuencia de  
intervenciones y de su  
temporalización

Registrar las decisiones  
tomadas en el proceso  
anterior y su justificación

# Mapa Conceptual del Foco 1 “Razón: Significados y Usos”



## Breve Descripción de la Planificación de la 1ª Sesión

**Ejemplos**

**Objetivos de Investigación para la Primera Sesión**

**Objetivos Específicos Instruccionales**

**Contenidos Instruccionales**

**Tareas Propuestas**

1. Conocer las concepciones que muestran los estudiantes en torno a la razón, fracción y porcentaje, así como sobre la relación entre éstas.

8. Detectar las debilidades y fortalezas de la dinámica de trabajo colaborativo aplicada.

2. Describir comparaciones parte-parte y parte-todo, utilizando los subconstructos y representaciones del número racional.

7. Emplear diferentes representaciones para expresar las razones.

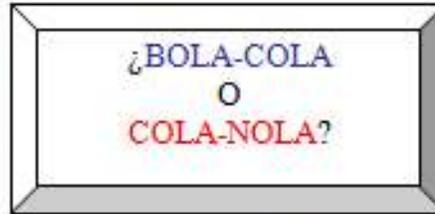
12. Aplicar la noción de razón y sus propiedades para resolver problemas empleando diferentes estrategias.

Subconstructos y representaciones de los números racionales: Relación entre fracción, razón y porcentaje. Noción de razón, representaciones y propiedades.

“Fracción, Razón y Porcentaje”

“Preferencia en el Refresco de Cola”

## Tarea 2: Preferencia en el Refresco de Cola



Situación pública

Parte-parte

"Todo" desconocido

Representación verbal

Las siguientes afirmaciones podrían ser parte de los resultados de una encuesta de preferencia entre la Bola Cola y la Cola Nola:

- La razón entre quienes prefieren Bola Cola y los que prefieren Cola Nola es de 3 a 2.

- El número de personas que prefieren Bola Cola en lugar de Cola Nola están en la razón de 17139 a 11426.

- 5713 más participantes prefieren Bola Cola en lugar de Cola Nola.

Cantidades de la misma magnitud

Propiedad equivalencia de razones

a. Decide si las tres afirmaciones anteriores hacen referencia a resultados de la misma encuesta. Explica.

b. Elige la afirmación que describe más adecuadamente los resultados de la comparación entre Bola Cola y Cola Nola, explica por qué crees que esa afirmación es más pertinente.

Comparaciones aditivas y multiplicativas

Objetivos específicos 4, 6 y 7

Contribución a las competencias argumentar, comunicar y representar

d. Sugiere otras posibles maneras de comparar los resultados de popularidad de los dos tipos de cola.

# Fases en un Experimento de Enseñanza

I. Preparación del Experimento



**II. Experimentación y Análisis entre sesiones**

Ciclos Iterativos  
(Re) Diseño  
(Re) Formulación de Supuestos

III. Análisis Retrospectivo

*Molina, Castro, Molina y Castro (2011). Un acercamiento...*

## Fase II. Experimentación: Sesiones

1ª Sesión  
25-01-10  
(2 h)

F1. Razón: definición, caracterización y tipos

2ª Sesión  
28-01-10  
(1h)

F4. Porcentajes: significados y usos

3ª Sesión  
19-04-10  
(2h)

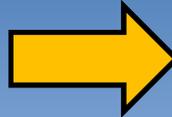
F2. Relación de proporcionalidad: caracterización y representaciones

4ª Sesión  
17-05-10  
(2h)

F1. Razón: definición, caracterización y tipos  
F3. Proporcionalidad geométrica

## Fase II. Experimentación: Sesiones

Dinámica de Trabajo  
Colaborativo en el Aula



**Adaptación de la  
Metodología ACODESA**

Hitt y Morasse (2008,2009),  
Hitt y Cortés (2009), Hitt (2007) ,  
Passaro (2007), Páez (2004).

