ACERCA DEL NÚMERO π*

Autores: Cecilia R. Crespo Crespo
Christiane C. Ponteville
Buenos Aires (Argentina)

En este trabajo se propone el análisis de distintas maneras de realizar aproximaciones del número π con vistas a la presentación y profundización del estudio de las características de este número a partir de la utilización de ideas matemáticas sencillas y diversas.

INTRODUCCIÓN

El número π es uno de los primeros números irracionales y quizá el primer número trascendente con el cual el niño tiene contacto. Estas características no son fáciles de asimilar por la psicología humana. Al niño le cuesta comprender cómo es posible la existencia de un número que no podemos escribir, un número al que, para poder referirnos a él, fue necesario darle un nombre distinto a los que él está acostumbrado a utilizar.

Sin embargo, su definición como cociente entre la longitud de la circunferencia y su diámetro es dada desde edades muy tempranas. Su utilización en el cálculo de áreas y volúmenes relacionados con la circunferencia, hace que para los alumnos, su existencia quede sumergida en un misterio sólo develado a los iniciados.

Para poder evitar esta concepción, en este trabajo se presenta una serie de maneras distintas de aproximar el número π. Estos cálculos pueden basarse en planteos matemáticos de distinta naturaleza: geométricos, probabilísticos, algebraicos,...

Es importante que los alumnos trabajen conscientemente estas ideas de aproximación y de convergencia para que logren aprehender intuitivamente el concepto de irracionalidad.

EVOLUCIÓN DE LAS APROXIMACIONES DE π.

Históricamente el hombre se preocupó desde la antigüedad remota en encontrar el valor de π, problema surgido del intento de calcular la longitud de la circunferencia. Aún en la actualidad se siguen desarrollando algoritmos para hallar aproximaciones con mayor cantidad de dígitos y en menor tiempo, aprovechando las posibilidades que ofrecen las nuevas tecnologías computacionales.

Como la matemática es una actividad humana cuyo desarrollo se ha llevado a cabo durante un largo período de tiempo, la historia de π proporciona una oportunidad de que los alumnos logren visualizar este hecho.

---

* Presentado en la X Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa - Cayey, Ponce (Puerto Rico), Agosto 1996.

En el Antiguo Testamento (III Libro de los Reyes 7, 23) se infiere que los hebreos consideraban π =3:

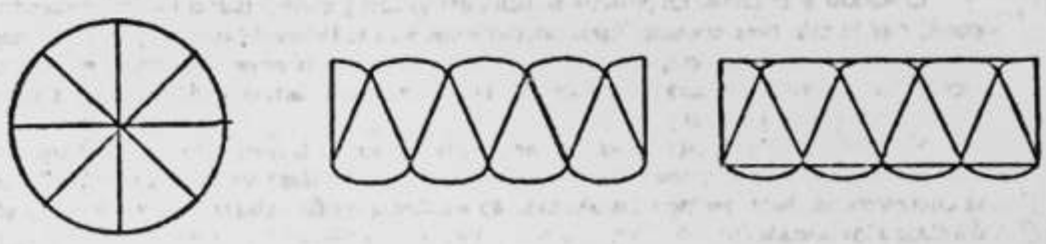
"Se construyó un vaso de bronce fundido, perfectamente redondo, que tenia diez codos de diámetro, en tanto que un cordón de treinta codos media la circunferencia en derredor"

Esta aproximación coincide con la de la primera época de los babilonios, de acuerdo con los resultados que aparecen en sus tablillas de arcilla.

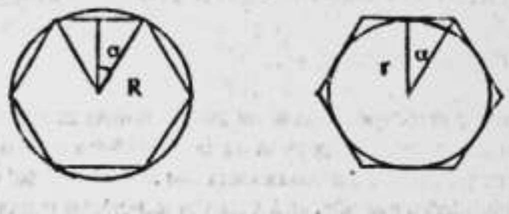
Los egipcios, en el papiro Rhind, consideraban el área de un circulo como igual a la de un cuadrado cuyo lado es 8/9 de su diámetro. Este procedimiento equivale a tomar π =3,1604.

Los matemáticos griegos también se ocuparon del tema que surgió naturalmente en sus intentos infructuosos de cuadrar el circulo.

Mediante la descomposición de un círculo en una cantidad creciente de sectores circulares, lograron aproximar π a través del límite de los perímetros obtenidos.



Arquímedes (287-212 a.C.) logró una aproximación muy buena inscribiendo y circunscribiendo en una circunferencia polígonos regulares de número de lados cada vez mayor y estudiando el área límite de dichos polígonos.



Este método condujo a Arquimedes a obtener el valor de π hasta con cuatro dígitos correctos.

Durante la Edad Media no se avanzó demasiado en este tema en Occidente. En el siglo XV, Nicolaus Causanus aplicó un método basado en ideas similares a las de Arquímedes, pero considerando sólo polígonos regulares cuya cantidad de lados sea potencia de dos y con perímetro 2. De esta manera obtuvo dos sucesiones de radio (la de las circunferencias inscriptas y la de las circunscriptas) que convergen a $1/\pi$.

