PENSAR EN MATEMÁTICA

Christiane C. Ponteville

INTRODUCCIÓN

Si preguntamos a cualquier persona acerca de la importancia de aprender matemática, entre las respuestas posibles y más corrientes escucharemos argumentos que se refieren a la utilidad de esta ciencia: sirve para pensar, para desarrollar el pensamiento, para calcular, enseña a sacar conclusiones, a encontrar soluciones y respuestas a un problema dado, etc. Algunas de estas expresiones, aunque no lo hagan explícitamente, hacen referencia a la utilización del método deductivo como herramienta para adquirir nuevos conceptos matemáticos.

Sin embargo, en gran cantidad de ocasiones, la utilización de métodos mecánicos y algorítmicos reemplaza a la deducción matemática en el aula. Calcular las raíces de un polinomio aplicando fórmulas, aplicar casos de factoreo a expresiones algebraicas, realizar largos cálculos algebraicos, aplicar la regla de tres a una larga lista de problemas, que se convierten en ejercicios, son algunas de las posibles actividades presentadas como parte de la clase de matemática en los distintos niveles de la enseñanza.

El método deductivo, en la escuela, en los casos en los que figura, está más vinculado con la geometría que con el álgebra, apareciendo en las demostraciones de algunos teoremas de geometría del plano. Sin embargo, por lo general, esta aproximación al método deductivo se hace a través del aprendizaje "de memoria" de las demostraciones de algunos teoremas. Los ejemplos anteriores muestran cómo se desperdicia en el aula la posibilidad de aprendizaje de una de las características centrales de la matemática: *pensar deductivamente*.

Los contenidos básicos comunes tanto para la Educación General Básica como para la Educación Polimodal hacen referencia explícita a la aparición de contenidos procedimentales vinculados con el razonamiento deductivo.

En relación con estas ideas se puede leer en ellos: ... *"probar una generalización requiere de la deducción que la independiza de la experiencia y la torna universal. El razonamiento deductivo no está necesariamente unido a una presentación formal del mismo, y en este nivel no es condición necesaria tal presentación, pero sí es interesante que los alumnos puedan usar y establecer las diferencias entre las distintas formas de verificación. La negación, los cuantificadores, las conectivas,* *los contraejemplos, las demostraciones por el absurdo o por métodos directos son herramientas del razonamiento lógico que los alumnos deben conocer"...*

Este artículo se propone simplemente analizar algunas ideas que pueden ser útiles a la hora de trabajar en el aula el método deductivo como uno de los contenidos de la asignatura matemática.

EL MÉTODO DEDUCTIVO EN LA HISTORIA DE LA MATEMÁTICA

La historia de la matemática provee muchos buenos ejemplos para analizar ideas vinculadas con el pensamiento deductivo en esta ciencia.

A través de los problemas planteados tanto en las tablillas babilónicas, como en los papiros egipcios, es posible observar que la matemática consistía en un conjunto de reglas, técnicas, algoritmos, tablas de consulta que permitían resolver problemas concretos. Tanto en las tablillas como en los papiros se ve claramente cómo se resuelve el problema, nunca por qué el método es válido. Esta forma de utilizar la matemática resulta sorprendente pues se basa en la experiencia aunque en algunas ocasiones genera resultados erróneos en las aplicaciones realizadas.

Dentro de la matemática griega esta concepción cambia radicalmente. Influidos por las experiencias de los pueblos que los precedieron, los griegos pusieron a la deducción lógica como centro del pensamiento matemático. A través de la "dialéctica" creada por Aristóteles aparece la lógica como una disciplina sistematizada de forma tal que en el discurso tanto el razonamiento como la deducción juegan un papel esencial.

Los Elementos de Euclides nos muestran un ejemplo donde la utilización del método deductivo es el método válido para poder decir que una proposición geométrica es verdadera. No es necesario aclarar que Los Elementos constituyen la piedra fundacional de la utilización del método deductivo en la geometría, y por lo tanto en la matemática.

Durante siglos, las matemáticas proporcionaron un firme asidero para entender el funcionamiento de la naturaleza. Esta idea puede resumirse en la idea de Laplace de que el universo es uno y Newton el más afortunado de los hombres por haber descubierto sus leyes.

