PROBLEMAS, SOFTWARE Y GUÍA DE ESTUDIO. TODO PARA ESTUDIAR SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Autores: Engler, A., Vrancken, S., Müller, D. Hecklein, M., y Cadoche, L.
Institución: Facultad de Ciencia Agrarias - Universidad Nacional del Litoral
Nivel: Medio - Polimodal - Terciario - Universitario

Muchos fenómenos naturales y sociales se comportan con una relación lineal o por lo menos aproximadamente y se tratan como lineales con la finalidad de facilitar su estudio. Esto hace que el tema Sistemas de Ecuaciones Lineales tenga múltiples aplicaciones en fenómenos de este tipo y de ahí la importancia. La preocupación por optimizar el proceso de enseñanza y aprendizaje es un denominador común del personal de nuestra cátedra. En la búsqueda de alternativas para mejorar la calidad de la enseñanza el ordenador se convirtió en una herramienta didáctica. Mediante la incorporación de medios informáticos en la educación se pueden abordar e investigar temas propiciando el afianzamiento y/o aprendizaje de conocimientos. Dado que tratamos de diseñar métodos activos de enseñanza que estimulen la participación y compromiso de docentes y alumnos tendientes a favorecer el desarrollo de actitudes positivas hacia la matemática, para el desarrollo del tema Sistemas de Ecuaciones Lineales, en la cátedra Matemática Básica de la carrera Ingeniería Agronómica de la Facultad de Ciencias Agrarias de la Universidad Nacional del Litoral implementamos un modelo que incorpora la resolución de problemas, una guía de estudio y el recurso informático como motivadores del aprendizaje. Tratamos de elaborar un material adecuado a nuestras necesidades, que pueda servir de apoyo a las clases compartidas con el profesor y sus compañeros o bien que le permita al alumno estudiar solo. La enseñanza se abordó a través de la necesidad de resolver problemas en el área de las ciencias naturales y sociales. Se confeccionó una guía de estudio que, con la ayuda de un software elaborado especialmente, permite al alumno aprender de manera autónoma los contenidos básicos. A medida que necesita resolver problemas interrelaciona la teoría y su aplicación práctica, se familiariza con métodos, procedimientos, formas y reglas prácticas de trabajo, aplica la información adquirida en sus propios desarrollos, trata de lograr su propio modelo de aprender, y valorar y aprender a distinguir lo fundamental de lo accesorio.

REFERIDO AL SOFTWARE ...

Diseñamos y elaboramos un programa educativo en Visual Basic bajo entorno Windows de apoyo para la enseñanza del tema "SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES".

ESTRUCTURA DEL PROGRAMA

Luego de la presentación el alumno ingresa a una pantalla inicial que presenta cuatro opciones:

1- Aspectos teóricos
2- Interpretación Geométrica
3- Métodos de Resolución
4- Resolución de Sistemas

Las cuatro opciones son independientes pudiendo el usuario ingresar a cualquiera de ellas, una o más veces, de acuerdo a lo que le interese en ese momento estudiar.

1- **Aspectos Teóricos:** en esta pantalla se presentan distintos ítems: qué son los distintos sistemas de ecuaciones lineales, para qué sirven, qué significa resolver un sistema, cómo se clasifican y métodos de resolución. Al elegir cualquiera de ellos el alumno accede a una o más páginas con contenidos teóricos, alternadas algunas de ellas con ejemplos y ejercicios.

2- **Interpretación Geométrica:** esta sección se refiere a la resolución gráfica de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas. Se incluyen tres aspectos:

- Teoría: se presentan las definiciones, propiedades, gráficos para que el alumno adquiera los conocimientos necesarios sobre este tema.
- Práctica: el alumno, orientado por el programa, va resolviendo ejercicios prácticos. A medida que resuelve aparecen mensajes de error y/o de aceptación que le permiten seguir avanzando o no.
- Aplicaciones: ejercicios y problemas relacionados con la interpretación geométrica de un sistema presentados para que el alumno realice solo y luego compruebe los resultados.

3- **Métodos de Resolución:** explica y ejemplifica el método de resolución de Gauss.

4- **Resolución de Sistemas:** un utilitario que permite resolver sistemas de hasta cinco ecuaciones y cinco incógnitas en forma automática. El alumno ingresa los datos y, luego de ser confirmados, la máquina los procesa y da los resultados en forma inmediata.

CON REFERENCIA A LA GUÍA DE ESTUDIO... *(incluimos solo una parte a modo de ejemplo)*

Si recorres el software que te presentamos serás capaz de encontrar respuesta a todos los interrogantes que aparecen a continuación. Adelante con el trabajo y no olvides que tu docente guía está para ayudarte en lo que necesites. Recuerda que puedes debatir, discutir e intercambiar ideas con tu compañero de trabajo a fin de que esta experiencia resulte más enriquecedora.

