EL ÉXITO DEL FRACASO O EL FRACASO DEL ÉXITO: ANÁLISIS DE UNA ACTIVIDAD DE ENSEÑANZA DE MATEMÁTICA

Patricia Detzel
María Elena Ruiz

Introducción

En este trabajo presentaremos un análisis de las observaciones de clases correspondientes a una actividad para introducir la proporcionalidad con alumnos de segundo año de nivel medio. Lo que nos interesa es analizar determinadas decisiones o elecciones por parte del docente y las repercusiones que éstas tienen en el aprendizaje de sus alumnos. Estas observaciones se realizaron en el marco de un proyecto de investigación del que también formaba parte el docente a cargo del curso.

Nuestra intención es poner de relieve algunas cuestiones que nos parecen importantes tener en cuenta, tanto a la hora de planificar la clase, como en el momento de enseñar el tema. Son los docentes, inmersos en una institución en que existen reglas, tiempos y programas para cumplir, quienes tienen la tarea de alfabetizar matemáticamente a sus alumnos y para ello deben decidir qué y cómo dar determinados temas.

Descripción de la actividad

Esta consiste en reproducir ampliaciones y reducciones de un rompecabezas[1]. Es la primera actividad de una secuencia donde se pretende que los alumnos construyan conceptos y propiedades involucrados en la noción de proporcionalidad. En un principio se la considera en un marco "geométrico" dentro del contexto de reproducción de figuras (figuras semejantes), para luego trabajarla en otros marcos: "numérico" y en el de las "magnitudes". Se trata de, a partir de un primer análisis de las condiciones que hacen que se logre una ampliación o reducción de una figura, traducirlas más tarde en las propiedades de la proporcionalidad.

Los alumnos se organizan para trabajar en equipo, se forman cinco grupos. Cada grupo recibe un modelo del rompecabezas: figuras geométricas con ciertas condiciones que forman un cuadrado, (fig. 1) (igual para todos). El profesor coloca en el pizarrón el modelo del rompecabezas y da la siguiente consigna:

> *"Deben recortar el rompecabezas que entregué a cada grupo, y cada uno de ustedes debe ampliar o reducir al menos una pieza, es decir, en un*

[1]Esta situación problemática está basada en una actividad que elaboró Brousseau, en "Problemas de la didáctica de los decimales" con el objetivo de proponer a los alumnos el estudio de aplicaciones lineales; más tarde Regine Douady en su trabajo realizado con M. J. Perrin: "Los decimales" propone una actividad similar con el objetivo de reconocer y utilizar un modelo de proporcionalidad.

primer momento deberán trabajar en forma individual. Luego en forma conjunta, uniendo las piezas, arman el nuevo rompecabezas que deberá tener la misma forma que el modelo dado, pero de distinto tamaño."

El lado que mide 12,5 cm. en el modelo, en el nuevo rompecabezas debe medir:

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5
15 cm	25 cm	20 cm	10 cm	6,25 cm

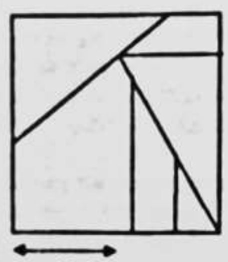


fig. 1

Desarrollo de la clase

Luego que el profesor da la consigna de la actividad los alumnos trabajan en grupo.

Todos los alumnos, salvo los del Grupos 5, comienzan utilizando procedimientos aditivos, es decir a cada longitud de los lados de cada pieza le suman una constante.

Por ejemplo, los alumnos del Grupo 1, que deben pasar de 12,5 cm a 15 cm suman 2,5 cm a cada lado. Al utilizar este procedimiento, el resultado es que las piezas no encajan y el rompecabezas no se puede armar. En general estos alumnos no cuestionan el procedimiento utilizado sino que desconfían de cómo se llevó a cabo la tarea. Vuelven a medir, rehacen algunas piezas, hasta que al intentar armarlo y que las piezas encajen de cualquier manera, perciben que al tener dos piezas arriba y tres abajo, están agregando cinco centímetros arriba y 7,5 abajo.

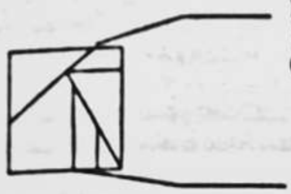


fig. 2

Es en este momento que los alumnos de este grupo cuestionan el procedimiento empleado, descartan el aditivo y comienzan a buscar otra estrategia, pero no consiguen hallarla.

