PENSAMIENTO FUNCIONAL DE ALUMNOS DE TERCERO DE EDUCACIÓN PRIMARIA EN UNA TAREA DE GENERALIZACIÓN

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Trabajo de Fin de Máster presentado por

Nicola Analisa Penfold

Dirigido por la doctora

Marta Molina

GRANADA 2016

Facultad de Ciencias de la Educación

Universidad de Granada

Trabajo Fin de Máster

PENSAMIENTO FUNCIONAL DE ALUMNOS DE TERCERO DE EDUCACIÓN PRIMARIA NEN UNA TAREA DE GENERALIZACIÓN

Trabajo de Fin de Máster presentado por Nicola Analisa Penfold para la obtención del título de Máster en Didáctica de la Matemática

Tutora:

Dra. Dña. Marta Molina

GRANADA 2016

Índice

Capitulo 1 - Introducción ....- 5 -

1.1 - Estructura del trabajo ....- 6 -

Capitulo 2 - El problema de la investigación ....- 7 -

2.1 - Definición del problema ....- 7 -

2.2 - Justificación personal ....- 7 -

2.3 - Justificación curricular ....- 8 -

2.4 - Justificación investigadora ....- 10 -

Capitulo 3 - Marco teórico y antecedentes ....- 13 -

3.1 - Early-Algebra ....- 13 -

3.2 - Pensamiento funcional ....- 14 -

3.3 - Patrones y tipos de representación de los patrones ....- 15 -

3.4 - Generalización ....- 18 -

3.5 - Investigaciones previas ....- 19 -

Capitulo 4 - Metodología ....- 24 -

4.1 - Sujetos ....- 24 -

4.1.1 - Conocimientos previos ....- 24 -

4.2 - Tipo de investigación ....- 24 -

4.3 - Instrumento de recogida de datos ....- 25 -

4.4 - Proceso de recogida de datos ....- 27 -

Capítulo 5 - Análisis de datos ....- 28 -

5.1 - Cuestiones 1, 2 y 3. ....- 28 -

5.3 - Cuestión 5 ....- 42 -

5.4 - Cuestión 6 ....- 44 -

5.5 - Cuestión 7 ....- 47 -

5.6 - Cuestión 8 ....- 49 -

Capítulo 6. Discusión de resultados ....- 52 -

6.1 – Cuestiones 1, 2 y 3 ....- 52 -

6.2 – Cuestión 4 .... - 52 -

6.3 – Cuestión 5 .... - 54 -

6.4 – Cuestión 6 .... - 55 -

6.5 – Cuestión 7 .... - 56 -

6.6 – Cuestión 8 .... - 56 -

6.7 – Comentarios generales .... - 57 -

Capítulo 7. Conclusiones .... - 58 -

7.1 - Consecución de objetivos .... - 58 -

7.1.1 – Conclusiones de utilidad para la enseñanza .... - 59 -

7.1.2 – Conclusiones de utilidad para la investigación .... - 60 -

7.2 - Limitaciones de la investigación .... - 61 -

7.3 - Líneas de continuación .... - 61 -

Referencias bibliográficas .... - 63 -

ANEXOS .... - 68 -

Anexo I - Instrumento de recogida de datos .... - 68 -

Anexo II - Transcripción de las intervenciones orales de los alumnos durante la sesión de recogida de datos .... - 71 -

Capitulo 1 - Introducción

Este estudio es un Trabajo de Fin de Máster realizado por la alumna Nicola Analisa Penfold, dentro del programa del Máster de Didáctica de la Matemática impartido en la Universidad de Granada, cursado durante el curso académico 2015-2016. Este trabajo se desarrolla dentro del grupo de investigación FQM-193, bajo la dirección de la Dª. Marta Molina, en el marco del proyecto de investigación del Plan Nacional I+D con referencia EDU2013-41632-P, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España.

El citado proyecto tiene como foco de estudio el pensamiento funcional de estudiantes de educación primaria. En este marco, este trabajo realiza un primer acercamiento al pensamiento funcional de alumnos de tercero de educación primaria. Se analizan las producciones de los alumnos atendiendo a su capacidad para identificar patrones y hacer uso del patrón identificado. Además, se atiende a las distintas representaciones empleadas por los alumnos para resolver las cuestiones que se les presentan en un cuestionario. El cuestionario empleado y la sesión analizada son los primeros de un total de cuatro sesiones de trabajo implementadas dentro de un experimento de enseñanza (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011). Los datos de las demás sesiones no se tienen en cuenta en este trabajo.

