EL PROBLEMA DE LA DIVISIÓN DESDE LOS NATURALES A LOS COMPLEJOS

Nelly Vázquez de Tapia

Introducción:

Entre las diversas causas que dificultan el aprendizaje de la matemática, la falta de relación e integración de los temas constituye un serio obstáculo para el logro de una adecuada comprensión.
El desarrollo de los temas en forma aislada y parcializada obliga al enunciado y memorización de gran número de reglas particulares, a veces artificiosas, como si se tratara de problemas aparentemente inconexos.

En cambio si los docentes se abocan a la búsqueda de similitudes que se presentan en la estructura de ciertos temas, será suficiente enunciar un número reducido de reglas básicas fundamentales que, por su generalidad, poseen un gran poder de síntesis.

Así se tendrá una visión más clara e integral de ciertas situaciones que, aparentando ser disímiles en virtud de un tratamiento aislado aparecen, ahora, naturalmente interrelacionadas. De esta manera es posible conducir a los alumnos al descubrimiento de las reglas particulares y a una comprensión más profunda de los conceptos analizados.

En tales condiciones, el pensamiento productivo prevalece sobre el pensamiento reproductivo ya que, cada vez que el alumno se enfrente a una nueva situación la asociará a otras similares que puedan señalarle el camino hacia el descubrimiento de reglas particulares y al enunciado de conclusiones. La memorización mecánica resulta así reemplazada por una memoria activa en función de las relaciones evocadas que se asocian en su mente.

El problema

Dentro de este marco analizamos el problema de la división en los distintos campos numéricos, desde los naturales a los complejos.

El problema de la división que comienza en la escuela primaria con los naturales y culmina con la división de los números complejos en los últimos años de la escuela secundaria suele presentar dificultades porque se señalan pautas particulares para cada conjunto numérico. De esta manera, el alumno no puede siquiera vislumbrar el hilo conductor que conecta las reglas de la división en todos los campos.

Por ejemplo, los alumnos no encuentran relación entre la regla para dividir fracciones y la regla para dividir decimales. En una se habla de "productos cruzados" y en la otra de "correr las comas".

¿Qué conceptuaciones matemáticas aparecen "disfrazadas" bajo tan singulares expresiones? ¿Existe alguna vinculación entre ambas? Con tan diferentes y particulares reglas es muy difícil que el alumno imagine siquiera la posibilidad de una conexión.

$$\frac{3}{7} \div \frac{2}{5} = \frac{3\times 5}{7\times 2} = \frac{15}{14}$$

Error frecuente:

cambiar el orden de los productos

$$\frac{3}{7} \div \frac{2}{5} = \frac{7 \times 2}{3 \times 5}$$

0,42,96 | 7,25

operación mecánica "correr comas"

12,3298 | 5,7

12,3298 | 5,7000

complicación: igualar el número de cifras decimales

En ambos ejemplos el alumno actúa mecánicamente desconociendo las propiedades que utiliza.

En cada uno de los campos numéricos se enuncian las reglas operatorias, generalmente memorizadas y no comprendidas. El problema de la memorización de las reglas se acentúa cuando en algunos de los campos numéricos se presentan distintos casos con sus respectivas reglas particulares.

Por ejemplo, en la división con números decimales, el alumno debe memorizar cuatro reglas que podrían resumirse en una sola más general:

1. *División de números enteros con error menor que una unidad prefijada*
2. *División de un decimal por un entero*
3. *División de un entero por un decimal*
4. *División de dos números decimales.*

Otro tanto ocurre con cada uno de los casos particulares de racionalización.

En resumen, una gran parte de las dificultades del problema nace de la falta de vinculación de la operación de división en distintos campos numéricos y del hecho de no encontrar una regla básica que, siendo válida en todos los campos, ayude a la comprensión del problema de modo tal que, a partir de ella, el alumno pueda llegar por sí mismo a descubrir las reglas particulares y a fundamentarlas.

La división en el conjunto de los naturales

El concepto de división se introduce, intuitivamente, en la escuela primaria, con la idea de "partir" o "repartir" algo en partes iguales.

Dejamos de lado el proceso de aprendizaje del algoritmo de la división de números naturales porque no encuadra dentro de los objetivos de este trabajo.

Partimos pues del supuesto de que el conocimiento de dicho algoritmo ha sido adquirido.