**ACO:** Aprendizaje Colaborativo  
**DES:** Debate Científico  
**A:** Autorreflexión



## Fase II. Análisis entre Sesiones

Observación de las Producciones Individuales

Escucha de Grabaciones del Trabajo en Equipo

Observación del Video del Trabajo de un Equipo

Observación del video de la Puesta en Común

Observación de las notas sobre la toma de decisiones dada en el acto

Toma de **decisiones** orientadas a la **reelaboración** del diseño.

**Carácter práctico:** tiempo dedicado a cada fase, distribución de estudiantes, papel del investigador, recapitulación de ideas conceptuales.  
Tareas: cantidad, secuencia, revisión de enunciados y presentación.

# Fases en un Experimento de Enseñanza

I. Preparación del Experimento



II. Experimentación y Análisis entre sesiones

Ciclos Iterativos  
(Re) Diseño  
(Re) Formulación de Supuestos

**III. Análisis Retrospectivo**

# Análisis de Datos

Simon  
(2000, 2012)

Análisis de las Sesiones  
Pequeño y Gran Grupo

Análisis Cognitivo y  
Social

Todos los Equipos de  
Cada Sesión

Estudio de Casos  
Individuos

Análisis  
Cognitivo

6 Casos

# ESTRUCTURA DE LA PRESENTACIÓN

## Introducción

Problema  
Objetivos  
Antecedentes

## Marco Metodológico

Experimento de Enseñanza  
Fases del Experimento  
Recolección de Datos  
Análisis de la Información

## **Análisis Retrospectivo de las Sesiones**

**Tareas: Refresco de cola  
Crecimiento de bacterias**

Conclusiones, Aportes y  
Limitaciones

# Análisis Retrospectivo de las Sesiones

## Propósitos

Profundizar en la intervención  
Corte Cualitativo-Interpretativo

Aportar marcos explicativos  
Generar conocimiento

Abordar los objetivos parciales  
de la investigación

## Dimensiones de Análisis

OP1.2  
**Conocimiento  
Matemático**

OP1.3  
Papel de la  
Investigadora

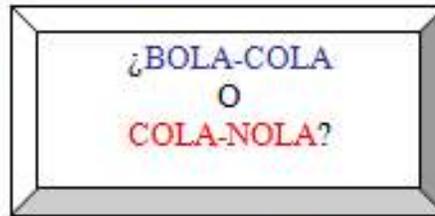
OP1.4  
Dinámica de  
Trabajo de  
Aula

OP2.1- OP2.2  
**Competencias  
Matemáticas**

OP1.5  
Tareas



## Tarea 2: Preferencia en el Refresco de Cola



Las siguientes afirmaciones podrían ser parte de los resultados de una encuesta de preferencia entre la Bola Cola y la Cola Nola:

- *La razón entre quienes prefieren Bola Cola y los que prefieren Cola Nola es de 3 a 2.*
- *El número de personas que prefieren Bola Cola en lugar de Cola Nola están en la razón de 17139 a 11426.*
- *5713 más participantes prefieren Bola Cola en lugar de Cola Nola.*

a. Decide si las tres afirmaciones anteriores hacen referencia a resultados de la misma encuesta. Explica.

b. Elije la afirmación que describe más adecuadamente los resultados de la comparación entre Bola Cola y Cola Nola, explica por qué crees que esa afirmación es más pertinente.

c. Si necesitaras divulgar los resultados en un anuncio publicitario, ¿cuál afirmación podría ser más efectiva? ¿Por qué?

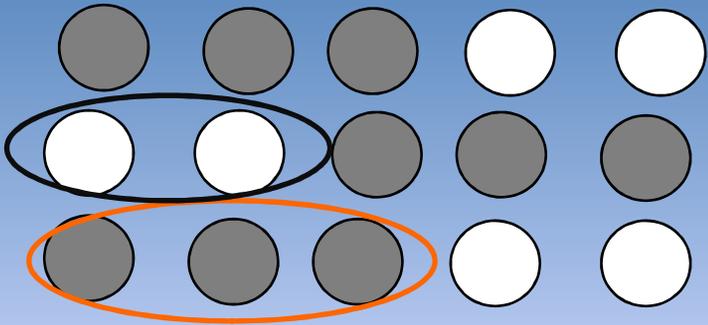
d. Sugiere otras posibles maneras de comparar los resultados de popularidad de los dos tipos de cola.