1) Clasifica los siguientes sistemas de acuerdo al número de ecuaciones y de incógnitas y a los términos

a) $\begin{cases} x-3y=0 \\ 2x+y=0 \\ x+2y=0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x+4y=-1 \\ -\frac{1}{2}x+y=0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+3z=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$

2) Dado el siguiente sistema, verifica que su solución es (1,1,1). Clasifícalo.

$$\begin{cases} -2x+y+z=0 \\ 3y+z=4 \\ 2x-z=1 \end{cases}$$

3) Los sistemas de ecuaciones dados en cada ítem son equivalentes. Determina cuál es la razón.

a) $\begin{cases} 2x+4y=10 \\ x+y=3 \end{cases}$ $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x+2y=6 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x-y=2 \\ 2x-3y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x-y=2 \\ 3x-4y=3 \end{cases}$

4) Escribe un sistema equivalente a cada uno de los dados a continuación. Justifica por qué los son.

a) $\begin{cases} x+2y=9 \\ 3x-y=-1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ x-y+z=0 \\ y+z=-4 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x-3y=9 \\ 2y+z=-5 \\ x+y-2z=-5 \end{cases}$

5) Resuelve el siguiente sistema: $\begin{cases} 2x-y=4 \\ x+y=5 \end{cases}$

a) Añade una tercera ecuación de modo que el sistema siga siendo compatible.
b) Añade una tercera ecuación de modo que sea incompatible. Interpreta geométricamente cada caso.

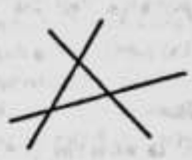
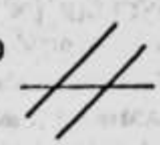
6) Determina para qué valores de t y u el sistema: $\begin{cases} 3x-2y+z=t \\ 5x-8y+9z=3 \\ 2x+y+uz=-1 \end{cases}$

a) tiene solución única. **b) no tiene solución.** **c) tiene más de una solución.**

7) Clasifica y resuelve los sistemas:

a) $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2}y \\ 6x + y = 2 + z \\ y + 2x = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} (x+1)(y+2) - x.(y+1) = z - 4 \\ \dfrac{x-1}{2} - \dfrac{y+1}{4} + \dfrac{z+1}{6} = -\dfrac{1}{4} \\ x - y = z.(z-1) - z^2 \end{cases}$

8) Escribe un sistema de ecuaciones que se adapte a cada una de las siguientes situaciones definidas gráficamente.
¿Cómo serán sus soluciones? Justifica sin resolver los sistemas.

a)  **b)**  **c)** 

Teniendo en cuenta lo que has aprendido al recorrer el programa en forma completa, selecciona la respuesta correcta. Consulta el software todas las veces que lo necesites. No dudes en llamar a tu docente guía ante cualquier duda. *(incluimos solo una parte a modo de ejemplo)*

1) Un sistema de 3 ecuaciones y 4 incógnitas se resuelve por el método de eliminación de Gauss y se obtiene la matriz ampliada.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \end{array}\right]$$

Por lo tanto el sistema dado es:

a) Incompatible **b)** Compatible determinado **c)** Compatible indeterminado

2) Un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas se resuelve por el método de eliminación de Gauss y se obtiene un sistema equivalente tal que la matriz ampliada es: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right]$. La solucion del sistema dado es la terna.

a) (1,2,-1) **b)** (1,1,-2) **c)** (3,-4,2) **d)** (-1,1,-1)

CON REFERENCIA A LOS PROBLEMAS DE APLICACIÓN... *(incluimos solo una parte a modo de ejemplo)*

Un problema es una situación que encierra una duda cuya respuesta desconocida se puede hallar. El proceso de resolución de problemas requiere capacidad de transferir experiencias pasadas a situaciones nuevas, para los cual es necesario a) analizar la nueva situación, b) determinar relaciones, c) seleccionar, entre los principios y conceptos conocidos, aquellos que sirven para resolverla y d) aplicar convenientemente estos principios. Recuerda que, para resolver un problema, debes tener en cuenta las siguientes etapas:

- **COMPRENDER el problema: establecer incógnitas, datos, saber distinguir lo importante de lo superfluo.**
- **CONCEBIR UN PLAN: que permita, con los recursos a mi disposición, encontrar la solución al problema.**
- **EJECUTAR el plan**
- **EXAMINAR la solución obtenida.**
- **ELABORAR CONCLUSIONES: la solución que se acepta o rechaza permite llegar a una conclusión, la que resuelve el problema y determina el comienzo de una nueva investigación.**

No olvides en este trabajo de utilizar todo lo que has estudiado en matrices para que los datos que aparecen en el problema se visualicen con más comodidad. Como siempre, estamos para ayudarte. No dudes en llamarnos. Adelante y a trabajar...

1) María, estudiante de primer año de Ingeniería Agronómica obtuvo 250 puntos en total después de tres exámenes parciales. Además de estar contenta porque logró su objetivo de promocionar la asignatura estaba muy conforme dado que su profesora le manifestó que, si bien la primera calificación excedió a la segunda en dos puntos, la tercera, a pesar de ser el parcial más difícil, superó a la primera en 6 puntos. Si bien no le informaron cuál fue la nota de cada examen parcial, ella esta tratando de averiguarlo. ¿Puedes ayudarla?.

