LA MULTIPLICACIÓN Y SU INVERSA, LA DIVISIÓN

Lidia Vicente

> **"...La profesión de la enseñanza requiere tanta o mayor preparación como ninguna otra. A la idoneidad individual del maestro ha de añadirse la serie de conocimientos adquiridos y los resultados averiguadosya, si no se quiere que cada maestro invente el arte de enseñar y lo deje morir con él, para renacer de nuevo con el que le sucede..."**
> **D.F.Sarmiento - La Educación Popular**

I - Introducción

Tomamos este tema desde el Nivel Inicial y en el Primer Ciclo de la E.G.B. y, en consecuencia, en la construcción de las nociones elementales, pero también en el marco de una **Educación Matemática Para Todos** en este período de la enseñanza obligatoria.

En nuestras reuniones con docentes, éstos nos manifiestan la dificultad que encuentran en el tratamiento de este contenido y lo difícil que resulta para los alumnos, en particular, la división. En realidad, cuando hablan de este tema tanto los alumnos, como los padres, y también los docentes, se están refiriendo a las técnicas operatorias. En efecto, la enseñanza de los números en la escuela elemental está más centrada sobre los aprendizajes relativos a las escrituras y a las técnicas operatorias que sobre el sentido del número y de las operaciones.

Un contenido fundamental de la matemática y de la educación en la matemática es el número natural. El niño va a tomar contacto con el mismo en la escuela a través de la constitución de un sistema de numeración, de las dos operaciones fundamentales (y de sus inversas) y de sus propiedades. De esta manera va a constituir un modelo de un conjunto numérico esencial que podrá extender a otros conjuntos numéricos a medida que avance en su escolaridad. Consideramos, en consecuencia, que es un tema que hay que tomar con cuidado desde los primeros años de la escolaridad.

Mostraremos en esta ocasión algunos trabajos realizados sobre la multiplicación y la división entera con alumnos de cinco a nueve años.

¿En qué corrientes didácticas ubicamos el trabajo?

Hay grandes cambios en la Educación y, en particular, en la Educación Matemática. Esos cambios abarcan contenidos, formas de presentarlos, de trabajarlos, la concepción misma de la matemática, el rol docente, etc. Expresamos algunas ideas:

- **La matemática es un proceso continuo de formulación y resolución de problemas**

¿Cómo influye esta concepción de la matemática en su enseñanza?

La enseñanza anterior estaba basada en que había un saber acabado a transmitir y como tal se divide en dificultades que se van presentando progresivamente y son controladas por ejercicios de aplicación.

Hoy la idea es otra: la matemática surge como respuestas a problemas que el hombre se plantea. El conocimiento surge, entonces, funcionando en situaciones, al principio muy borroso, poco a poco va evolucionando y, en un largo proceso, va tomando formas más nítidas, más precisas y más simples.

La idea, es hoy, llevar el quehacer matemático al aula. **Hacer matemática es resolver problemas y de esta actividad humana pueden participar todos los alumnos.**

- **"La unidad de las ideas de la matemática actual** hace que éstas sean más didácticas al ser más claras y, en consecuencia, las matemáticas escolares resultan más accesibles. El alumno debe poder apreciar esa unidad del pensamiento permitiendo integrar contenidos y hacer nuevos desarrollos."P. Abellanas-Univ. Madrid.
- **"La necesidad de distinguir el carácter útil del de objeto matemático, éste último toma sentido por el carácter útil de su origen"** Régine Douady - Univ. Paris.
- **"El conocimiento surge en un amplio recorte del saber, en un espacio de problemas, en un campo conceptual"** G.Vergnaud - Univ. Paris.
- **La construcción colectiva del conocimiento en la interacción social y la importancia del trabajo en grupo** - Escuela de Ginebra.
- Los aportes de la psicología cognitiva, **el sujeto forma sus conocimientos en interacción con el objeto de conocimiento. El factor fundamental del desarrollo cognitivo es la equilibración que produce un sistema de conocimientos en oposición a la acumulación de los mismos** - J. Piaget.

¿Sobre qué ideas matemáticas organizamos la propuesta didáctica?