Dividir una cinta en 4 partes iguales, dividir una torta en 8 porciones iguales, dividir un conjunto de 12 jabones en 3 cajas del mismo número de jabones y, en general, dividir una cantidad por un número natural es una operación de significado intuitivo muy claro para el alumno.

Pero, ¿qué significa por ejemplo, dividir algo en – 4 partes iguales o en 2,47 partes iguales? Es por demás evidente que estas expresiones han perdido su significación pues el alumno no puede imaginar ninguna actividad material que conduzca al resultado y, en consecuencia, ninguna imagen acude a su mente. En estos casos el matemático transforma la operación **sin sentido** en otra equivalente cuya interpretación sea clara.

Existe una propiedad de la división en la que prácticamente no se repara pese a que se enseña desde la escuela primaria, se enuncia, se memoriza y se olvida rápidamente.

Expresa que:

> *El cociente de una división no altera cuando se multiplican o dividen, el dividendo y el divisor por un mismo número, pero el resto queda multiplicado o dividido por ese número.*

Ejemplos:

$$6 \div 3 = 2 \qquad\qquad 1200 \div 400 = 3$$
$$60 \div 30 = 2 \qquad\qquad 120 \div 40 = 3$$
$$600 \div 300 = 2 \qquad\qquad 12 \div 40 = 3$$

Esta propiedad se usa, a lo sumo, para simplificar operaciones pero no se resalta la importancia que tiene en el proceso de la división.

Para que el alumno sea capaz de descubrir y enunciar las reglas correspondientes a los distintos conjuntos numéricos, es suficiente que tenga en cuenta las siguientes condiciones básicas:

> 1. *La propiedad enunciada de inalterabilidad del cociente.*
> 2. *La división solo tiene "sentido" si el divisor es natural.*
> 3. *Si el divisor no es natural, la división debe transformarse en otra equivalente de divisor natural.*

Sentadas estas reglas, pasamos a analizar la división en los distintos campos numéricos.

La división en el conjunto de los enteros

Analizamos los dos casos posibles:

Caso I- *El divisor es un entero positivo*

Ejemplo 1

$$(+12) \div (+3) \quad \text{o} \quad (-12) \div 3$$

Teniendo en cuenta el isomorfismo entre los enteros positivos y los naturales aceptamos que $+3 = 3$. Es decir, el divisor es natural. Por tanto la división tiene sentido y no es necesario transformarla .

Para hallar el resultado el alumno puede acudir a alguna de las conocidas interpretaciones de los números enteros.

Por ejemplo:

$(+12) \div 3$ puede interpretarse como una ganancia dividida por partes iguales entre 3 personas

$$\boxed{(+12) \div 3 = +4}$$

El resultado es claro y evidente.
En forma análoga:

$$\boxed{(-12) \div 3 = -4}$$

puede interpretarse como una deuda compartida por partes iguales entre 3 personas

Caso II- *El divisor es un entero negativo*

Ejemplo 1:

$$(+12) \div (-3) = ?$$

¿Qué significa dividir algo en -3 partes iguales?. La operación no tiene sentido. Entonces es necesario transformarla en otra división equivalente cuyo divisor sea positivo. Es decir, hay que multiplicar dividendo y divisor por un mismo número negativo.

Si bien hay infinitas posibilidades, el alumno puede concluir que la solución más simple es multiplicar por (-1) después de haber probado varios ejemplos.

$$(+12) \div (-3) = [(+12)(-1)] \div [(-3)(-1)] = (-12) \div 3 = -4$$

$(+12) \div (-3)$ se transforma en $(-12) \div 3$

$$\boxed{(+12) \div (-3) = (-12) \div 3}$$

Ejemplo 2
Análogamente

$(-12) \div (-3)$ se transforma en $(+12) \div 3$

$$(-12) \div (-3) = (+12) \div 3$$

La división en el conjunto de los racionales

A- División de numeros fraccionarios

Sean por ejemplo:

$$\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} \qquad \text{o} \qquad 3 \div \frac{4}{5}$$

¿Qué significa dividir algo en $\frac{4}{5}$?

La operación así presentada carece de sentido.

Es necesario aplicar la regla general para transformarla en una operación equivalente cuyo significado sea conocido.