En cambio los alumnos del Grupo 4, que deben pasar de 12,5 cm a 10 cm, hacen la diferencia y plantean que estos 2,5 cm representa un quinto del lado original, por lo que quitan un quinto a cada lado, es decir hacen: $x - 1/5\,x$.

Los alumnos del Grupo 5, que debían pasar de 12,5 cm a 6,25 cm, asocian inmediatamente esta relación como "la mitad de", por lo que dividen cada lado por dos.

En la puesta en común los alumnos exponen sus estrategias, con los datos que brindan los alumnos la profesora organiza una tabla. Primero exponen los alumnos que utilizaron procedimientos aditivos. Haciendo uso de las tablas analizan por qué al sumar no se logra armar el rompecabezas. Luego exponen sus estrategias los alumnos que tuvieron éxito en la actividad. Como conclusión de esta clase queda que sumar una constante no permite lograr una buena reproducción, sí sumar un número que dependa de cada lado o multiplicar por un mismo número.

Análisis de la actividad

En la clase siguiente se le propone a los alumnos una actividad en la que debían hallar en cuánto se había ampliado un modelo dado (Ver Anexo). El objetivo es que utilicen en forma explícita los conocimientos a los que concluyeron la clase anterior. En este caso también trabajan en grupos (son los mismos que en la actividad anterior).

En esta actividad todos los grupos salvo el Grupo 5 buscan por qué número hay que multiplicar el lado original para obtener el lado de la ampliación, ya sea por tanteo o dividiendo. En cambio los alumnos del grupo 5 comienzan utilizando un procedimiento aditivo. Solicitan dos medidas (la altura y la base del rectángulo menor), hacen la diferencia entre las medidas que corresponden a la base del rectángulo original y el de la ampliación y agregan ese resultado (0,8 cm) a todas las medidas que tienen la misma dirección. Realizan el mismo procedimiento con las medidas de las alturas, agregando en este caso 1,28 cm. Es decir si bien utilizan un procedimiento aditivo, no es la misma constante la que agregan a todos los lados.

Este fue el único grupo que en esta actividad utilizó un procedimiento aditivo, es uno de los que tuvo éxito en el armado del rompecabezas habiendo utilizado un procedimiento multiplicativo: dividir cada lado por 2.

Si en un principio utilizan un procedimiento correcto, *¿qué hace que luego pasen a uno erróneo? ¿Por qué este aparente retroceso?*

Intentaremos mostrar, dando respuestas a estas preguntas, la incidencia en el desarrollo de esta actividad de las relaciones elegidas: por un lado "doble" y "mitad", y por otro lado las ampliaciones o reducciones distintas a éstas.

El modelo aditivo es tan fuerte que para poder incorporar otro modelo, en este caso el multiplicativo, es necesario primero poder desecharlo. Es decir, usarlo, porque es el que se conoce, convencerse que no funciona, para luego rechazarlo y recién después asumir que existe otro que dé solución a mi problema.

Si bien el éxito de la actividad se logra cuando las nuevas piezas encajan perfectamente, es decir cuando se arma el rompecabezas, el hecho de no haber llegado a esta etapa no significa que no hubo aprendizaje. El asumir que el procedimiento aditivo no funciona ya es un avance en el conocimiento, como se observa en los grupos 1, 2 y 3.

Cuando se solicita una reproducción del rompecabezas que haga que el lado que mide 12,5 cm en el modelo original mida en el nuevo 6,25 cm (Grupo 5), es muy factible que el alumno inmediatamente relacione con "la mitad de" y tenga éxito en la solución de esta situación, lo mismo ocurriría en el caso de las relación 12,5 cm a 25 si los alumnos la hubieran percibido como "el doble". Podríamos, considerando a Maier (citado en Gibaja p.183) pensar que estos alumnos sólo tienen un "pensamiento reproductivo", en el sentido que están aplicando un conocimiento que ya saben: duplicar. Mientras que, si solicitamos una reproducción de 12,5 cm a 15 cm (Grupo 1), la relación entre estos números no es tan evidente. Por eso los alumnos acuden en primer lugar a la relación más conocida que es agregar 2,5 cm. con lo cual no resuelven el problema y el no armado del rompecabezas es lo que da lugar al uso de estrategias cognitivas y metacognitivas y la posibilidad de hallar el procedimiento correcto. Siguiendo con Maier, esto se correspondería con un "pensamiento productivo", ya que exige una reestructuración de sus conocimientos para responder a las demandas del problema.