Leemos en Análisis Matemático-Rey Pastor "...la Aritmética, la parte más abstracta y por tanto la más pura de la Matemática inspira sus definiciones en el mundo real. Sus operaciones serán la expresión abstracta de las operaciones de la Naturaleza....Si **a**,**b**, **c**, son los números que corresponden a los conjuntos A,B,C, la operación aritmética representativa de esta operación entre conjuntos consiste en obtener el resultado **c** conocidos los datos **a** y **b**. La operación que permite calcular **b** conocidos **c** y **a** se llama operación inversa de la anterior. Cada operación aritmética da origen a dos operaciones inversas las cuales son una misma si **a** y **b** desempeñan el mismo papel, entonces se dice que esta operación es conmutativa pues el mismo resultado se obtiene operando **a**.**b** o **b**.**a** .

La reproducción y la yuxtaposición, las dos operaciones fundamentales de la naturaleza, o sea la composición y agregación de conjuntos dan origen por abstracción a las dos operaciones fundamentales de la Aritmética, la multiplicación y la adición de números con sus inversas la división y la sustracción."

Nos centraremos en la operación multiplicación y su inversa la división.

En el camino arriba expresado privilegiamos la introducción de la multiplicación tomando como base el producto cartesiano de dos conjuntos: Sean **A** y **B** dos conjuntos representantes de los números **a** y **b**. Efectuando el producto **AxB**, se obtiene un nuevo conjunto cuyo número natural se llamará producto de **a** por **b** y se escribirá **a.b**. Esta operación se llama **multiplicación.**

El problema de hallar un número **x** tal que **x.a=b** cuando **a** y **b** son números naturales, se llama división exacta. La división es posible cuando **b** es múltiplo de **a** .

No siendo posible resolver la ecuación **x.a=b** se trata de hallar dos números naturales consecutivos **c** y **c+1** que multiplicados por **a** verifiquen:

a.c < b < a.(c+1) donde **c** es el cociente entero entre **b** y **a**, y el resto es la diferencia **r=b-a.c**

Las relaciones fundamentales de la división entera (incluyendo la exacta cuando el resto es 0) son en consecuencia:

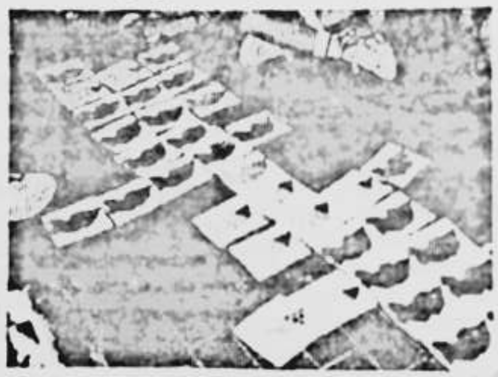
b=a.c+r y 0<r<a

La definición de división como inversa de la multiplicación se extiende a otros conjuntos numéricos y se cierra en el conjunto **Q** de los racionales para cualquier par de elementos donde el segundo sea distinto de cero y, en consecuencia, la ecuación $b = x.a$ donde $x = b : a$ y se verifica que $b = (b:a).a$

II - Propuesta didáctica y respuestas de los alumnos con informes de los docentes

1 - Preescolar y 1° Año E.G.B. (5 - 6 años)

A través de un juego con 42 cartas (figuras de payasos con gorros de 7 colores diferentes dónde para cada color de gorro hay 6 payasos con moños de fantasías distintas) los niños van resolviendo problemas para ordenar el conjunto por un parecido entre las cartas, primero en línea haciendo "trenes" y luego colocando "los vecinos" arriba, abajo, a la derecha, a la izquierda, también por un parecido. Ante la necesidad de no dejar huecos llegan a ordenar el conjunto con dos criterios (color de gorro y fantasía del moño). Distintos juegos son organizados a partir de la ordenación del conjunto.



2 - 2° Año E.G.B. (7 años)

En 2° Año le proponemos como problema armar chinitos que tengan, por ejemplo, 4 colores de caras y para cada cara tiene que haber chinitos con 5 sombreros de telas diferentes. No puede haber dos chinitos iguales, ¿cuántos chinitos diferentes pueden armar? ¿Cómo nos damos cuenta que no falta alguno? Esta situación desemboca en la representación gráfica de la multiplicación, en la utilización del signo x y en el cálculo de 5 x 4 o 4 x 5.
Esta representación se complementa con la de diagrama de árbol.

"Hay 5 mamás-mono y cada mamá tiene 3 monitos. ¿Cuántos monitos hay?"
Dibujo y explico.