Consideramos los siguientes casos:

Caso I: *El divisor es un número entero*

Ejemplo I: Divisor entero positivo

a) $\frac{1}{3} \div 4 = ?$ b) $\frac{2}{3} \div 4 = ?$

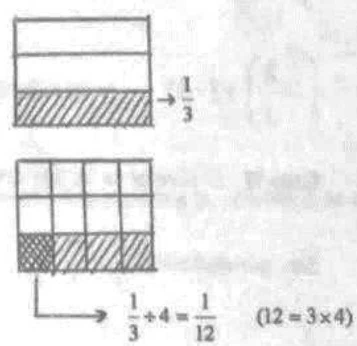
La operación tiene sentido pues el divisor es natural.

Para hallar el resultado, el alumno puede recurrir a una interpretación gráfica en la que ha sido largamente ejercitado

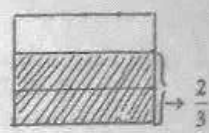
a) Representa $\frac{1}{3}$

Divide cada tercio en 4 partes iguales

Verifica que $\frac{1}{3} \div 4 = \frac{1}{12}$

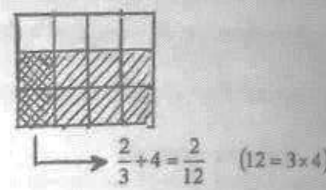


b) Representa $\frac{2}{3}$



Divide $\frac{2}{3}$ en 4 partes iguales

Verifica que $\frac{2}{3} \div 4 = \frac{2}{12}$



Generalización:

$$\frac{4}{7} \div 5 = \frac{4}{35} \quad (35 = 7 \times 5) \qquad -\frac{5}{8} \div 3 = -\frac{5}{24} \quad (24 = 8 \times 3)$$

$$\boxed{\frac{a}{b} \div n = \frac{a}{b.n}}$$

Ejemplo 2: Divisor entero negativo

$$\frac{2}{3} \div (-4) \qquad \text{o} \qquad \left(-\frac{2}{3}\right) \div (-4)$$

En este caso es suficiente aplicar la regla enunciada en el campo de los enteros para transformar el divisor negativo en positivo.

$\frac{2}{3} \div (-4)$ se transforma en $\left(-\frac{2}{3}\right) \div 4 = -\frac{2}{12}$

$\left(-\frac{2}{3}\right) \div (-4)$ se transforma en $\left(+\frac{2}{3}\right) \div 4 = \frac{2}{12}$

Caso II. *El divisor es un número fraccionario*

Sea, por ejemplo: $\frac{2}{3} \div \frac{4}{5}$

No tiene sentido dividir algo en $\frac{4}{5}$ de partes iguales. Entonces es necesario transformar la operación en otra equivalente aplicando la propiedad básica.

Para descubrir la regla el alumno debe tener ciertos conocimientos previos: el concepto y la propiedad de fracciones inversas.

El producto de dos fracciones inversas es igual a 1.

$$\frac{4}{5}\times\frac{5}{4}=1 \qquad \frac{2}{7}\times\frac{7}{2}=1 \qquad \frac{8}{3}\times\frac{3}{8}=1$$

Introducidos el concepto y la propiedad de las fracciones inversas, la solución es bastante obvia. Para convertir el divisor en entero es suficiente multiplicar el dividendo y el divisor por el inverso del divisor.

$$\frac{2}{3}\div\frac{4}{5}=\left(\frac{2}{3}\times\frac{5}{4}\right)\div\left(\frac{4}{5}\times\frac{5}{4}\right)=\left(\frac{2}{3}\times\frac{5}{4}\right)\div 1=\frac{2}{3}\times\frac{5}{4}$$

$\frac{2}{3}\div\frac{4}{5}$ se transforma en $\frac{2}{3}\times\frac{5}{4}$

$$\boxed{\frac{2}{3}\div\frac{4}{5}=\frac{2}{3}\times\frac{5}{4}}$$

La división se transforma en una multiplicación, operación conocida por el alumno.

El uso del inverso aparece luego vinculado con las estructuras algebraicas y las ecuaciones que tienen solución en cada una de ellas.

En cambio, la regla de los "productos cruzados" resulta artificiosa y desconectada del proceso que estamos analizando.

B- DIVISION DE NUMEROS DECIMALES

Sea por ejemplo:

$$32{,}7416 \;\; \underline{|\,1{,}23\quad}$$

La división por 1,23 no tiene sentido.

Habitualmente se expresa que "se corren las comas" dos lugares a la derecha y se tachan las anteriores para convertir el divisor en entero

$$32\cancel{,}74,16 \;\; \underline{|\,1\cancel{,}23\quad}$$

Pero, ¿qué concepto matemático encierra la expresión "correr las comas", que más bien parece corresponder a una actividad física?