El número total de alumnos que participaron en el proceso de recogida de datos fue 25. Estos alumnos cursaban tercero de primaria en un centro privado de Granada. No tenían experiencia previa trabajando con tareas donde debían emplear el pensamiento funcional. El cuestionario empleado para la recogida de datos consta de ocho preguntas en total. Se plantea una situación inicial referente a las edades de dos hermanos, una expresada en relación a la otra. Las cuestiones que los alumnos han de resolver están relacionadas con la situación inicial presentada y tratan sobre la detección y el empleo del patrón que relaciona ambas edades de los hermanos. Los datos recogidos son las producciones escritas y orales de los alumnos al disponerse de sus hojas de trabajo y de una grabación en vídeo de la sesión.

Para simplificar la redacción del presente trabajo se ha utilizado el género masculino para hacer referencia tanto a los alumnos como las alumnas que participaron en la recogida de datos.

1.1 - Estructura del trabajo

El presente trabajo queda organizado en siete capítulos principales.

En el primer capítulo se incluye la introducción y la estructura del trabajo.

El segundo capítulo describe el problema de investigación abordado, los objetivos y la justificación de su elección desde tres puntos de vista: personal, curricular e investigador.

En el tercer capítulo se presenta el marco teórico empleado para este trabajo y una revisión bibliográfica de estudios previos relacionados con el problema de investigación planteado.

El capítulo cuarto se dedica a presentar la metodología empleada para alcanzar los objetivos del estudio.

El quinto capítulo contiene el análisis de los datos recogidos: respuestas a una tarea resuelta por los alumnos en un cuestionario escrito y sus aportaciones verbales en relación con la tarea (recogidas por medio de grabación en video).

El sexto capítulo está dedicado a la discusión de los resultados obtenidos tras el análisis de los datos y el séptimo capítulo a las conclusiones que extraemos de dichos resultados.

Capitulo 2 - El problema de la investigación

En este capítulo se va a detallar el problema de investigación abordado en este trabajo y la justificación de la elección de dicho problema.

2.1 - Definición del problema

Este estudio se centra en analizar la capacidad de un grupo concreto de alumnos de tercer curso de educación primaria, cuyas edades están comprendidas entre 8 y 9 años de edad, para poner en uso el pensamiento funcional con el fin de identificar, entender y hacer uso de un patrón que se les presenta de manera escrita, además de analizar las distintas representaciones empleadas por los alumnos en la resolución de las cuestiones planteadas.

Este problema se concreta en el siguiente objetivo general y objetivos específicos.

El objetivo general de este estudio es describir el pensamiento funcional que demuestran un grupo de alumnos de tercer curso de educación primaria cuando resuelven una tarea de generalización.

Este objetivo a su vez se divide en dos objetivos específicos:

OE.1 - Describir las respuestas proporcionadas por los alumnos en las distintas cuestiones que componen la tarea mediante la cual se realizó la recogida de datos.

OE.2 - Describir las representaciones empleadas por los alumnos para responder a las cuestiones planteadas y sus características.

