¿CUÁLES SON LOS LÍMITES DE LA ORIENTACIÓN EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS?

Nelly Vázquez de Tapia

"La urgencia que siente el docente para explicar y hablar más de lo que los chicos necesitan es el más grande daño en la resolución de problemas"

Alan H. Shoenfeld

Cada vez que se aborda el tema de resolución de problemas se habla de que el profesor debe ser "orientador" y "guía".

Pero ¿cómo fijamos el límite de la orientación que debe recibir el alumno?.

Nadie podría dudar que G. Polya fue el indiscutido precursor en señalar un método de Resolución de Problemas.

Si bien su primera obra "Como plantear y resolver problemas" data de 1945, pasaron largos años hasta que los países mostraran un verdadero interés por el tema. Recién a fines de los 70 algunos matemáticos se dedicaron a experimentar e investigar sobre métodos y técnicas de Resolución de Problemas. Entre ellos se destacó Alan H. Shoenfeld quien solicitó, sin resultado, que este tema fuera tratado en el programa del IV ICME en Bekerley, Califronia (1980).

La cuestión de Resolución de Problemas fue tratada por primera vez en el V ICME (Adelaida – Australia – 1984) en un Grupo de Trabajo cuyos organizadores fueron, entre otros, Hugh Burkhardt (UK) y Alan Shoenfeld (USA). En el VI ICME (1988 – Budapest Hungría) se compartieron, en un mismo grupo, La Resolución de Problemas y la Modelización y sus Aplicaciones.

La década del 80 fue llamada la "Década de Resolución de Problemas" por el gran impulso que tomó esta cuestión.

Pero, como es natural, las técnicas de Polya, después de casi cuarenta años se fueron modificando y mejorando en algunos aspectos.

En Polya se advertía una excesiva orientación en la resolución de un problema. Véase, por ejemplo, las orientaciones para determinar la diagonal de un paralelepípedo rectangular dados su longitud, su ancho y su altura, en su libro "Como plantear y resolver problemas".

Precisamente Shoenfeld luchó contra esta desmedida orientación. Opina que *"Si el docente interfiere con sus explicaciones, destruye el carácter de "problema" que presentaba la tarea"*.

Para abordar la solución de un problema, el alumno puede intentar distintos caminos. Una excesiva orientación puede inducirlo a seguir alguno de ellos, impidiéndole vislumbrar los demás.

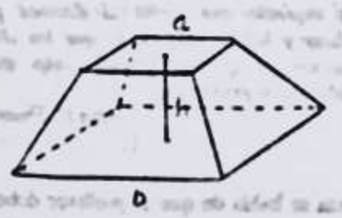
Esto es lo que deseo mostrar aquí, con uno de los problemas complejos de Polya, en el cual el alumno es conducido a una determinada solución, descartando otros posibles caminos.

Realicé la experiencia, durante 20 años, con alumnos de mi curso de Metodología y Práctica de la Enseñanza del último año del Profesorado y en los cursos de capacitación de docentes de EGB3 y Polimodal, puesto que ya, en esos años, no dictaba clases en la escuela secundaria.

El problema propuesta por Polya que, planteo, es el siguiente:

PIRÁMIDE TRUNCADA

EL PROBLEMA
Datos:
a, b, h



Hallar el volumen V de la pirámide truncada de base cuadrada dada la altura h, cuya base superior tiene un lado de longitud a y la base inferior tiene un lado de longitud b

Polya señala cuatro pasos para resolver un problema:

I- Comprender el problema
II- Concebir un plan
III- Ejecución del plan
IV- Examinar la solución obtenida.

Para nuestra propósito nos interesan especialmente los pasos II Y III.

- Concebir un plan

Polya comienza generalmente con estas preguntas:

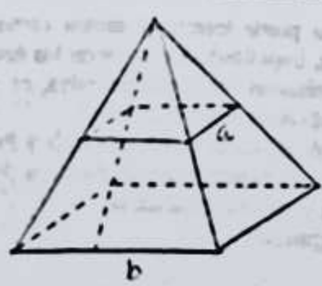
- ¿Se ha encontrado con un problema semejante?
- ¿Cual es el problema relacionado que se puede resolver?

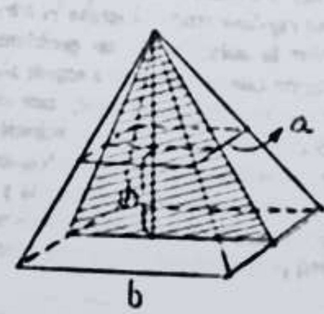
Con una serie de preguntas conduce al alumno a que el problema relacionado es el volumen de una pirámide y que puede reformular el problema dado como la diferencia entre los volúmenes de dos pirámides.