Si, en cambio, el alumno tiene claras las leyes básicas, es decir, el concepto de que el divisor debe ser natural y que, en caso contrario debe transformar la división en otra equivalente, *multiplicando dividendo y divisor por un mismo número* convenientemente elegido para llevar la operación a un campo conocido, le resultará fácil descubrir las reglas particulares correspondientes a cada caso.

Ejemplos:

1) $3,7 \,\underline{|\,274}$ La operación es posible porque el divisor es natural. Se opera directamente.

2) $42 \,\underline{|\,3,2\,4}$ se transforma en $4200 \,\underline{|\,324}$ multiplicando por 100 el dividendo y el divisor.

3) $1,2\,2 \,\underline{|\,6,4\,5\,7\,9}$ se transforma en $12200 \,\underline{|\,64579}$ multiplicando por 10.000 el dividendo y el divisor.

4) $2,7\,4\,8 \,\underline{|\,7,2} \longrightarrow 2\,7,4\,8 \,\underline{|\,7\,2}$ (se multiplica por 10)

5) $1\,2 \,\underline{|\,0,0\,0\,3} \longrightarrow 12000 \,\underline{|\,3}$ (se multiplica por 1000)

6) $0,0\,0\,5 \,\underline{|\,0,2\,5} \longrightarrow 0,5 \,\underline{|\,2\,5}$ (se multiplica por 100)

7) $0,0\,0\,0\,1\,8 \,\underline{|\,4\,5}$ se opera directamente

División por un irracional. Campo de los reales

Sigamos avanzando. Llegamos al campo de los irracionales y es aquí donde, según mi punto de vista, se observa la mayor desvinculación, porque el tema se presenta bajo el nombre de "racionalización de denominadores" cuando parecería más natural llamarlo "**división por un irracional**". Esta forma desorienta a los alumnos porque se habla de **denominador** en lugar de hablar de **divisor**.

Si en lugar de presentar el caso como una fracción se lo presenta como una división puede ser el mismo alumno quien, siguiendo la idea de divisor natural indique que es necesario convertir el divisor en racional (racionalizar).

Entonces, el problema adquiere un significado muy claro: transformar una división de divisor irracional en otra de divisor racional en cuyo campo ya sabe operar.

Dadas las expresiones:

$$\frac{5}{\sqrt{2}} \quad ; \quad \frac{x}{\sqrt[3]{5}} \quad ; \quad \frac{a}{a+\sqrt{b}} \quad ; \quad \frac{4}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \quad ; \quad \text{etc.}$$

El alumno deberá buscar, en cada caso, cuál es la expresión por la cual debe multiplicar dividendo y divisor para que éste sea racional. Se supone que ha sido debidamente ejercitado en las operaciones con radicales como para poder encontrar sin mayores dificultades las expresiones adecuadas a cada caso.

También aquí, como en el caso de la división por un número decimal suelen presentarse los distintos casos en forma aislada.

- El denominador es un radical cuadrático
- El denominador es un radical no cuadrático
- El denominador es la suma o diferencia de dos radicales cuadráticos
- El denominador es la suma o diferencia de un número real y un radical cuadrático

y, para cada caso el alumno debe aprender una regla particular, generalmente memorizada en lugar de aplicar la regla general básica y descubrir por sí mismo cada una de las reglas particulares.

Una adecuada ejercitación previa puede facilitar el descubrimiento

a) Multiplicar por la expresión conveniente para eliminar el radical

$$\sqrt[4]{ab^2}\,.\,\_\_\,?\,\_\_ = ab$$

$\sqrt{3}\ \underline{\ \sqrt{3}\ } = 3$ $\qquad\qquad$ $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^3}\,.\,\_\_\_\_\_ = \frac{1}{2}$

$\sqrt[3]{a}\ \_\_\_\_ = a$ $\qquad\qquad$ $\sqrt[3]{(-0,3)^2}\,.\,\_\_\_\_ = -0,3$

b) Recordar la propiedad

$$\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$$

y aplicarla para eliminar radicales en los siguientes casos:

$$\left(2+\sqrt{3}\right)\underline{\left(2-\sqrt{3}\right)}=1$$

$$\left(\sqrt{a}-b^2\right)\_\_\_\_\_\_=a-b^2$$

$$\left(\sqrt{0,2}-\sqrt{0,03}\right)\_\_\_\_\_\_=0,17$$

$$\left(\sqrt{\frac{1}{4}}+\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\_\_\_\_\_\_\_=-\frac{1}{12}$$

