CUESTIONES ACERCA DE LA ALEATORIEDAD Y DE SU ENSEÑANZA

Enrique Fabián Valiño

Sólo confío en las cosas inciertas;
Sólo las cosas claras están para mí enlodadas;
No abrigo dudas salvo en la certeza,
Y por azar el conocimiento busco;
Y cuando gano todo, perdiendo me retiro
François Villon[1]

RESUMEN

Este artículo pretende mostrar las distintas concepciones de lo aleatorio que conviven en el contexto social cotidiano. Estas formas de concebir la aleatoriedad tienen un referente histórico y hoy en día se han convertido en ideas previas o preciencia de los alumnos. Se sugiere una propuesta didáctica que permita construir el concepto de aleatoriedad y el de función de variable aleatoria recurriendo a función parte entera y al empleo de calculadoras científicas no sofisticadas.

1. Introducción

Sin lugar a dudas fuimos protagonistas durante este siglo XX que finaliza de un sinnúmero de novedades, avances, cambios y por cierto, auténticas revoluciones. La matemática, con un discurso más amplio y renovado sirvió de herramienta y permitió explicar varios sucesos que originaron verdaderos puntos de inflexión en el desarrollo y la evolución científica. Así, con la aparición del teorema de Kurt Gödel (1906-1978) y todas sus implicancias en los fundamentos de la matemática, la teoría del caos que paradójicamente permite explicar el "cosmos", la geometría fractal que quiebra la idea de la concepción de entes geométricos con dimensión exclusivamente entera, los modelos de crecimiento biológico de poblaciones, la geometría de la convexidad, etc., la matemática se transformó en una fuente inagotable de nuevos desafíos.

Algunas de estas ideas se hicieron extensivas a la biología y a la física: el principio de incertidumbre introduce por primera vez en sistemas determinísticos como los físicos, la necesidad de introducir variables aleatorias; en termodinámica, como afirma Cerletti (1996) "*se produjeron profundos cambios a partir del estudio de los sistemas irreversibles alejados del equilibrio y las transformaciones no lineales. Las nuevas ideas sobre variaciones erráticas y la resignificación del caos se extendieron a la meteorología y de alguna forma, también a las ciencias sociales*".[2]

---

[1] "Ballade du Concours de Blois", The poems of François Villon (traducidos por H. B. McCaskie). Londres, Cresset Press, 1946, p. 212.

Todas estas cuestiones nos hacen reflexionar acerca de la importancia que ha cobrado todo aquello que podemos calificar de no determinista, es decir, de todos aquellos fenómenos en los que el azar desempeña un rol protagónico.

En los contenidos para la Educación General Básica y más específicamente dentro del bloque *Nociones de estadística y probabilidades*, figuran conceptos como el de fenómeno aleatorio, la asignación de probabilidad a un suceso, variables aleatorias y definición clásica de probabilidad, entre otros.

Cabe preguntarnos si los docentes planificamos correctamente las estrategias de enseñanza para que los alumnos puedan construir estos conceptos y más aún hasta qué punto podemos satisfacer las demandas de la sociedad en la transmisión de estos contenidos.

2. Las ambigüedades de lo aleatorio y su repercusión en las estructuras de aprendizaje de los alumnos

En la investigación realizada por Azcárate, Cardeñoso y Porlán[3] acerca de las concepciones previas en los docentes y los alumnos sobre la aleatoriedad, estos autores ponen de manifiesto que se suele considerar lo *aleatorio* como un concepto obvio. De hecho, muchos docentes nos sorprendemos cuando frente a determinadas preguntas relacionadas con fenómenos aleatorios los alumnos son capaces de dar respuestas atinadas: por ejemplo, reconocer que la probabilidad de conseguir "cara" al lanzar una moneda es 1 entre 2; identificar asimismo la probabilidad del suceso "salida de la cara marcada con dos puntos" al lanzar un dado normal como una 1 entre 6. Estas ideas previas que los alumnos manejan de lo aleatorio, muchas veces están cargadas de significados totalmente aprioristicos.

Es cierto que en situaciones a las que se apelan a juegos de azar los alumnos muestran convicción de la aleatoriedad de los sucesos implicados; sin embargo, basta con modificar ligeramente la situación para mostrarnos que sus estructuras aún no muestran una cabal comprensión del concepto.