2.2 - Justificación personal

Mi interés personal en la didáctica de las matemáticas a niveles de educación primaria es lo que me ha motivado a seleccionar el tema de la enseñanza del álgebra en la educación primaria para mi Trabajo Fin de Máster. Tuve ya un primer acercamiento a este tema durante la elaboración de mi Trabajo Fin de Grado de la carrera de Graduado en Educación Primaria, que sirvió para aumentar mi motivación por este tema. Las matemáticas en general siempre han sido de mi interés, dentro de ellas la geometría y el álgebra han sido las que más captan mi atención, tanto desde el punto de vista de alumna como de profesora. Tuve mi primer contacto con la propuesta de Early Algebra, que según Molina (2009) lleva implantado en algunos países alrededor de una década, mientras estudiaba mi carrera en la Universidad de Granada y poco a poco fui leyendo otros trabajos relacionados con el tema, como pueden ser Blanton y Kaput (2005), Carraher, Schliemann, Brizuela, y Earnest (2006) o Merino (2012). Estos trabajos, entre otros, sugieren que los alumnos son capaces de emplear, y por tanto desarrollar, el pensamiento funcional ya en la educación primaria. Por tanto, no es necesario posponer su desarrollo hasta la educación secundaria, tal y como se venía haciendo atendiendo a la creencia de que antes de llegar a esta etapa educativa los alumnos no eran capaces de emplear pensamiento funcional. Como profesora, creo en fomentar todas las habilidades posibles en los alumnos y que cuánto antes se comience a trabajar, mayor llegará a ser el nivel de desarrollo en cada habilidad. Pretendo contribuir a formar personas que lleguen a ser autónomas e independientes, capaces de desenvolverse en su día a día, enfrentándose a y superando con éxito los retos que se encuentren en el camino. El pensamiento funcional, siendo un tipo de pensamiento algebraico, nos ayuda a ser flexibles y a resolver problemas, una habilidad esencial para el día a día de una persona adulta. Además, las tablas y los gráficos, representaciones claves cuando se trabaja el contenido matemático de las funciones (Cañadas y Molina, 2016), son abundantes en los medios de comunicación y debemos saber interpretarlas para poder descifrar la información que nos llega a través de estos medios.

Este trabajo es un reto personal, especialmente a nivel profesional. Me permite adentrarme un poco más en el mundo del álgebra escolar y explorar la capacidad de los alumnos de trabajar con ella en las primeras etapas de la educación primaria.

2.3 - Justificación curricular

La ley educativa actual, Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE), aprobada el 9 de diciembre 2013, se basa en las competencias que deben adquirir los alumnos en la etapa de la educación obligatoria. Dichas competencias son siete, donde la segunda que se nombra es la Competencia Matemática y Competencias Básicas en Ciencia y Tecnología, abreviada a CMCT (Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa, 2013). En el Anexo I del BOE publicado el 1 de marzo 2014 se encuentran especificados todos los contenidos, objetivos y criterios de evaluación de cada una de las asignaturas que se imparten en la educación primaria, incluida la asignatura de matemáticas. En este documento se especifica que las matemáticas son necesarias en la vida cotidiana y permiten abordar una gran variedad de situaciones (Anexo I, BOE 1 marzo 2014). Además, este documento hace referencia directa a las matemáticas como un conjunto de saberes que se encuentran asociados a los números, que nos permite analizar la realidad para obtener información y conclusiones que no se encontraban explícitas, y esto nos permite actuar de la manera más acertada según cada situación, además de permitirnos encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas (Anexo I, BOE 1 marzo 2014). Si atendemos a los criterios de evaluación en el Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas, encontramos: *Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos y funcionales, valorando su utilidad para hacer predicciones (*Anexo I, BOE 1 marzo 2014, núm. 52, sec. I, p. 19388). Con esto se hace patente que la enseñanza de patrones, su identificación y su uso forma parte del currículo oficial actual en la educación primaria. Es necesario resaltar que, aunque se menciona como contenido del currículo oficial, no hay indicaciones sobre cómo se debe desarrollar este tipo de habilidades en los alumnos ni se precisan los contenidos que se deben impartir en relación a ello.

Si atendemos a otros documentos no nacionales, podemos encontrar las recomendaciones del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) en sus Principals and Standards. Este documento recoge recomendaciones sobre las matemáticas que se deberían enseñar desde las etapas de infantil (kindergarten) hasta segundo de Bachillerato (grade 12). Según lo recogido en este documento, los alumnos de infantil y los dos primeros cursos de educación primaria deben ser capaces de reconocer, describir y continuar patrones presentados como secuencias de sonidos, figuras o números, además de poder analizar cómo los patrones repetitivos y crecientes se generan (NCTM, 2015). En este documento queda claro que los integrantes del NCTM no consideran necesario posponer la enseñanza del álgebra hasta las etapas de la educación secundaria, sino que el pensamiento funcional debe trabajarse en el aula desde la educación infantil. Tercero de educación primaria corresponde a la etapa de grade 3 en Estados Unidos, y según el NCTM, los alumnos en los cursos 3 a 5 deben ser capaces de describir, continuar y realizar generalizaciones sobre patrones tanto numéricos como geométricos y además representar y analizar patrones y funciones mediante palabras, tablas y gráficos.