# Resultados: Dimensión Conocimiento Matemático

Tabla 1. Interpretaciones de la expresión "La razón es de 3 a 2"

G1												
	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12
IR1.1	*	*	*	*		*	*	*		*		*
IR1.2	*	*	*			*	*				*	
IR1.3					*							
IR1.4									*			
G2												
	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8				
IR1.1		*	*	*	*	*	*	*	*			
IR1.2	*	*	*	*	*					*		
IR1.3		*			*	*						
Interpretaciones												
IR1.1: Tres es a dos												
IR1.2: Tres de cada dos												
IR1.3: En tres, hay dos y uno												
IR1.4: Ninguno												

## Interpretación IR1.1 . Tres es a dos

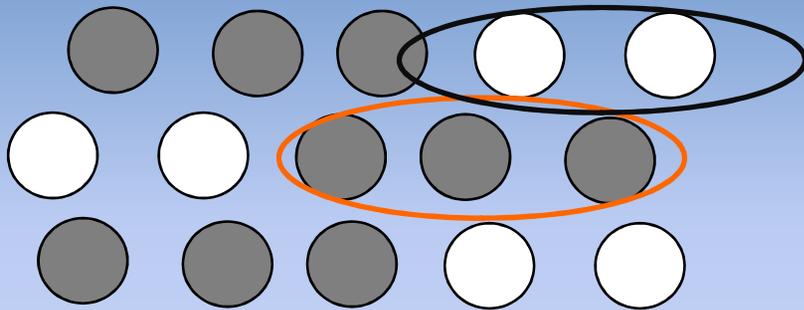


Ejemplo: Fragmento del trabajo oral del equipo E1 (G1) en el que el estudiante A1 expresa:

*"...tres a dos... tres prefieren una y dos prefieren otra... eso es de cada cinco tres quieren una y dos quieren otra, de cada diez seis quieren una y cuatro quieren otra..."*

## Interpretación IR1.2 . Tres de cada dos

Tres por cada dos



Normalización de la razón ligada a la unidad (A. Fernández, 2001)

Análogo a IR1.1

No se manifestó

Tres de cada dos

Equipo E7 (G1)

*B6: tres de cada dos niños meriendan Cola Bola, de esa,...*

*D6: ¿tres de cada dos niños?...*

*F6: es que no, porque ya estás diciendo otra afirmación diferente a ésta...*

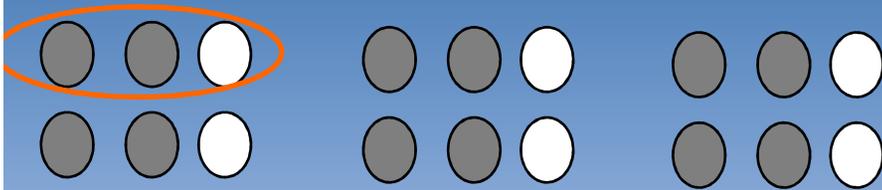
La expresión cotidiana y frecuente de relaciones del tipo parte-todo

3 de cada 5 españoles...

Débil reflexión de la frase

E11 (G1) manifiesta que no tiene sentido

## Interpretación IR1.3 . En tres, hay dos y uno



Significado distinto a los elementos de la razón 3:2.

La actuación manifestada refleja la interpretación de la razón 3:2 como una relación parte-todo.

Del E5 del G1

*B3: ...un grupo de gente, todos los entrevistados que son todos estos, pues han ido haciendo **pequeños grupos de tres**, de tres, de tres, de tres, de tres y en cada grupo de tres... **dos** prefieren uno y **el otro** prefiere la otra, de cada grupo que forman todos...*