Los autores antes mencionados dan cuenta de que por ejemplo muchos alumnos (incluso docentes) dudan acerca de la aleatoriedad de sucesos simples como arrojar una semilla a tierra y que germine, contraer en el plazo de los próximos dos meses una enfermedad o simplemente, que el próximo colectivo que llegue a la parada sea el que estoy esperando y no otro. En muchos casos y frente a indagaciones más profundas, asocian estos sucesos como deterministas; tal es el caso por ejemplo, de las condiciones del suelo para la germinación; el cuidado más o menos intensivo de nuestra salud (ligado a una cuestión de tipo causal o con explicaciones en función de determinados factores causales) o simplemente una simple razón como la *suerte* que no es justamente considerada como sinónimo de aleatorio sino de cuestiones subjetivas de concentración o de fuerza de voluntad.

Curiosamente, un americano llamado John Cohen (1964) pudo plasmar estas distintas formas de concebir lo aleatorio que se han sucedido a lo largo de la historia de la ciencia matemática desde el surgimiento de la teoría de las probabilidades y que han convivido en un mismo contexto muchas veces con un sentido reduccionista a lo relacionado con el azar.

---

[2] Alejandro Cerletti. Sistemas caóticos y azar: los límites de la ciencia moderna en "La ciencia y el imaginario social". Esther Díaz- ed- Buenos Aires, Biblos, 1996. pp. 81-82.

[3] P. Azcárate, J. M. Cardeñoso, R. Porlán. Concepciones de futuros profesores de primaria sobre la noción de aleatoriedad en Enseñanza de las Ciencias., 1998, 16(1). pp. 85-97.

Según este autor *"deben existir docenas de diferentes interpretaciones de la probabilidad defendidas por autoridades vivientes... y algunas* (autoridades) *sostienen que el concepto de probabilidad puede tener diferentes sentidos interpretativos en diferentes contextos"*[4]

Cohen distingue cuatro interpretaciones o concepciones de la probabilidad:

- La *clásica* que tuvo sus orígenes en las elaboraciones de los matemáticos Cardano y Pascal pero que aparece publicada en 1713 en la obra póstuma de Jacques Bernoulli: el *Ars Conjectandi*. *"Bernoulli define probabilidad de un resultado como la proporción de resultados igualmente probables"*[5]. Algunos autores como Savage llaman a este tipo de probabilidad "objetivista" puesto que *"...mide por una parte el acuerdo entre los resultados físicos que pueden repetirse y por otra los resultados de acontecimientos hipotéticos, matemáticamente definidos"*[6].
- La *necesaria*, asociada especialmente en Inglaterra a los nombres de Keynes y Jeffreys y en los Estados Unidos a Pierce. Desde este punto de vista *"la probabilidad no tiene directamente nada que ver con los acontecimientos o los resultados de los acontecimientos como tales, sino solamente con las declaraciones formuladas acerca de ellos; la probabilidad es definida como una relación lógica entre proposiciones"*[7]. Se le asocia una ventaja a esta probabilidad respecto de la clásica y es su predictividad en relación con hechos aislados. Por ejemplo cuando afirmamos *"probablemente tendremos una época de malas cosechas"* puede ser interpretada con la significación que un conjunto de hechos y circunstancias motivan a tal afirmación.
- La *estadística* que define a la probabilidad como *"la frecuencia relativa (o el límite de la frecuencia relativa) de una clase dada de acontecimientos dentro de un conjunto mayor de tales acontecimientos"*[8]. Debemos esta definición a Poisson (1837). Varios autores consideran a la probabilidad estadística como la única concepción legítima.
- La *subjetiva* que *"se refiere al estado de espíritu de alguien, a la certidumbre o incertidumbre de sus creencias... una medida de la confianza de un individuo en la verdad de una proposición particular"*[9]. Esta concepción se debe a Augustus de Morgan y posteriormente fue ampliada y corregida por Savage quien incluso, creó un sistema axiomático acerca de la probabilidad subjetiva o *personalista* como él mismo la denomina.