Ahora ya está en condiciones de transformar una división de divisor irracional en otra equivalente de divisor racional multiplicando dividendo y divisor por la expresión adecuada.

$$\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{a.\sqrt{3}}{\sqrt{3}.\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{3}}{3}\rightarrow racional$$

$$\frac{a}{\sqrt{0,2}-\sqrt{0,7}}=\frac{a\left(\sqrt{0,2}+\sqrt{0,7}\right)}{0,2-0,7}=\frac{a\left(\sqrt{0,2}+\sqrt{0,7}\right)}{-0,5}\rightarrow racional$$

Pero, cuando se presenta este caso:

$$\frac{x}{\sqrt{a}}=\frac{x\sqrt{a}}{a}$$

¿Estamos seguros de haber racionalizado? ¿No puede acaso ser a un número irracional?

Sea, por ejemplo:

$$\frac{a}{\sqrt{\pi}}=\frac{a\sqrt{\pi}}{\pi}\rightarrow irracional$$

$\pi=3,1415926535\ldots$ se racionaliza por aproximación $\pi=3,14$

Observemos el proceso seguido en este ejemplo para llegar a un divisor natural

(1) $\dfrac{a}{-\sqrt{\pi}} = \dfrac{a\sqrt{\pi}}{-\pi}$ se elimina la raiz

(2) $\dfrac{a}{-\sqrt{\pi}} = \dfrac{a\sqrt{\pi}}{-3{,}14}$ se racionaliza π por aproximación

$\dfrac{a}{-\sqrt{\pi}} = \dfrac{100\ a\sqrt{\pi}}{-314}$ se transforma el divisor en entero

$\dfrac{a}{-\sqrt{\pi}} = \dfrac{-100\,a\sqrt{\pi}}{314}$ se transforma el divisor en natural

Si bien en la práctica se realizan varios pasos simultáneamente, el proceso para llegar a un divisor natural es el señalado.

Observamos que:

en (1): si bien se ha eliminado el radical cuadrático del divisor, no se ha racionalizado (π es irracional)

en (2): se ha racionalizado **por aproximación** (3,14 es racional). Si bien el alumno opera de esta manera desde la escuela primaria, no se presenta este caso cuando se habla de racionalizar el divisor. **Queda entonces, la idea confusa de que racionalizar significa eliminar radicales del denominador.**

De la misma manera el número irracional e = 2,7182... se racionaliza por aproximación
Por ejemplo:

e = 2,71

Está tan arraigado el concepto de **racionalización de denominadores** que aún muchos profesores no han reparado en que se trata de una división. He podido comprobar en varias ocasiones que, presentando el problema a profesores secundarios se vieron realmente sorprendidos y por primera vez descubrían que tras el rótulo de "**racionalización de denominadores**" se esconde la operación de **división por un irracional** como si fuese un eslabón perdido en la cadena de los casos de división en los distintos campos numéricos

División por un número complejo

Llegado a este nivel, si los alumnos han advertido la coherencia de las reglas aplicadas en cada etapa, a partir de la regla básica sentada, la división por un número complejo no solo no ofrece dificultad sino que resulta obvia y trivial para el alumno.

Presentado el caso

$$\frac{-2-i}{3+4i}=?$$

Se repite el proceso de multiplicar dividendo y divisor por una expresión tal que el divisor se convierta en número real, campo anterior en el cual se sabe operar.

El alumno ya conoce que el producto de complejos conjugados es el número real que se obtiene sumando los cuadrados de las componentes.

$$(3+2i)(3-2i)=3^2+2^2=13$$

$$\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{5}i\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{3}{5}i\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{9}{25}=\frac{25+36}{100}=\frac{61}{100}=0{,}61$$

En este caso la expresión adecuada por la cual hay que multiplicar el dividendo y el divisor es el conjugado del divisor: 3 – 4i.

$$\frac{-2-i}{3+4i}=\frac{(-2-i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\frac{-6-4}{25}+\frac{8-3}{25}i=-\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i \rightarrow \textit{divisor natural}$$

Conclusión:

Dos reglas básicas, de fuerte contenido conceptual, han reemplazado a más de una docena de reglas particulares, a veces artificiosas o rebuscadas, en beneficio de la simplicidad del aprendizaje y de la comprensión del problema de la división.