## Resultados: Dimensión Conocimiento Matemático

Tabla 2. Actuaciones manifestadas en la resolución de la Tarea 2

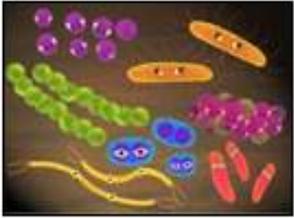
Categoría	Indicadores	Descripción de Indicadores	G1	G2
Interpretaciones de la representación verbal de la razón	IR1.1	Tres es a dos.	75%	87%
	IR1.2	Tres de cada dos.	50%	62%
	IR1.3	En tres, hay dos y uno.	8%	37%
	IR1.4	Ninguna.	8%	0%
Concepciones sobre las Propiedades de la Razón	CPr.1	Concepción sobre la equivalencia de razones.	67%	62%
	CPr.2	Concepción relativa a la diferencia y suma de los elementos de razones equivalentes.	25%	12%
	CPr.3	Concepción sobre la suma de elementos de la razón.	83%	75%

Logro de los Objetivos de Aprendizaje 4 y 12



Competencia Representar (reproducción)  
Competencia Resolver Problemas (reproducción)  
Competencia Pensar y Razonar (conexión)

# Ejemplo: Tercera Sesión (Tarea 4)



## Crecimiento de Bacterias

Unos científicos están investigando el comportamiento de una bacteria con el fin de controlar la proliferación de la misma. Se interesan especialmente por el día en que la población sea de 650, porque es cuando deben iniciar una nueva técnica de control de la reproducción. A partir del tercer día el crecimiento de la población se comporta de manera particular, algunas de las primeras observaciones se recogen en la tabla:

Tiempo(días)	3	5	6	8	10	12	15	16
Número de bacterias	39	65	78	104	130	156	195	208

### I Fase

- a) Busca relaciones entre estos números y descríbelas.
- b) Intenta utilizar estrategias o técnicas diferentes a la “regla de tres” para averiguar:
  - b.1) El número de días que han transcurrido hasta que el número de bacterias sea de 650.
  - b.2) El número de bacterias después de 25 días.

**Explica tu razonamiento en los dos casos anteriores.**

# Resultados: Dimensión Conocimiento Matemático

Tabla. *Procedimientos alternativos a la regla de tres en el ejercicio (b.2)*

		G1														
		E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E9	E11	E12	E14	E15	E16	E17	E18
Pr5		*	*	*	*	*		*	*		*	*	*	*	*	*
Pr6				*			*		*	*	*					
Pr7							*									
Pr8							*									

		G2						
		E1	E2	E3	E5	E7	E10	E11
Pr5		*	*	*		*		*
Pr6						*		*
Pr7		*						*
Pr8					*			

**Ejemplo**

## Procedimientos

Pr5: Multiplicación por la constante de proporcionalidad.

Pr6: Detección de relación escalar y aplicación de ésta a cantidades de la otra magnitud.

Pr7: Aplicación de la propiedad  $f(a+b)=f(a)+f(b)$

Pr8: Otras

## Actuación PR7: Aplicación de la propiedad $f(a+b)=f(a)+f(b)$

### Ejemplo

#### Del equipo E6 del G1

*C18: bueno cuántas tenemos..., dos, entonces pues... tenemos sumando tiempos parciales... de días, por ejemplo habíamos dicho que son 25 días, 25 días son...*

*A4: 10 más 5*

*C18: 10 más 15 días, es igual a 130 más 195 bacterias ¿no?*

*A4: sí*

b.2) El número de bacterias después de 25 días.

*Sumando días por  $10+15$  días =  $130+195$  bacterias.*

*Dividiendo  $650/2$*

*Extrapolación, tanteo, resolviendo la ecuación.*

# Resultados: Dimensión Competencia Matemática

Tabla 3. Actuaciones manifestadas en la resolución de la Tarea 4

Categoría	Indicadores	Descripción de Indicadores	G1	G2
<b>Conocimiento procedimental para hallar el valor ausente en una proporción directa</b>	Pr5	Multiplicar por la constante de proporcionalidad.	87%	71%
	Pr6	Detectar la relación escalar entre cantidades de días y aplicarla a las cantidades de bacterias.	33%	28%
	Pr7	Aplicar la propiedad $f(a+b)=f(a)+f(b)$ .	7%	28%
	Pr8	Otras.	7%	0%

Logro del Objetivo Instruccional 16

Competencia usar el lenguaje simbólico, formal y técnico, y uso de las operaciones (conexión)  
Competencia pensar y razonar (conexión)