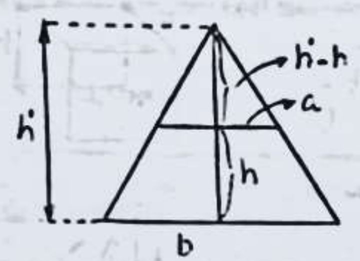
- Ejecución del plan

Utilizar las fórmulas conocidas para hallar al altura de la pirámide mayor, de la pirámide menor y el volumen de ambas.

Proceso de solución I (inducido por Polya).







Cálculo de h'

$$\frac{h' - h}{a} = \frac{h'}{b}$$

$$bh' - bh = ah'$$

$$h'\left(b - a\right) = bh$$

$$\boxed{h' = \frac{bh}{b - a}}$$

$$\text{Vol. I} = \frac{b^3 . h}{3\left(b - a\right)} \qquad \text{Vol. Tronco} = \text{Vol. I} - \text{Vol. II}$$

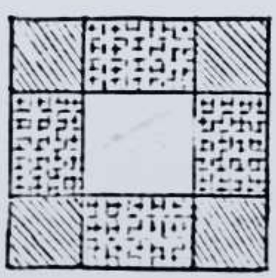
$$\text{Vol. II} = \frac{a^3 . h}{3\left(b - a\right)} \qquad \boxed{\text{Vol. Tronco} = \frac{\left(b^3 - a^3\right) . h}{3\left(b - a\right)}} \quad \text{I}$$

En este caso, la excesiva orientación dejó de lado otros caminos.

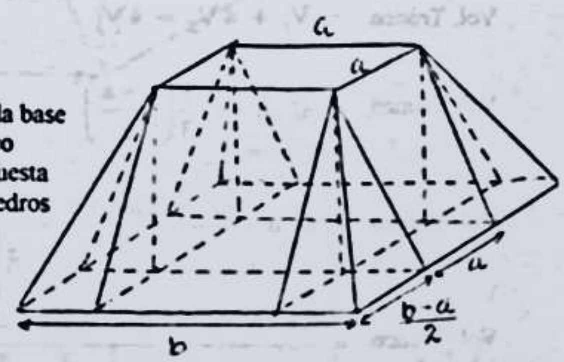
En las experiencias que realicé evité influir con mis intervenciones a fin de que pudieran surgir nuevas soluciones.

<u>Proceso de solución II.</u>

Descomposición del tronco en varios cuerpos



→ **Vista de la base del tronco descompuesta en 9 poliedros**

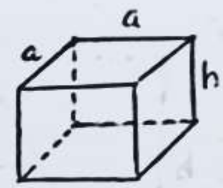


La mayoría de los alumnos intentó descomponer el tronco de pirámide en varios cuerpos cuya fórmula para calcular el volumen fuera conocida.

Se descompuso el tronco en:

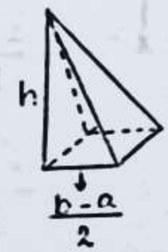
- 1 paralelepípedo de base cuadrada de lado **a** y altura **h**

$$V_1 = a^2 . h$$

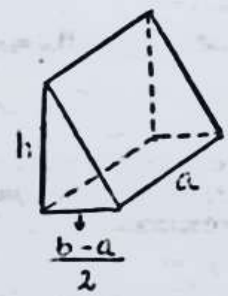


- 4 pirámides de base cuadrada de lado $\dfrac{b-a}{2}$ y altura **h**

$$V_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 . h$$



- 4 prismas triangulares de altura **a**, cuyas bases son triángulos de base $\dfrac{b-a}{2}$ y altura **h.**



$$\text{Vol. Tronco} = V_1 + 4\,V_2 + 4\,V_3$$

$$\text{Vol. Tronco} = a^2 .h + 4 . \frac{1}{3}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 .h + 4 . \frac{1}{2}\ \frac{b-a}{2} .\ h\,.a$$

$$\text{Vol. Tronco} = a^2\,h + \frac{\left(b^2 - 2\,ab + a^2\right).h}{3} + (b-a).\ h\,.a$$

$$\text{Vol. Tronco} = \frac{\cancel{3a^2h} + b^2h - 2\,abh + a^2h + 3\,bha - \cancel{3ha^2}}{3}$$

$$\text{Vol. Tronco} = \frac{h\left(b^2 + a^2 + ab\right)}{3}$$

La expresión entre paréntesis es el cociente de $b^3 - a^3$ por $b - a$.