Con la construcción de las llamadas geometrías no euclideanas es posible ver como esta idea cambia. Con ellas, es posible ver como a partir de un conjunto de principios básicos, se demuestran proposiciones utilizando argumentos lógicos. Este conjunto de principios básicos, llamados axiomas, no es ya un conjunto de verdades evidentes sino simplemente un conjunto de proposiciones que deben resultar consistente para que el sistema así creado resulte pertinente de ser analizado.

A partir de aquí la matemática utiliza a la lógica como una especie de método de control de calidad. Un razonamiento matemático resultará válido si se basa en las leyes estipuladas por la lógica clásica. Esta idea encontrará asidero teórico en la definición de sistema formal y las leyes lógicas serán analizadas como un contenido en sí llegándose a partir de ellas a la definición de otras lógicas.

No se encuentra en el alcance de este artículo, el análisis de cada una de las componentes de la historia de la matemática que antes fueron nombrados. Simplemente nos interesa ver que estas ideas muestran que la veracidad de un teorema no es una idea absoluta sino que depende del sistema axiomático en el cual estamos trabajando. O sea, analizaremos algunas ideas no del concepto de sistema axiomático, sino la idea de la adquisición del concepto de deducción lógica dentro de los distintos niveles de la enseñanza de la matemática.

EL CONCEPTO DE PROPOSICIÓN VERDADERA

Cuando trabajamos dentro del aula enunciamos permanentemente proposiciones del tipo:

Todos los cuadrados son rectángulos.
Existen números que son pares y no son divisibles por cuatro.
Las medianas de un triángulo se cortan en un punto.
Existen funciones que no son continuas.
Un número es divisible por tres si la suma de sus cifras es divisible por tres.

Sería conveniente, dentro de cada uno de ellos niveles, plantear el interrogante sobre si es posible averiguar si son verdaderas o falsas o sea si pueden ser consideradas teoremas dentro de nuestra matemática escolar.

Este análisis contendrá en su esencia el concepto de razonamiento y puede constituir un paso fundamental para la adquisición de la capacidad de deducción.

Analicemos alguna de ellas:

Todos los cuadrados son rectángulos.

En esta primera proposición, para responder si es verdadera o falsa, debemos repasar que significa que un cuadrilátero sea un rectángulo y que significa que sea un cuadrado. Basta tener en cuenta que un cuadrado tiene cuatro lados y cuatro ángulos iguales. Un rectángulo tiene cuatro ángulos iguales. Por lo tanto cualquier cuadrado que consideremos cumplirá la condición necesaria para ser un rectángulo.

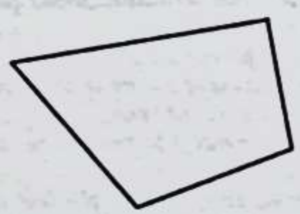
Es importante tener en cuenta que la deducción que hicimos tiene dos factores importantes a ser considerados: primero, las definiciones que usamos no son únicas o sea es posible que usemos otras según la situación problemática que se nos presente (aunque es importante que analicemos la equivalencia de ellas), en segundo lugar el análisis se hace sobre un conjunto infinito de elementos. Es imposible que verifiquemos uno a uno que cada uno de los elementos del conjunto de los cuadrados cumple con la condición de ser rectángulo pero apelamos a la definición de cuadrado que nos dice bajo que condiciones un cuadrilátero es llamado cuadrado. Hasta aquí, suponiendo que ya se ha adquirido el concepto de cuadrilátero, esta proposición puede ser aceptada como verdadera.

La explicación dada anteriormente, aunque no formal, es una demostración rigurosa de la proposición en cuestión. Debemos preguntarnos cuál de estos aspectos de las demostraciones nos interesa trabajar con nuestros alumnos.

Tomemos ahora en cuenta la siguiente proposición:

Si un cuadrilátero tiene un ángulo recto entonces es un rectángulo.

Pensando en forma equivalente al planteo anterior veremos que es posible construir un cuadrilátero que tenga un ángulo recto y que no sea rectángulo. Por ejemplo:



Es claro que no es la única posibilidad de construcción pero para analizar la veracidad de la proposición nos basta con uno. Obtenido un cuadrilátero que no verifique la condición podemos decir que la proposición es falsa. No es suficiente pedir a un cuadrilátero que uno de sus ángulos sea recto para que sea un rectángulo.

Consideremos ahora otra de las proposiciones que enunciamos anteriormente:

Un número es divisible por tres si la suma de sus cifras es divisible por tres.