# En síntesis...

27  
Categorías  
de actuación

Foco 2.  
Relación de  
Proporcionalidad:  
Caracterización y  
Representaciones

Relaciones entre  
cantidades de  
magnitudes  
proporcionales

Tarea 4: Re1, Re2, Re3,  
Re4

Relaciones entre  
cantidades de  
magnitudes  
inversamente  
proporcionales

107  
Indicadores  
de actuación

Representaciones  
simbólica y gráfica de la  
proporcionalidad directa

Tarea 4: Rep1(D), Rep2(D),  
Rep3(D), Rep4(D)

Representaciones  
simbólica y gráfica de la  
proporcionalidad  
inversa

Tarea 5: Rep1.1(I), Rep1.2(I),  
Rep2(I)

Procedimientos  
aplicados en tareas de  
valor ausente con  
proporciones directas

Tarea 4: Pr1, Pr2, Pr3, Pr4,  
Pr5, Pr6, Pr7, Pr8

Procedimientos  
aplicados en tareas de  
valor ausente con  
proporciones inversas

Tarea 5: Pr1 (I), Pr2 (I), Pr3  
(I), Pr4 (I), Pr5 (I)

Propiedades de las  
proporciones: reparto  
proporcional

Tarea 6: RPr1, RPr2, ErrorRPr

# ESTRUCTURA DE LA PRESENTACIÓN

## Introducción

Problema  
Objetivos  
Antecedentes

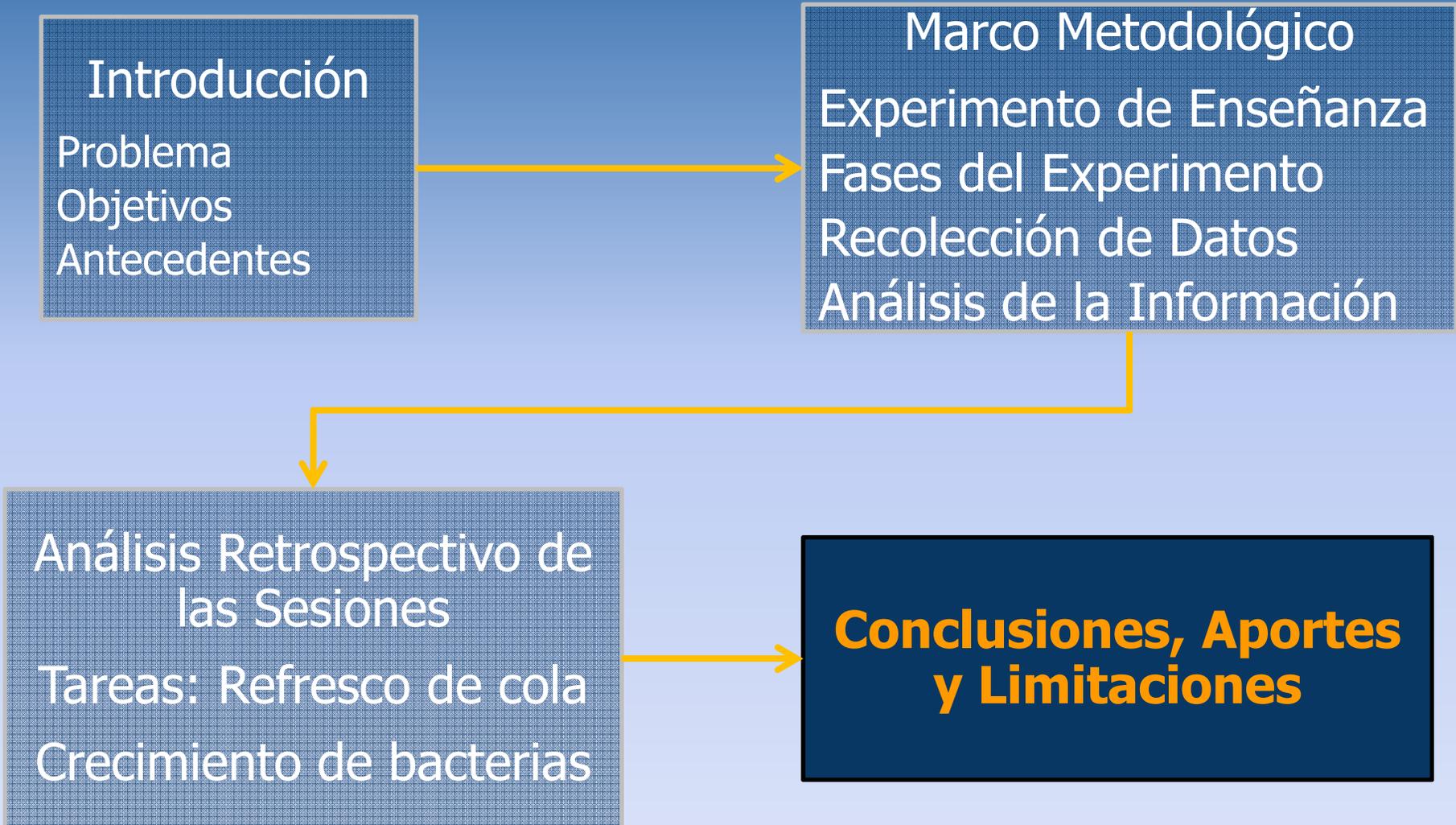
## Marco Metodológico

Experimento de Enseñanza  
Fases del Experimento  
Recolección de Datos  
Análisis de la Información

## Análisis Retrospectivo de las Sesiones

Tareas: Refresco de cola  
Crecimiento de bacterias

**Conclusiones, Aportes  
y Limitaciones**



# Conclusiones

**OP1.1**  
**Análisis Didáctico**

**OP1.2**  
**Conocimiento Matemático**

**OG1**

**OP1.3**  
**Papel de la Investigadora-Docente**

**OP1.4**  
**Metodología de Trabajo**

**OP1.5**  
**Tareas**

## Conclusiones en Relación con el OG1

OP1.2



Descripción del Conocimiento Matemático

**Extensa** información de un **entorno natural** sobre la comprensión y negociación de ideas relativas a la **razón y la proporcionalidad**

Descripción de las actuaciones manifestadas (**107 indicadores de CM**)  
Aportación de posibles explicaciones