En el currículo oficial de Australia, podemos encontrar que la competencia matemática incluye seis subapartados, considerados unas ideas claves, que están interrelacionados y que se deben adquirir para poder decir que el alumno ha adquirido la competencia matemática. Dentro de estas ideas claves encontramos una titulada “Reconocimiento y uso de patrones y relaciones”. En la definición de esta idea clave se estipula que los alumnos deben identificar tendencias y describirlas empleando una amplio abanico de reglas y relaciones con el fin de continuar y predecir patrones, habilidad que es esencial para la resolución de problemas en contextos reales (Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority, 2011). Se especifica que los alumnos de cuarto curso podrán reconocer y usar patrones y relaciones presentes en la vida cotidiana (Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority, 2011).

En Irlanda, el National Council for Curriculum and Assessment (NCCA) establece el currículo para las escuelas irlandesas. En el apartado dedicado a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, se puede encontrar que las matemáticas incluyen un amplio abanico de conocimientos, habilidades y procedimientos que nos permite, entre otros, describir, interpretar, predecir y explicar patrones y relaciones entre número, álgebra, figuras y espacio, medidas y datos (NCCA, 1999). Menciona explícitamente el trabajo con patrones y lo relaciona con el lenguaje matemático, que es una herramienta útil y poderosa para organizar, manipular y comunicar la información.

Con todo lo anterior queda patente la relación entre el contenido de este estudio con el currículo nacional e incluso los currículos de otros países, algunos de los cuales han introducido la enseñanza del álgebra hace más de una década en sus aulas.

2.4 - Justificación investigadora

La enseñanza del álgebra típicamente se ha introducido en las etapas de la educación secundaria, ya que se consideraba que los contenidos eran demasiado difíciles de adquirir y los procesos demasiado complicados para ponerlos en práctica por niños de menor edad (Carraher, Schliemann, Brizuela, y Earnest, 2006). Sin embargo, en los últimos años se han desarrollado trabajos donde los sujetos son alumnos de educación primaria, incluso alumnos de las etapas de infantil, y se argumenta que el desarrollo del pensamiento algebraico desde edades tempranas puede ayudar a los alumnos a desarrollar conceptos matemáticos más complejos e incluso favorecer el desarrollo del álgebra más formal, tal y como se presenta en las etapas de educación secundaria. Se considera que unas matemáticas elementales "algebrizadas" pueden promover un mayor grado de generalidad en el pensamiento de los alumnos y aumentar su capacidad de expresar generalizaciones (Molina, 2009). El álgebra se ha considerado tradicionalmente separada de la aritmética. Se debía estudiar la aritmética primero y después se daba el paso del razonamiento aritmético a una serie de normas arbitrarias para manipular las incógnitas entendidas como la esencia del álgebra formal (Carraher, Schliemann, y Brizuela, 2000). Estudios más recientes han demostrado que el álgebra y al aritmética tienen mucho en común (Carraher, Schliemann, y Brizuela, 2000; Kaput y Blanton, 2001; Carraher, Schliemann, Brizuela, y Earnest, 2006). Éstos últimos consideran que las operaciones matemáticas de suma, resta, multiplicación y división se pueden considerar desde el primer momento como relaciones algebraicas, aunque para esto es necesario transformar algunos contenidos actuales e introducir elementos de la notación algebraica, como pueden ser símbolos, rectas numéricas, tablas y gráficas.

A finales del siglo 20 se realizaron investigaciones con alumnos de entre 12 y 15 años donde se detectaron algunas limitaciones en la enseñanza-aprendizaje del álgebra cuando los alumnos se enfrentaban a él por primera vez (Kieran, Pang, Schifter y Ng, 2016). Esta situación hizo que se comenzase a explorar si el pensamiento algebraico podría ser desarrollado por alumnos en cursos inferiores. Surgieron trabajos del Early Algebra Research Group, apoyado por el Ministerio de Educación de Estados Unidos desde principio hasta mediados de la década de los 90, junto con otras iniciativas del NCTM, según Kieran et al (2016). En los últimos años este movimiento se ha extendido a otros países (Blanton, 2008; Merino, 2012; Molina, 2006; Kolovou, van den Heuvel-Panhuizen y Köller, 2013).