2) Un médico ordena a un paciente tomar 10 unidades de vitamina A, 9 unidades de vitamina D, y 19 unidades de vitamina E, cada día. El paciente puede elegir entre las tres marcas de pastillas de vitaminas. La marca X contiene 2 unidades de vitamina A, 3 unidades de D y 5 unidades de E, la marca Y tiene 1, 3 y 4 unidades, respectivamente; y la marca Z tiene 1 unidad de vitamina A, ninguna de vitamina D y 1 de vitamina E.

a) Determina todas las combinaciones posibles de pastillas que proporcionarían exactamente las cantidades requeridas de vitaminas.

b) Si la marca X cuesta un centavo por pastilla, la marca Y 6 centavos, y la Z, 3 centavos, ¿existe alguna de las combinaciones de la parte a) que cueste 15 centavos diarios?

c) ¿Cuál de estas combinaciones es menos costosa?. ¿Y la más costosa?

3) Una compañía que trabaja agroquímicos tiene 100 empleados. Algunos empleados ganan \$4 por hora, otros \$5 y el resto \$8. El número de empleados que gana \$8 es la mitad del número de empleados que gana \$5. Si el total pagado de jornales por hora es \$544, encuentra el número de empleados que gana \$4, \$5 y \$8 respectivamente.

Presta atención en el problema enunciado a continuación. ¿Tiene las mismas características que los tratados hasta este momento? Discute con tu compañero y trata de resolverlo. Resultaría muy interesante que escribieras alguna conclusión.

En economía se definen "funciones de demanda" que describen, para una determinada mercadería, la relación existente entre la cantidad de la mercadería demandada y alguna otra variable que puede ser precio, gastos, precio de otras mercaderías, tiempo, etc.. También quedan definidas las "funciones de oferta" que describen la relación entre la cantidad de mercadería ofrecida y otra variable que podría ser precio, , tiempo, precio de otras mercaderías, etc.. Si se supone que existe competencia pura, es decir que ningún producto o consumidor puede influir individualmente sobre, por ejemplo, los precios del mercado, se dice que se alcanzó el equilibrio del mercado cuando la cantidad ofrecida de una mercadería coincide con la cantidad demandada. Por ejemplo si la función dada por la ley $(p + 10)\ (x + 20) = 400$ representa la cantidad de unidades demandadas (x) en función de su precio (p) y $x - 2p + 7 = 0$ representa la cantidad de mercadería ofrecida (x) según su precio p Encuentra cuál sería el número de unidades y el precio para estar en estado de equilibrio.

CONSIDERACIONES FINALES.

Los alumnos pueden trabajar directamente con este material, sin tener conocimientos previos del tema Sistemas de Ecuaciones Lineales. Por lo evaluado cualitativamente en el desarrollo de las actividades de Matemática Básica se logra desarrollar a través de un material serio pero atrayente y entretenido la capacidad creadora del alumno, en un ambiente de espontaneidad, intuición, autodeterminación que favorece el cambio de sus actitudes hacia la matemática y un aprendizaje realmente significativo. Recomendamos además tener este material como apoyo de otras actividades organizadas en relación a la enseñanza de este contenido tan importante. Constituye un recurso didáctico que se complementa con clases teorico - prácticas, prácticas y talleres de discusión para la resolución de problemas e interpretación de resultados.

Bibliografía Básica

- AYRA, J. y LARNER, R., 1992. *Matemáticas aplicadas a la Administración, Economía, Ciencias Biológicas y Sociales.* Prentice Hall Hispanoamericana. Méjico.

- ACHÁVAL, M., 1993. *Visual Basic 3.0.* Editorial Métodos S.A.

- BUDNICK, F., 1997. *Matemáticas Aplicadas para Administración, Economía y Ciencias Sociales.* Tercera Edición. Mc. Graw Hill. Méjico.

- CEBALLOS, F., 1993. *Microsoft Visual Basic: Aplicaciones para Windows*. RAMA Editorial.

- GOODSON, C. y MIERTSCHIN, S, 1991. *"Algebra con aplicaciones técnicas"*. Limusa. México

- GROSSMAN, S., 1995. *Algebra Lineal*. 5ta. Edición. Mc. Graw Hill. Méjico.

- GUZMÁN, M., 1992- *Tendencias innovadoras en Educación Matemática*. Olimpíada Matemática Argentina.

- LEITHOLD, L., 1995. *Algebra*. Editorial Harla. Méjico.

- LITWIN, E., 1995 (compiladora). *Tecnología Educativa. Política, historia, propuestas*. Paidós. Buenos Aires.

- POLYA, G., 1965. Reimp. 1996. *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas. México

- SANTALÓ, L. y colaboradores, 1994. *Hacia una didáctica humanista de la matemática*. Troquel. Buenos Aires.

- SHOENFELD, A., 1994. *Ideas y tendencias en la resolución de problemas*. Olimpíada Matemática Argentina. Buenos Aires.

- SOBEL, M. y LERNER, N., 1996. *Algebra*. 4ta. Edición. Prentice Hall Hispanoamericana