El sentido de la multiplicación y su representación gráfica proporcionan al alumno un instrumento para calcular cualquier multiplicación y para desarrollar estrategias para el cálculo, en particular va a aparecer la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma y las escrituras mixtas correspondientes.

3 - 3° Año E.G.B. (8-9 años)

En el 3° Año , además de continuar con la multiplicación y las técnicas operatorias construidas a partir de la representación gráfica de la multiplicación, se introduce la división entera.

Con ese fin proponemos una situación dónde al variar cierta cantidad, y volcar los resultados en una tabla, aparecen regularidades que expresadas por una escritura matemática constituyen las relaciones fundamentales de la división entera.

Propuesta didáctica:

Todas las tardes, un quintero recoge huevos. En su casa prepara paquetes: 1 paquete por cada seis huevos. Debe hacer todos los paquetes posibles.

Un día recoge 28, otro 20, otro 30, etc.

Como es una persona ordenada, registra lo que hace:

Con 28 huevos puede hacer 4 paquetes, porque 6x4=24 y sobran 4.

Con 20 huevos son 3 los paquetes, porque 6x3<20 y 4 no, porque 6x4>20..

1	2	3	4	5	6	7	8	9	x 6
6	12	18	24	30	36	42	48	54	

Con 20 huevos, hacemos 3 paquetes y sobran 2, pues (6x3) + 2 = 20

HACEMOS PAQUETES

NÚMEROS DE HUEVOS	PAQUETES DE 6 HUEVOS	HUEVOS QUE SOBRAN
13	2	1 13=(2x6)+1
16	2	4 16=(2x6)+4
28	4	4 28=(4x6)+4
30	5	0 30=(5x6)+0
35	5	5 35=(5x6)+5
36	6	0 36=(6x6)+0
40	6	4 40=(6x6)+4
42	7	0 42=(7x6)+0
46	7	3 45=(7x6)+3
48	8	0 48=(8x6)+0
52	8	4 52=(8x6)+4
54	9	0 54=(9x6)+[illegible]

III - Reflexiones finales

Nuestras apreciaciones se apoyan fundamentalmente en el trabajo experimental realizado con alumnos de escuelas de distinto nivel socio-económico de la Provincia de Buenos Aires como parte del trabajo de investigación en didáctica de la matemática.

La división como inversa de la multiplicación no sólo da unidad a este concepto en los distintos campos numéricos sino que lo hace más claro y sencillo para el alumno y, en particular, le permite su uso como una herramienta potente para la construcción de los algoritmos correspondientes.

Las ideas claras y la unidad de las mismas permiten actuar a todos los alumnos, crear instrumentos que al principio serán rudimentarios y complejos para hacerse poco a poco más simples, más útiles. Es en ese proceso de resolución de problemas que va de lo complejo a lo simple donde reside el verdadero valor educativo de la enseñanza de la matemática y, a esa educación matemática pueden acceder todos los alumnos.

Seguir el pensamiento del alumno no es siempre fácil pero sí apasionante.

Hemos mostrado algunas respuestas de niños que nos fueron proporcionadas por los docentes que participaron de la investigación, que adoptaron la actitud de preguntar a sus alumnos cómo habían realizado el trabajo y que volvían a preguntar ante nuestra insistencia para entender lo que habían hecho. Partíamos del principio de que si lo habían hecho debía haber una coherencia que se nos escapaba por el lenguaje que usaban.

Pensamos que es importante para el docente descubrir la capacidad que para hacer matemática tienen todos los alumnos y respetar, así, los procedimientos que ellos proponen por complejos que nos resulten pero que, sin embargo, son claros para ellos. Esto nos deberá llevar a pensar en la dificultad de repetir un método ideado por otro por simple y claro que le parezca al autor y, también, en la discriminación que se hace sobre algunos alumnos al descalificarlos para la actividad matemática subestimando su capacidad.

Los trabajos presentados podrán, tal vez, parecer muy abstractos para los alumnos en una concepción pedagógica corriente. No es así, en el trabajo experimental que llevamos a cabo, todos los alumnos trabajan con gran interés y motivados por el mismo quehacer matemático. Pensamos que la matemática no es difícil por ser abstracta sino por carecer de significado, de sentido para el alumno.

NOTA:

Este trabajo se basa en experiencias llevadas a cabo por el Grupo de estudio de Didáctica de la Matemática de Lomas de Zamora (provincia de Buenos Aires)