La propuesta de Early-Algebra aboga por la enseñanza de conceptos y herramientas algebraicas desde edades tempranas, siempre en contextos significativos para los alumnos. Esta propuesta se acompaña de una concepción amplia de lo que es el álgebra, englobando el estudio de relaciones funcionales, el estudio de patrones y la generalización de éstos y de la aritmética, el estudio de relaciones abstraídas de cálculos y relaciones, desarrollo y manipulación de símbolos y la modelización como manera de expresar y formalizar las generalizaciones que se realizan (Schliemann, Carraher, Brizuela, Earnest, Goodrow, Lara-Roth, y Peled, 2003). Esta propuesta se basa en promover la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas y para ello se debe crear un ambiente donde se promueva que los alumnos exploren, modelicen, hagan predicciones y argumenten sus ideas (Blanton y Kaput, 2005). Tareas donde se promueve el pensamiento funcional como las incluidas en el cuestionario de recogida de datos, permiten promover todos los aspectos que mencionan estos autores. El interés en realizar investigaciones con alumnos de los primeros cursos de primaria que se enfrentan a estas situaciones radica en constatar no sólo que los alumnos demuestran su capacidad para emplear el pensamiento funcional, sino en saber qué tipo de representaciones y estrategias emplean y cómo esto puede ayudar a los profesores para diseñar sus sesiones de clase con el objetivo de fomentar el pensamiento funcional en sus alumnos y ayudarles a superar las dificultades a las que se puedan enfrentar.

Este estudio contribuye al campo cada vez más amplio de trabajos sobre la enseñanza-aprendizaje del álgebra en los cursos de educación primaria, demostrando las capacidades de los alumnos y los tipos de representación que emplean, sirviendo de orientación para futuros trabajos en el campo de la investigación y también para guiar la labor de los profesores en el aula de educación primaria.

Capitulo 3 - Marco teórico y antecedentes

En este apartado se presenta la propuesta de Early-Algebra y otros términos clave de este trabajo, como son patrón, generalización, representación y pensamiento funcional. Además, se hace una revisión de otros trabajos previos relacionados con el tema central de este trabajo: el pensamiento funcional en alumnos de educación primaria.

3.1 - Early-Algebra

Tradicionalmente, la enseñanza del álgebra se ha retrasado hasta que los alumnos eran adolescentes debido a varias razones, entre los que se encuentra el hecho de que el estudio de la enseñanza-aprendizaje del álgebra es relativamente reciente, las dificultades que se han detectado en los alumnos en cuanto a su aprendizaje y la creencia de que se requería cierto nivel de desarrollo psicológico para asimilar las ideas relacionadas con el álgebra (Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnest, 2006).

En la propuesta Early-Algebra, las relaciones matemáticas, patrones y estructuras aritméticas se consideran el corazón de la actividad algebraica temprana y se sugiere promover la observación de patrones, la realización de conjeturas, la generalización, representación, justificación y comunicación en los alumnos (Kieran et al, 2016). El enfoque Early-Algebra defiende que los alumnos son capaces de trabajar de esta manera desde los primeros cursos de la educación primaria. El álgebra está presente implícitamente en las matemáticas elementales y el enfoque Early-Algebra pretende que el carácter algebraico de las matemáticas se haga explícito.

Uno de los puntos fundamentales de la propuesta Early-Algebra es que se va construyendo el conocimiento de los alumnos basándose en un rico y amplio abanico de problemas contextualizados (Carraher, Schliemann y Schwartz, 2007). Según estos autores, los alumnos aprenden poniendo en práctica la intuición y sus creencias unido a razonamientos y argumentos, no simplemente aplicando normas y empleando la lógica.

Carraher, Schliemann y Schwarts (2007) destacan otra idea fundamental del enfoque Early-Algebra, siendo ésta que la notación puramente algebraica se va introduciendo muy lentamente, permitiendo a los alumnos explorar distintas maneras de representar sus interpretaciones, ideas y conclusiones.

Es necesario tener en cuenta que, según señalan algunos autores como Kaput (2008) o Carraher, Schliemann y Schwartz (2007), el aprendizaje del álgebra requiere un tiempo prolongado y por tanto se debe iniciar su aprendizaje cuanto antes, es decir, al menos en la educación primaria o incluso en infantil. En 1987, Kaput propone la inclusión del razonamiento algebraico en todas las etapas educativas como clave para añadir coherencia, profundidad y poder a las matemáticas escolares, además de eliminar el cambio tardío, abrupto y superficial al álgebra formal de la educación secundaria.