Este resultado, habitualmente utilizado, para estudiar la divisibilidad de los números naturales es verificado a través de ejemplos por los alumnos no con poca curiosidad. Parece magia pero no lo es. Para sostener este argumento, es interesante plantearles la posibilidad de que lo demuestren utilizando la expresión polinómica de los números naturales.

Nuestros alumnos cumplirían de esta manera con dos etapas fundamentales de la investigación matemática. Primero, análisis inductivo de un resultado propuesto. Luego, demostración a través del método deductivo de su validez.

Es claro que no todas las proposiciones que involucran los conceptos trabajados en la matemática escolar pueden ser demostradas por los alumnos. Cada docente, de cada uno de los niveles, deberá seleccionar los que le servirán para desarrollar la intuición de la demostración en los alumnos. Esta selección depende no sólo del nivel sino del curso en particular en el que nos hallemos en ese momento. De nada sirve que llenemos los pizarrones de demostraciones construidas por nosotros y que nuestros alumnos sean simples observadores. Pues, la única manera de aprender matemática es haciendo matemática.

LOS RAZONAMIENTOS EN EL AULA

Si recurrimos a un libro de lógica leeremos que un *razonamiento* consta de un conjunto de premisas y una conclusión. Para que un razonamiento sea válido es suficiente poder, a través del método deductivo, llegar de las premisas a la conclusión. No es la intención de este trabajo realizar un análisis estructural de proposiciones y razonamientos sino ver en que medida estos conceptos lógicos pueden ser trabajados en el aula a través de una gran diversidad de ejemplos que nos brinda la matemática.

Es importante observar como obtenemos en los ejemplos antes analizados deducciones que se apoyan en suposiciones que involucran las ideas de plano, número, etc. Fundamentar todos los elementos que conforman una deducción excede la posibilidad de un curso de nivel medio y muchas veces de algunos cursos de nivel superior no especializado.

Consideremos los siguientes razonamientos:

F es una función par. G es una función impar. Entonces G.F es una función impar.

F es una función par. G es una función impar. Entonces G + F es una función impar.

Para poder analizar la validez de cada uno de estos razonamientos es necesario que los alumnos tengan claras las ideas de función, paridad e imparidad. A partir de allí, podrán analizar ejemplos en cada uno de ellos para analizar la posibilidad de validez. Y luego, tomada una decisión sobre la validez del razonamiento, intentar una demostración o la exposición de un contraejemplo.

Los contraejemplos constituyen un medio muy útil para desarrollar en los alumnos la capacidad de trabajo matemático porque a partir de ellos es posible ir conociendo la naturaleza de los conceptos involucrados en el análisis. Es importante que comprendan que el hallazgo de un contraejemplo es suficiente para demostrar la falsedad de una proposición, mientras que para demostrar su veracidad, encontrar un ejemplo donde se verifique no es suficiente, es necesario realizar una demostración rigurosa, no obligatoriamente formal, de dicha propiedad.

COMO CONCLUSIÓN

La exposición anterior, lejos de ser un análisis sobre la naturaleza del razonamiento en matemática, es simplemente un espacio de reflexión para que cada uno de nosotros nos preguntemos en que medida la deducción matemática forma parte de nuestras clases. Pensar en ello nos permitirá replantear nuestras actividades y de esta manera lograr que nuestros alumnos puedan acercarse al método deductivo y por lo tanto a la naturaleza de la matemática.

BIBLIOGRAFÍA

APERY, Roger y otros (1998): *Pensar la matemática*. Tusquets, Barcelona.
COPI, Irving (1974): *Introducción a la Lógica*. EUDEBA, Buenos Aires.
HILBERT, David (1993): *Fundamentos de las Matemáticas*. Colección Mathesis. UNAM, México.
KLINE, Morris (1998): *Matemáticas. La pérdida de la certidumbre*. Siglo veintiuno Editores, México.
NEWMAN, James (1997): *SIGMA El mundo de las matemáticas*. Grijalbo, Barcelona.
QUINE, Willard (1993): *Los métodos de la lógica*. Planeta, Buenos Aires.
SMITH, Karl (1991): *Introducción a la Lógica Simbólica*. G. E. Iberoamérica, México.
TORANZOS, Fausto I.: *Introducción a la epistemología y fundamentación de la Matemática*. Espasa Calpe, Buenos Aires.