$$\Rightarrow \quad \boxed{\text{Vol. Tronco} = \frac{h\left(b^3 - a^3\right)}{3\left(b - a\right)}} \qquad \text{II}$$

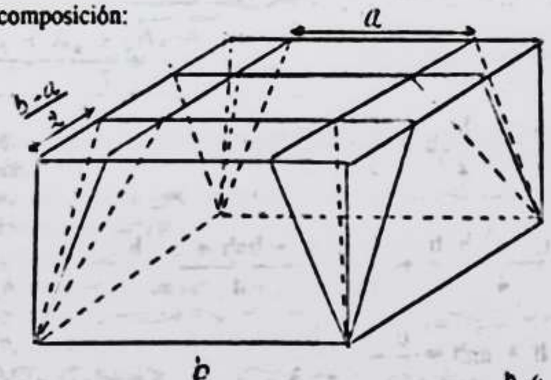
Proceso de solución III

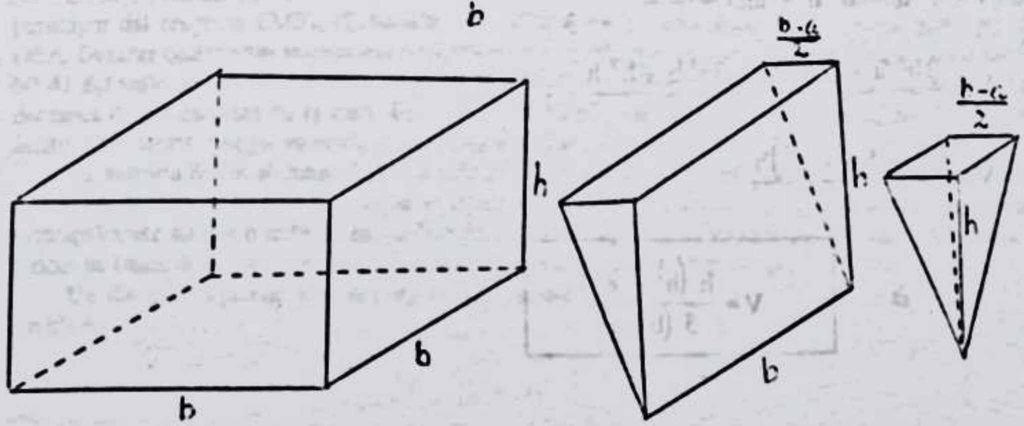
Durante los veinte años que estuve proponiendo el problema, nadie encontró esta nueva solución.

A lo sumo vislumbraban un posible camino considerando el prisma de base cuadrada de lado **b** y altura **h** que contiene el tronco de pirámide objeto del problema, pero fracasaban cuando intentaban hacer la descomposición adecuada por la dificultad generalizada de "ver" en el espacio tridimensional y, más aún, por la falta de habilidad para representar en perspectiva un objeto tridimensional en el plano. Ello se debe, sin duda, a la poca importancia que se le concede a la geometría del Espacio en el curriculum.

De modo que ante este obstáculo abandonaban el intento y buscaban otro camino.

Analicemos la nueva descomposición:





$V =$ Vol. del tronco de pirámide.

$V_1 =$ Vol. del prisma de base cuadrado de lado b y altura h.

$V_1 = b^2 h$

$V_2 =$ Vol. del prisma de altura b y base triangular de altura h y base $\dfrac{b-a}{2}$

$$V_2 = \frac{b-a}{2} \cdot \frac{h}{2} . b$$

$V_3 =$ Vol. de la pirámide de base cuadrada de lado $\dfrac{b-a}{2}$ y altura h.

$$V_3 = \frac{1}{3}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 . h$$

Si del V_1 restamos $4V_2$ estamos restando 2 veces el volumen de las pirámides. Luego para compensar hay que sumar $4V_3$.

$$V = V_1 - 4V_2 + 4V_3$$

$$V = b^2 h - 4 . \frac{b-a}{2} . \frac{h}{2} . b + \frac{4}{3}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 . h$$

$$V = b^2 h - \frac{4\,(b-a) . h . b}{4} + \frac{4}{3} . \frac{b^2 h - bah + a^2 h}{4}$$

$$V = b^2 h - b^2 h + ahb + \frac{b^2 h - bah + a^2 h}{3}$$

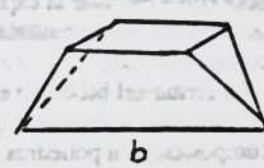
$$V = \frac{\cancel{3b^2 h} - \cancel{3b^2 h} + 3ahb + b^2 h - bah + a^2 h}{3}$$

$$V = \frac{(b^2 - ba + a^2)h}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{V = \frac{h\,(b^3 - a^3)}{3\,(b-a)}} \quad \text{III}$$

Los escasos alumnos que lograron esta descomposición se encontraron con otro escollo que les impidió llegar a la solución.