Se sitúan en el ámbito de la **formación inicial de maestros**

Actuaciones vinculadas a **tareas** que **no** corresponden a las tradicionalmente investigadas

# Aportes de la Investigación

```
graph TD; A[Aportes de la Investigación] --> B[Diseño instruccional elaborado (tareas, metodología, expectativas)]; A --> C[Estructura de la investigación Uso del Análisis Didáctico y experimentos TDE]; B --> D[Dimensiones teoría-práctica de la investigación en Didáctica de la Matemática]; C --> E[Conocimiento en el campo de investigación centrado en la razón y la proporcionalidad];
```

**Diseño instruccional** elaborado (tareas, metodología, expectativas)

Dimensiones **teoría-práctica** de la investigación en Didáctica de la Matemática

**Estructura** de la investigación  
Uso del Análisis Didáctico y experimentos TDE

**Conocimiento** en el campo de investigación centrado en la razón y la proporcionalidad

# Limitaciones de la Investigación

```
graph TD; A[Limitaciones de la Investigación] --> B[Cantidad de sesiones]; A --> C[Complejidad de las nociones razón y proporcionalidad]; B --> D[Poca distancia temporal entre la 1ª y la 2ª sesión]; C --> E[Coordinación de los dos análisis: sesiones e individual];
```

Cantidad de sesiones

Poca distancia temporal  
entre la 1ª y la 2ª sesión

Complejidad de las  
nociones razón y  
proporcionalidad

Coordinación de los dos  
análisis: sesiones e  
individual



G•E•M•A•D



Universidad de  
**los Andes**  
Centro de Investigación y  
Formación en Educación - Cife

Ciclo de conferencias

26 de octubre  
8:55 a. m.

Competencias matemáticas promovidas  
desde la razón y la proporcionalidad en  
la formación inicial de maestros de  
educación primaria

Gabriela Valverde

Universidad de Costa Rica

Asistencia virtual

<http://videosala.ugr.es/gemad>

Más información

<http://gemad.uniandes.edu.co>