---

[4] John Cohen, Azar, habilidad y suerte. Buenos Aires, Compañía General Fabril Editora S.A., 1964. pp. 27-29.

[5] John Cohen. Op. cit.

[6] L. J. Savage, The Foundations of Statistics, citado por J. Cohen; op. cit.

[7] J. M. Keynes, A Teatrise on Probability- H. Jeffreys, Scientifics Inference , citados por J. Cohen; op. cit.

[8] J. Cohen, op. cit.

[9] J. Cohen, op. cit.

Estas concepciones (algunas hasta parecen descontextualizadas) convivieron y conviven en el marco de lo aleatorio. Por ello es que podemos entender las diversas interpretaciones que los alumnos tienen de la aleatoriedad.

Pero aún después de considerar todo este abanico de concepciones nos queda todavía por prever la relación funcional de la probabilidad en donde el concepto de variable independiente adquiere una significación totalmente diferente dado que no puede asignarse "cualquier" valor; es decir, la naturaleza funcional que se pone en juego es totalmente distinta de lo que hasta el momento se venía tratando en el contenido de funciones. Veamos entonces qué propuesta didáctica podemos plantear para tener en cuenta todas estas especificaciones haciendo uso de herramientas que se encuentran prácticamente al alcance de todos los alumnos o al menos de todos los docentes como es una calculadora sencilla.

3. Simulando una función de variable aleatoria

La pregunta es entonces ¿cómo simular una situación en donde se vea claramente el empleo de la aleatoriedad para generar una función de probabilidad? O más simple aún ¿cómo asociar a un suceso aleatorio una determinada probabilidad?

Para responder a estas preguntas recurriremos al uso de un tipo especial de función que es la llamada *función parte entera* que asigna a cada valor real de la variable el mayor entero menor o igual que el valor considerado[10]. Esta función se simboliza por $[x]$. Así, por ejemplo:

$$[2{,}56] = 2\ ;\ \ [0{,}007] = 0\ ;\ [8] = 8\ ;\ [-1{,}2] = -2\ ;\ [\pi] = 3\ ;\ [-e] = -3$$

La gráfica de esta función es la "escalera" que presenta saltos de discontinuidad en los puntos en los que la variable asume valores enteros. Con este sencillo conocimiento previo, basta ahora introducir el concepto de número aleatorio o número al azar para lo cual se hará uso de la tecla RND[11] que figura en cualquier calculadora científica no demasiado sofisticada.

Cuando accionamos esta tecla aparece en el visor de la calculadora un número aleatorio α, tal que $0 \leq \alpha < 1$. El número generalmente se presenta con tres decimales o cuatro decimales dependiendo del modelo de calculadora. Nótese que en estas circunstancias, el mayor número aleatorio que puede aparecer en la pantalla es 0,999 lo cual no significa que sea "el número anterior a 1"; hacemos esta aclaración porque esta duda ha surgido en la mayoría de los cursos en los que se ha experimentado esta propuesta.

Nos resta entonces utilizar ambas: la función parte entera por un lado y los números al azar generados por la calculadora para simular la mayoría de los juegos de azar con los que comúnmente están familiarizados nuestros alumnos.

En lo que sigue adoptaremos la notación *rnd(x)* para designar al número aleatorio. ¿Cómo transformar *rnd(x)* en el suceso "salida de una determinada cara del dado"? Muy sencillo si hacemos el siguiente razonamiento:

$$0 \leq rnd(x) < 1$$

---

[10] Tom M. Apostol, *Calculus*- Volumen I. Buenos Aires, Reverté Argentina S.A., 1967, p. 78

[11] RND es abreviatura de la palabra inglesa *random* que significa azar, aleatorio.