3.2 - Pensamiento funcional

El pensamiento algebraico se puede entender como un acercamiento a situaciones cuantitativas donde se resaltan los aspectos relacionales generales con herramientas que no son necesariamente incógnitas, pero que pueden ser usadas de apoyo para introducir y desarrollar la parte más formal del álgebra escolar (Kieran, 1996, pág. 275). También se puede definir como un tipo de pensamiento mediante el cual los alumnos generalizan ideas matemáticas a partir de unos datos concretos mediante la argumentación y los expresan de diferentes formas, cada vez más formales, aunque adaptadas a su edad (Kaput, 1999). Una parte importante del pensamiento algebraico es la generalización, que Blanton (2008) describe cómo realizar una afirmación que describe una verdad general sobre un conjunto de datos. Para nuestro caso restringimos el concepto de datos a datos matemáticos.

En este contexto, según Molina, Cañadas, Moreno y del Rio (2015) el pensamiento funcional es un tipo de pensamiento algebraico que se basa en la construcción, descripción y razonamiento con y sobre las funciones, entendidas estas como una relación de dependencia entre variables. Otra definición de pensamiento funcional lo proporciona Smith (2008), quién lo describe como pensar sobre la relación entre dos cantidades variables. Según este mismo autor, hay tres ideas mediante las cuales se pueden clasificar las actividades que conectan con las relaciones implicadas en las funciones, que se pueden realizar con el fin de fomentar el pensamiento funcional en alumnos de los primeros niveles de educación primaria. La primera idea es la de identificar un patrón de variación en una secuencia de valores, la segunda es analizar cómo varían simultáneamente dos variables (covariación), y la última idea es la identificación de la correlación entre variables, también denominado correspondencia (Cañadas y Molina, 2016).

Rico (2006) define el pensamiento funcional como pensar acerca de las correspondencias y sus términos, donde dichas correspondencias se pueden expresar de distintas maneras, como pueden ser tablas, gráficos, símbolos y figuras geométricas. A través del pensamiento funcional se pretende que los alumnos sean capaces de detectar similitudes, diferencias, repetición y otros aspectos de las regularidades, junto con la realización de operaciones aritméticas con el fin de generalizar.

A partir de lo anterior, nos centraremos en el concepto de función. Una función es una norma única que asocia elementos de un grupo a elementos de otro grupo (van der Walle, 2007). Este autor afirma que podemos emplear las funciones para entender los cambios en distintos contextos donde un cambio en la variable inicial causa un cambio en la variable dependiente. Por tanto, en este contexto podemos considerar el pensamiento funcional como un tipo de pensamiento algebraico.

Cuando se trabaja con el pensamiento funcional en la educación primaria el objetivo es que los alumnos se centren en la observación, análisis, identificación y comprobación de patrones, a partir de los cuales podrán establecer generalizaciones, argumentarlas y defenderlas de manera justificada (Blanton y Kaput, 2004). Todas estas actividades permiten a los alumnos crear una buena base sobre la que construir conceptos algebraicos más formales.

3.3 - Patrones y tipos de representación de los patrones

Para definir un patrón, comenzamos por la definición que se puede encontrar en el Diccionario de la lengua española (2014) donde, entre otras definiciones, encontramos “8. m. Modelo que sirve de muestra para sacar otra cosa igual”.

Atendiendo a un ambiente más matemático, encontramos la definición de Castro, Cañadas y Molina (2010) donde establecen “lo común, lo repetido con regularidad en diferentes hechos o situaciones y que se prevé que puede volver a repetirse” (p.57). Según Cañadas y Castro (2007) los patrones matemáticos no sólo están relacionados con casos particulares, sino que se relacionan con una regla general. Para simplificar, podemos decir que un patrón es “algo” que se repite. Por tanto, un patrón no es necesariamente sólo numérico, puede ser geométrico o relativo a imágenes. Para este estudio nos centraremos en patrones numéricos, aunque la función que la defina pueda ser representada gráficamente por los alumnos.

El proceso de búsqueda de patrones entre el conjunto numérico donde se aplica una función y el conjunto numérico resultante de aplicar esa función provocan que los alumnos utilicen y desarrollen el pensamiento funcional.