En lugar de restar los prismas triangulares y luego sumar las 4 pirámides que habían sido sustraídas dos veces, pretendieron restar los ocho cuerpos que rodeaban el tronco pero se encontraron con la dificultad de que no conocían una fórmula para calcular el volumen de los cuerpos que quedaban entre dos pirámides.



De cualquier manera el haber encontrado, por lo menos, tres caminos puede considerarse como un resultado satisfactorio.

Dice Shoenfeld que "En la Resolución de Problemas, la tarea del docente es multisendas porque los alumnos siguen distintas líneas de pensamiento".

Pero además, el docente debe tratar de estar preparado para responder a las insólitas preguntas que suelen hacer los alumnos. Si bien en la presentación de este problema no se presentó el caso, he pensado en la posibilidad de dos preguntas que esperaba surgieran en cualquier momento.

Primera pregunta posible:

- Profesora: ¿por qué necesitamos tomarnos tanto trabajo para calcular el volumen si en mi libro de texto hay una fórmula que permite hallar directamente el volumen del tronco de pirámide.

$$\boxed{\text{Vol. tronco pirám.} = \frac{A_1 + A_2 + \sqrt{A_1 . A_2}}{3}}$$

Siendo en este caso A_1 y A_2 las bases cuadradas de lados **a** y **b**

En este caso habrá que explicarle que, precisamente, para llegar a esa fórmula fue necesario desarrollar una demostración.

Por otra parte podemos proponerle que demuestre que esta fórmula coincide con los resultados obtenidos. (La comprobación es muy simple).

Segunda pregunta posible (Muy habitual en los alumnos).

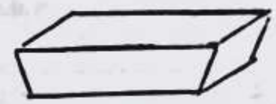
- ¿Y esto para qué sirve? ¿Alguna vez lo vamos a aplicar en la realidad?

De haberse formulado esta pregunta, yo disponía, afortunadamente de un ejemplo fortuito.

En la década del 82 fui contratada por el Ministerio de Educación de la provincia de Chubut para participar del proyecto EMER (Extensión y Mejoramiento de Escuelas Rurales) auspiciado por la OEA. Durante cuatro años viajaba tres o cuatro veces por año por períodos de una semana a la escuela N° 41 del valle de Las Golondrinas, en la precordillera. Era la escuela "núcleo" donde se reunían los docentes de las escuelas de la zona: Epuyén, Lago Puelo, Cerro Radal, Entre Ríos y El Hoyo para asistir a los cursos. Luego, yo visitaba las clases en las escuelas de la zona.

La mayoría de los alumnos de la Escuela N° 41 provenían de comunidades indígenas mapuches que se dedicaban a la cría de ovejas y algunos cultivos. Vivían de la venta de sus artesanías, principalmente tejidos o trabajos en madera de radal y de la fabricación casera de quesos de oveja y dulces de frutas de la zona (cerezas y frambuesas muy abundantes en la zona).

Un día me sorprende una maestra con el planteo de un problema.



El padre de un alumno de la comunidad mapuche deseaba conocer cómo calcular la capacidad de un bebedero de ovejas y la cantidad de antiparasitario de debía agregar de acuerdo al porcentaje indicado.

La forma del bebedero era la de ¡una pirámide truncada!.

Volviendo a nuestra experiencia, los resultados arrojaron una leve preferencia del método de descomposición en poliedros.

- Porcentajes sobre el 100% de los problemas resueltos:

Procedimiento I (inducido por Polya)	45,72%
Procedimiento II (descomposición en poliedros)	54,28%
Total	100,00%

- Porcentajes sobre el total de problemas propuestos:

Procedimiento I (inducido por Polya)	34,75%
Procedimiento II (descomposición en poliedros)	41,25%
Sin resolver	24,00%
Total	100,00%

Ningún problema fue resuelto por el Procedimiento III.

Conclusiones:

- Toda orientación en la resolución de problemas debe ser lo suficientemente cuidadosa como para no descartar ningún camino posible, aunque nunca se puede estar totalmente seguro de que no exista otro.
- No hay que preocuparse demasiado por encontrar una aplicación práctica de un problema porque lo que verdaderamente importa es la habilidad que el alumno adquiere en la resolución de problemas, pues el más capacitado para resolver cualquier situación imprevista será quien haya desarrollado en mayor grado sus habilidades.