Al multiplicar por 6 la desigualdad anterior obtenemos números que verifican:

$$0 \leq 6.\ rnd(x) < 6$$

O más precisamente $\quad 0 \leq 6.\ rnd(x) \leq 5{,}994$

Si consideramos la parte entera de cada uno de los miembros de la doble desigualdad obtenemos:

$$[0] \leq [6.rnd(x)] \leq [5{,}994]$$ [12]

O sea:

$$0 \leq [6.rnd(x)] \leq 5$$

Es decir, vamos a obtener cualquiera de los enteros 0, 1, 2, 3, 4 ó 5. Obviamente para poder simular un dado, basta con sumar 1 a cada miembro de la doble desigualdad:

Con lo cual:

$$1 \leq [6.rnd(x)] + 1 \leq 6$$

De esta manera, asociamos a cada *rnd(x)* la salida de una de las seis caras del dado. Simular 100 tiradas de un dado se reduce a presionar 100 veces la tecla RND de la calculadora y realizar unos sencillos cálculos matemáticos. Queda muy claro la correspondencia biunívoca establecida entre cada número aleatorio y cualquiera de las representaciones numéricas de las caras de un dado.

A modo de ejemplo extractamos los resultados obtenidos al emplear esta función definida como $f(rnd(x)) = [6.rnd(x)] + 1$ en la siguiente tabla de frecuencias absolutas y relativas en donde se han simulado 100 tiradas de un dado:

f(*rnd(x)*)	1	2	3	4	5	6
Frecuencia	20	21	14	13	17	15
Frecuencia relativa	0,20	0,21	0,14	0,13	0,17	0,15

Si calculamos la media aritmética de estos datos comprobamos que es igual a 3,31 y el desvío standard es de 1,753 con cuatro cifras significativas corregidas. En una situación ideal deberíamos obtener 3,5 como media aritmética con un desvío standard de 1,708 con cuatro cifras significativas corregidas lo cual parece bastante aproximado dado el número de repeticiones del suceso. Asimismo la frecuencia relativa esperada de cada uno de los sucesos es de 0,1666...

Se hace necesario aquí hacer notar que a medida que consideramos más repeticiones del suceso, más nos acercamos a estos valores teóricos. Por otra parte, si hay más de una calculadora en el curso, es sencillo contabilizar todas las frecuencias absolutas obtenidas individualmente y calcular la media aritmética general. Del mismo modo puede hacerse notar que las frecuencias relativas tienden a estabilizarse alrededor del valor esperado 0,1666... a medida que se repite el experimento un mayor número de veces.

Este procedimiento, con ligeras modificaciones puede hacerse extensivo por ejemplo a la simulación de un tiro de ruleta. Como en este juego se pueden obtener números enteros comprendidos entre 0 y 36 bastará calcular:

$$f(rnd(x)) = [37.rnd(x)]$$

Puesto que $\quad 0 \leq rnd(x) < 1$

Es decir $\quad 0 \leq 37.\ rnd(x) < 37$

---

[12] Si la calculadora brinda números aleatorios con cuatro decimales se obtendrá [5,9994].

Utilizando la función parte entera obtenemos:

$$[0] \leq [37.\, rnd(x_i)] < [37]$$

Con lo cual $$0 \leq [37.\, rnd(x_i)] < 37$$

Como se aprecia, este recurso es una fuente inagotable de situaciones en las que interviene el azar. Sin embargo, Azcárate *et. al.* dan cuenta de otro obstáculo en relación con la aleatoriedad: la reducción de lo aleatorio a lo meramente *equiprobable*, es decir los alumnos "*se apoyan en criterios de igual posibilidad entre los posibles resultados del fenómeno para caracterizarlo*"[13]. Hasta el momento todas las situaciones aquí modelizadas responden a esta problemática puesto que existe equiprobabilidad tanto en el lanzamiento de un dado normal cuanto en la tirada de una ruleta (supuestos dado y ruleta sin alteraciones que vicien los resultados).

Con una tirada de dados podemos rápidamente caracterizar un suceso no equiprobable. Sea por ejemplo arrojar dos dados normales y calcular la suma de las representaciones numéricas de las caras. Rápidamente los alumnos determinan que el espacio muestral está formado por los números naturales 2, 3, 4, ..., 12. Sin embargo, el suceso "suma 2" no es equiprobable al suceso "suma 7" con lo cual no puede reducirse el cálculo de probabilidades a la asignación de $\frac{1}{11}$ para cada uno de ellos. Será suficiente entonces considerar una función de variable aleatoria que asigne a cada par de números aleatorios la suma de las representaciones numéricas de las caras de dos dados normales. Notamos que si sumamos las posibles imágenes de la función f para cada par de números aleatorios obtenemos:

$$1 \leq [6.rnd(x_i)] + 1 \leq 6$$
$$1 \leq [6.rnd(y_i)] + 1 \leq 6$$

Sumando miembro a miembro ambas desigualdades tenemos que:

$$2 \leq [6.rnd(x_i)] + [6.rnd(y_i)] + 2 \leq 12$$

De este modo, es posible asignar frecuencias absolutas y relativas a un suceso no equiprobable. Es necesario comprender que el proceso no puede reducirse a multiplicar por dos el número aleatorio y después sumar dos pues no tendríamos en cuenta la independencia de los sucesos; recordemos que arrojar dos dados y sumar las representaciones numéricas de sus caras es equivalente a tirar un dado y luego otro y por fin sumar ambos resultados.

4. Algunas conclusiones y sugerencias para los docentes

Varios son, sin duda, los obstáculos que se nos presentan cuando planificamos las estrategias de enseñanza de un contenido tan cargado de significación cual es el de aleatoriedad. Por un lado, contamos con un arsenal de ideas previas que los alumnos tienen al respecto: una noción de probabilidad débil exclusivamente asociada a juegos de azar simples y/o a sucesos equiprobables, una confusión entre aleatoriedad y suerte pensada como una noción de tipo subjetiva donde una mayor o menor convicción o predisposición condicionan la ocurrencia o no ocurrencia de un determinado suceso, una reducción determinista de fenómenos claramente aleatorios como pueden ser contraer una

---

[13] P. Azcárate *et. al.* op. cit.

gripe, que el día 14 de mayo de 2007 sea lluvioso o que una semilla plantada germine o no. Por otro lado, en la tendencia de asimilar rápidamente a las probabilidades como una relación funcional más, dentro de los contenidos de funciones sugeridos por los Contenidos Básicos Comunes para la Educación General Básica, hace que se desdibuje la verdadera esencia de una función de variable independiente aleatoria.

Para asegurarnos de la confiabilidad de los resultados obtenidos al simular estos procesos se sugiere a los docentes que lleven a cabo una simple prueba de chi-cuadrado con cinco grados de libertad (para el caso del lanzamiento de un dado normal) y con un nivel de significación del 1% o del 5%.

Es necesario tomar conciencia de la importancia que reviste el concepto de aleatoriedad tanto por sus múltiples vinculaciones con cuestiones meramente matemáticas cuanto por sus implicancias con la física, la meteorología, la biología y la tecnología que recurre a los sistemas caóticos para explicar el funcionamiento de artefactos cotidianos como una máquina lavarropas o un lavavajillas.

No podemos tampoco ignorar la repercusión que tienen en la sociedad actual y cada día con un mayor número de adeptos, los juegos de azar donde se ponen en juego elevadas sumas de dinero que apelan nada más que a un engaño general prometiendo prácticamente lo imposible. Basta solamente realizar un simple cálculo de probabilidades para cerciorarse de lo inalcanzable de esas metas quiméricas. Como parte de los contenidos actitudinales esta conciencia de falsa expectativa y de logros azarosos muy improbables contribuyen a formar individuos pensantes capaces de distinguir entre la verdad y las meras artimañas de individuos inescrupulosos.

5. Bibliografía

- APOSTOL, T.: Calculus Volumen 1-*Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal*. Reverté Buenos Aires, Argentina, 1967.
- AZCÁRATE, P., CARDEÑOSO, J. M., PORLÁN, R.: *Concepciones de futuros profesores de primaria sobre la noción de aleatoriedad* en *Enseñanza de las Ciencias*, 1998, 16 (1), 85-87.
- COHEN, J.: *Azar, habilidad y suerte*. Compañía General Fabril Editora S.A., Buenos Aires, 1964.
- JEFFREYS, H.: *Scientifics Inference*. Londres, Cambridge University Press, segunda edición, 1957.
- KEYNES, J. M.: *Teatrise on Probability*. Londres, Macmillan, 1921.
- SAVAGE, L. J.: *The Foundations of Statistics*. Chapman & Hail, Londres, 1959.
- LEY FEDERAL DE EDUCACIÓN. CONTENIDOS BÁSICOS COMUNES. MÓDULO 0. La Plata, Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires, 1995.