Una vez hallado el patrón, es necesario realizar la representación de dicho patrón. Para ello, los alumnos pueden emplear distintos sistemas de representación, donde esto lo entenderemos como un conjunto estructurado de signos, con reglas y convenios propios, que nos permite expresar aspectos y propiedades de un concepto (Castro y Castro, 1997; Kaput, 1992). Un mismo concepto se puede representar de diferentes modos y esto, junto con sus reglas y convenios, permite proporcionar diferentes caracterizaciones de dicho concepto. Son sistemas de representación las tablas, los gráficos, el simbolismo algebraico y el lenguaje natural, tanto oral como escrito.

Los enunciados de los problemas se suelen expresar en lenguaje verbal escrito. A continuación se muestra un ejemplo de un enunciado (Figura 1).

Mi tío Juan ha abierto un restaurante. Al principio, tiene 2 mesas. Alrededor de cada mesa coloca 4 sillas. ¿Cuántas personas se pueden sentar cómo máximo en su restaurante?

Figura 1: Ejemplo de representación verbal escrita.

La representación verbal escrita se puede emplear tanto en el enunciado de un problema como en su respuesta. Si un alumno escribiese como respuesta “Por cada mesa que tiene Juan en el restaurante se pueden sentar 4 personas más, tengo que multiplicar 4 por el número de mesas que haya”, esto se consideraría una representación verbal escrita. En el caso de que la respuesta anterior se diera de manera oral, estaríamos ante una representación verbal oral. En ambos casos, la representación verbal implica el uso del lenguaje natural para expresar hechos o resultados, ya sea de forma oral o escrita. Este tipo de representación es la más sencilla para los alumnos ya que están acostumbrados en su día a día tanto a hablar como a escribir preguntas y respuestas. No obstante, una característica inherente a los sistemas de representación verbal es la ambigüedad, ya que según el receptor, el mensaje se puede interpretar de maneras diferentes, pudiendo ser clave para ello el uso de entonaciones o gestos (Molina, 2014).

Rico (2009) define la representación simbólica, de carácter alfanumérico, pudiéndose simular con programas informáticos y donde la sintaxis se describe mediante una serie de reglas y procedimientos. Si un alumno emplease la función $f(x) = 4x$, estaríamos ante un sistema de representación simbólico. Debido a que los alumnos en las etapas de educación primaria no están familiarizados con la notación algebraica, esta situación es muy difícil que se observe en nuestro trabajo. Sin embargo, dentro del sistema de representación simbólica se incluyen representaciones con números. Por ejemplo, la función anterior se podría representar como "$P = 4M$", donde P sería el número de personas que se pueden sentar en el restaurante y M el número de mesas que tiene en el restaurante. A diferencia de los sistemas de representación verbal, los sistemas de representación simbólica son de gran precisión ya que, al ser parte del lenguaje matemático, tienen la característica inherente de ésta que es la ambigüedad mínima (Molina 2014).

Otro tipo de representación es el pictórico, es decir, en el que se emplean las imágenes. En el ejemplo anterior, se podría realizar el dibujo de dos mesas que representarían x, y $f(x)$ se puede representar como personas sentadas en las cuatro sillas que rodean cada mesa. Con estas dos modificaciones, la representación habría pasado de simbólica a pictórica. Esta manera de representar las funciones es más sencilla en un primer momento para los alumnos ya que se encuentran muy familiarizados con los dibujos y los suelen emplear para expresarse. Esta representación es muy parecida a la representación simbólica, pero en vez de emplear caracteres alfanuméricos se hace uso de los dibujos.

El último tipo de representación que se va a comentar es la representación tabular, es decir, una representación basada en el uso de tablas. Este tipo de representación nos permite organizar la información relacionando el grupo de números sobre los que se aplica la función con el grupo de números resultantes de aplicar la función. En la figura 2 podemos ver un ejemplo de representación tabular para nuestro caso particular.

Días que han pasado desde mi cumpleaños	Dinero que tengo en la hucha
1	$2 \quad 1 + 8 = €10$
2	$2 \quad 2 + 8 = €12$
3	$2 \quad 3 + 8 = €14$

Figura 2: Tabla que representa el dinero que tiene Juan en su hucha

3.4 - Generalización

Para Piaget (1975) la generalización es un proceso fundamental en la construcción del conocimiento. La generalización tiene como fin establecer regularidades entre lo real y está sometida a la abstracción.