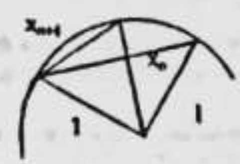
$l = 1/2$

$r = 1/4$

$R = \sqrt{2}/4$

$r < 1/\pi < R$

A partir del Renacimiento, se fueron desarrollando métodos para obtener cada vez más cifras de π . Resulta interesante por su sencillez, el método basado en considerar polígonos regulares de 2n lados inscriptos en una circunferencia de radio unitario. El valor obtenido para π como cociente del perímetro de los polígonos y su diámetro converge rápidamente.



$$x_{n+1} = \sqrt{2-\sqrt{4-x_n^2}}$$

π aparece en muchas situaciones sin aparente relación con círculos y circunferencias y es posible aproximarlo mediante el cálculo y aplicación de series. Algunas de ellas son:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \ldots \quad \text{Viete (1540 – 1603)}$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2}{1.3} \cdot \frac{4.4}{3.5} \cdot \frac{6.6}{5.7} \cdot \frac{8.8}{7.9} \ldots \quad \text{J.Wallis (1616 – 1703)}$$

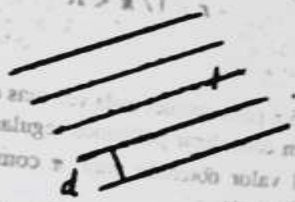
$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots \quad \text{G.Leibniz (1646 – 1716)}$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots \quad \text{L.Euler (1707 – 1783)}$$

Resulta muy interesante ejercitar con los alumnos el concepto de límite mediante el uso de calculadoras y computadoras, analizando la convergencia de estas series y productorias.

La Teoría de las probabilidades y π

Hacia fines del siglo XVIII, Buffon demostró que cuando se lanza una aguja de longitud l sobre una colección de rectas separadas por una distancia d, la probabilidad de que la aguja "pise" a una recta está relacionada con el número π.



$$P = \frac{2l}{\pi . d}$$

Puede simularse este experimento y de esta manera obtener buenas aproximaciones para el valor de π.

Podemos también plantear otra situación utilizando conceptos de la Teoría de Probabilidades. Consideremos un cuadrado de lado unitario y un cuarto de circunferencia como indica la figura siguiente.

Es posible determinar también valores aproximados de π teniendo en cuenta la probabilidad de que un punto elegido al azar dentro de este cuadrado pertenezca al sector circular. La simulación computacional de este proceso conduce a resultados satisfactorios.

Conclusiones y comentarios.

Las ideas de esta presentación fueron introducidas y trabajadas durante un curso de capacitación docente destinado a profesores de nivel medio y superior, en el cual fue posible analizar estas propuestas de cálculo aproximado de π que pueden ser llevadas al aula para desarrollar con nuestros alumnos, debido a que no se requiere para ellas herramientas matemáticas de gran complejidad.

La incorporación de π en el aula como objetivo de trabajo y no como herramienta de cálculo genera la reflexión respecto de sus características teóricas y el análisis general de los métodos de aproximación y del concepto de sucesión, así como el análisis intuitivo de la idea de error, pudiendo estos conceptos adaptarse al nivel en que sean presentados.

BIBLIOGRAFÍA.

ASIMOV, Isaac: *De los Números y su Historia.* El Ateneo - Buenos aires, 1982.

BOLT, Brian - HOBBS, David: *101 Proyectos Matemáticos.* Ed. Labor - Barcelona, 1991

COURANT, Richard - ROBBINS, Herbert: *¿Qué es la Matemática?* Aguilar - Madrid, 1964.

GILLINGS, Richard: *Mathematics in the time of the Pharaohs.* Dover Publications, Inc. - New York, 1982.

LE LIONNAIS, François: *Las grandes corrientes del pensamiento matemático.* Eudeba. - Buenos Aires, 1982.

MOLEDO, Leonardo: *De las tortugas a las estrellas.* AZ - Buenos Aires, 1995.

ORTON, Antony: *Didáctica de las Matemáticas. Cuestiones, teoría y práctica en el aula.* Ediciones Morata - Madrid, 1990.

PAULOS, John: *Más allá de los números.* Tusquest - Barcelona, 1993.

PERERO, Mariano: *Historia e historias de Matemáticas.* Grupo - Editorial Iberoamericana.

RODRÍGUEZ VIDAL, Rafael - RODRÍGUEZ RIGUAL, M. del Carmen: *Cuentos y cuentas de los matemáticos.* Ed. Reverté - Barcelona, 1987.

SANTALÓ, Luis: *La Geometría de la Formación de los Profesores.* Red Olímpica - Buenos Aires, 1993.

VARELA, Leopoldo: *Historia de la Matemática: La Edad del Empirismo.* Doc. n° 6. Proyecto Multinacional para el mejoramiento de las Ciencias. OEA. - Buenos Aires, 1997.

VERA, Francisco: *Breve Historia de la Geometría.* Ed. Losada - Buenos Aires, 1963.