Desde el punto de vista de las interacciones entre pares, en el caso de los grupos que debían realizar reproducciones que no fueran el doble ni la mitad, tienen la posibilidad que estas interacciones sean efectivas en el sentido que estos alumnos tienen la oportunidad de "objetivar creencias, concepciones ingenuas, ideas erróneas y con ello la posibilidad de confrontarlo con la nueva información" (Rinaudo y Olmos, 1997, p.4). Esto no se podrá dar mientras los alumnos no pongan en discusión su estrategia como ocurre en el grupo 5 que nunca dudaron de su procedimiento, mientras que en los otros grupos, por ejemplo el Grupo 1 (Ver p.3), es justamente a partir de ese momento en donde se comienzan a producir este tipo de interacciones y avances en el conocimiento.

Los alumnos que pasan por la situación de no poder armar el nuevo rompecabezas por utilizar una estrategia errónea, se ven obligados a razonar sobre qué procedimientos les asegurarán que se respetará la forma del rompecabezas, es decir, deberán utilizar las propiedades de la linealidad (proporcionalidad) aún sin que las conozcan formalmente. Implícitamente deben hacer referencia a una de las propiedades de la proporcionalidad:

$$f(a+b) = f(a) + f(b).$$

En este caso si la longitud de un lado del rompecabezas original es igual a la longitud de la suma de otros dos, esto mismo debe suceder en la reproducción. (Ver fig. 1).

Hasta aquí hemos dado algunas explicaciones de por qué los alumnos del grupo 5 no tuvieron avances en el conocimiento. Pero, restaría preguntarnos: *¿Qué sucedió con la puesta en común?, ¿Y qué sucedió con la síntesis que el profesor hace y las conclusiones a las que llegan en esa clase?*

Recordemos que hubo una instancia de puesta en común donde la clase y el profesor concluyen: *"sumar o restar un mismo numero no lleva a una buena reproducción, si sumar un numero que dependa de cada lado o multiplicar por un mismo numero."*.

Es evidente que los alumnos del Grupo 5 no pueden aprovechar esta instancia, esta explicación no fue significativa para ellos, pues no la necesitan, no tenían ningún problema sin solucionar. A diferencia de los grupos 1, 2 y 3 que habían desechado un procedimiento y estaban en la búsqueda de uno apropiado, para ellos esa intervención del profesor está dada en el momento oportuno desde el punto de vista del aprendizaje. Esto justifica por qué en la actividad que siguió a esta (Ver Anexo) pensaron en un procedimiento multiplicativo y no así el grupo 5.

Acerca de las decisiones

En los resultados de la situación analizada vimos que los aprendizajes no son los mismos para los alumnos del grupo 5 que para el resto. Podríamos decir, entonces, que la elección de las relaciones numéricas que se propusieron a los alumnos son variables a tener en cuenta, ya que éstas darían la oportunidad de hacer evolucionar el conocimiento.

Intentaremos mostrar algunas cuestiones que ayuden a comprender las decisiones que se tomaron acerca de esta actividad.

Recordemos que la misma se elaboró sobre la base de otras actividades presentadas en trabajos de investigación de didáctica de la matemática. En este caso se consideró que ésta era "una buena actividad" para introducir la noción de proporcionalidad, pues en su resolución está implícita esta noción.

Cuando el docente decide incorporar esta actividad como parte de su proyecto de enseñanza, es donde comienzan las adecuaciones que él cree necesarias para que se ajuste al funcionamiento de la institución en la que enseña. Es decir que pueda formar parte de una clase de matemática. Propone relaciones entre los lados diferentes para cada grupo, algunas de ellas corresponden al "doble" y a la "mitad" pues supone que los alumnos tendrán mayor posibilidad de éxito en la reconstrucción del rompecabezas utilizando un procedimiento multiplicativo. De esta manera se asegura que éste aparezca en la clase para compararlo con los procedimientos aditivos que surjan y cumplir con el objetivo propuesto: que los alumnos puedan concluir que el procedimiento adecuado para resolverla con éxito, es el multiplicativo: $y = k\,x$ y no el aditivo: $y = k + x$, que seguramente será el más utilizado por los alumnos. Vemos así, que a veces se prioriza la enseñanza sobre el aprendizaje.

Ya vimos que a los alumnos que le corresponde la relación "mitad" les estamos dando menos posibilidad de avance en sus aprendizajes. En este caso el grupo de alumnos que tenía que pasar de 12,5 cm a 25 cm, creemos que tenían también menos posibilidades, pero al no percibir esta relación como el "doble" tuvieron mejores logros. Entonces podríamos decir que para que todos los alumnos tengan las mismas oportunidades de evolucionar en sus aprendizajes deberíamos darles relaciones diferentes a éstas.

Pero si no se proponen relaciones como "el doble" o "la mitad" ¿aparecerán en clase procedimientos multiplicativos? De esta manera el docente se encuentra ante una situación de incertidumbre frente a la posibilidad que estos no surjan. En ese caso lo único que se puede concluir es que el procedimiento aditivo no soluciona este problema.

Generalmente el docente trata en sus clases de instaurar un conocimiento, un procedimiento válido, definiciones, propiedades... que responden a contenidos curriculares. Por una cuestión de tiempo prioriza tratar nociones matemáticas que son soluciones para determinados problemas, pero rara vez se destinan clases para desterrar un procedimiento. Sin embargo esto representa un avance muy importante en los alumnos para poder comenzar el estudio de la proporcionalidad. En este caso se estaría priorizando el aprendizaje, pero sería necesario reflexionar sobre esto para que desde el punto de vista de la enseñanza no quede en el docente la sensación que no enseñó nada.

Conclusión

Ya se sabe que todos los alumnos no avanzan en el conocimiento de la misma manera o que todos no logran los mismos aprendizajes, pero lo que nos parece importante considerar es que esto no es sólo consecuencia de las características de los alumnos, sino también de la oportunidad que se le da para que lo logren. Pero el docente tiene la necesidad de instaurar rápidamente un discurso que se relacione con algún contenido curricular. Si además tenemos en cuenta que el tiempo es tirano, es muy difícil la decisión del docente de destinar una clase nada más que para rechazar un procedimiento.

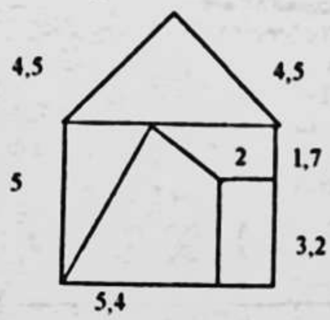
De esta manera, quisimos poner de manifiesto, por un lado, la influencia que tienen las actividades de aprendizaje llevadas a cabo por los propios alumnos en la calidad de sus aprendizajes (Vermunt, 1996) y por otro, algunos condicionamientos que influyen en la toma de decisiones por parte del docente, al implementar y adecuar estas actividades en el aula.

ANEXO

La segunda actividad que se propone (extraída de Regine Douady) para la construcción de la noción de proporcionalidad es la siguiente:

> *"Se tiene un modelo con todas sus medidas y una ampliación del mismo. Cada grupo debe solicitar por escrito la mínima información que necesita para determinar en cuánto se amplió el modelo y hallar las medidas de la reproducción."*

El modelo con sus medidas es el siguiente:



El objetivo de esta actividad es que los alumnos encuentren el "coeficiente de la reproducción" conociendo las medidas del modelo y alguna medida de la figura reproducida.

Para esta reproducción que corresponde a una ampliación de 1,4 veces, el profesor muestra a los alumnos dos dibujos (dos casas de diferente tamaño pero de igual forma). Recorre los bancos con los dibujos para que los alumnos puedan verlos bien y luego los fija en el pizarrón.

El profesor les explica que ellos deben determinar en cuánto se amplió la casa y encontrar las medidas de la reproducción. Para ello cada grupo deberá pedir por escrito, la mínima información que considere necesaria. Luego deberán verificar si las medidas calculadas coinciden con las del pizarrón.

Bibliografía

BROUSSEAU, G. (1981) "Problemas de didáctica de los decimales". *Recherches en didactique des mathématiques*. Vol. 2.1. pp 37-127. La Pensée Sauvage éditions. France.

BROUSSEAU, G., (1986), "Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques", *Recherches en Didactique des mathématiques*, Vol. 7/2. Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

CHEVALLARD, Y. (1991), *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Ed Aique

DOUADY, R. y PERRIN, M.J. (1986) "Números decimales", Brochure, IREM, París VII.

FREGONA, D., (1998), "¿Cuál es el lugar de la didáctica de la matemática en la formación de profesores de matemática?", FaMAF, U.N.Córdoba

GIBAJA, R. (1982) "Aprendizaje e instrucción. Desarrollos actuales de la psicología educacional". *Revista de la Universidad Nacional de Río Cuarto*. Vol.II (2), pp. 165-196. Córdoba.

RINAUDO, C. y OLMOS, G. (1997). "Participación y aprendizaje. Aportes para el estudio de las interacciones entre pares". (En etapa de evaluación para ser publicado en la Facultad de Ciencias Humanas de UNRC.

VERMUNT, J.D. (1996). "Metacognitive, cognitive and affective aspects of learning styles and strategies: A phenomenographic analysis. *Higher education 31*. pp. 25-50