Si atendemos a la etimología de la palabra, generalización significa inferencia general. Esto apunta a que se requiere hacer uso de la lógica para hacer una inferencia que se considera cierta. Para realizar una inferencia se requiere un punto de partida, es decir, unos datos de los que partir, y la inferencia que se realiza será considerada general (Radford, 2015).

Según Radford (2008), la generalización algebraica de patrones incluye las siguientes ideas:

- La identificación de una característica común a un conjunto de elementos.
- La aplicación de esa característica común (generalización) a todos los términos de la secuencia.
- La capacidad de hacer uso de esa generalización para deducir una expresión directa que permita calcular cualquier término dentro de la secuencia.

Este mismo autor diferencia también entre dos tipos de generalizaciones:

- Generalizaciones algebraicas, consideradas como las generalizaciones en las que los alumnos emplean la notación algebraica.

- Generalizaciones aritméticas, donde los alumnos expresan la generalización sin emplear la notación algebraica, de una manera numérica.

Para Cañadas y Castro (2007), la generalización es una expresión que incluye todos los casos posibles, construida mediante la inducción, donde se comienza con casos particulares y se busca llegar al caso general.

3.5 - Investigaciones previas

A continuación sintetizamos investigaciones que indagan en el pensamiento funcional de alumnos de educación primaria, o incluso infantil.

La mayoría de los estudios previos realizados en relación con el pensamiento funcional en alumnos se ha llevado a cabo en las etapas de la educación secundaria ya que, como se ha mencionado antes, ha existido durante mucho tiempo la idea de que los alumnos no eran capaces de poner en marcha este tipo de pensamiento ni entender conceptos relacionados con el álgebra antes de llegar a la etapa de educación secundaria. Investigaciones realizadas a finales del siglo 20 con alumnos de entre 12 y 15 años detectaron limitaciones en la enseñanza-aprendizaje del álgebra cuando los alumnos se enfrentaban a este contenido por primera vez, empleando el tipo de pensamiento que habían desarrollado hasta ese momento, el pensamiento aritmético (Kieran, Pang, Schifter y Ng, 2016). Esta situación hizo que se comenzase a explorar si el pensamiento algebraico podría ser desarrollado por alumnos en cursos anteriores. Según Davis, citado en Kieran et al. (2016), este tema había sido tratado por la investigación desde la década de los 60. Una de las principales influencias en las primeras investigaciones relacionados con la pregunta de si el pensamiento algebraico es accesible a los alumnos de 6 a 12 años de edad fue el documento publicado por el anterior autor en el ICME-5, titulado “Algebraic thinking in the early grades”, citado en Kieran et al. (2016). Hubo también otros trabajos relacionados que surgieron del Early Algebra Research Group que fue apoyado por el Ministerio de Educación de Estados Unidos desde principio hasta mediados de la década de los 90, junto con otras iniciativas del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (Kieran et al, 2016). En la misma época que surgía el movimiento de Early-Algebra en Estados Unidos, surgían otras iniciativas en países como China o Rusia, aunque dichos trabajos no estuvieron disponibles en inglés hasta unos años más tarde (Kieran et al, 2016). En los últimos años este movimiento se ha extendido a otros países (Blanton, 2008;

Merino, 2012; Molina, 2006; Kolovou, van den Heuvel-Panhuizen y Köller, 2013) e incluso se ha realizado algún estudio relacionado con el rol del docente (Malara, 2003; Godino, Aké, Gonzalo y Wilhemi, 2014).

Blanton y Kaput (2004) realizaron un estudio con alumnos de 3 a 10 años de edad. El problema al que se enfrentaron fue el mismo en todas las etapas, el problema del número de ojos y colas: dado un número total de perros, ¿cuántos ojos habrá? ¿Y cuántas colas? ¿Y entre ojos y colas? En los niveles más bajos, los alumnos disponían de recortables de los animales y contaban el número de ojos y colas, siendo el profesor quien lo organizaba en tablas en la pizarra. Los alumnos de 5 años fueron capaces de identificar un patrón básico respecto al número de ojos, comentando que se "saltaban" los números impares. Con 6 años, los alumnos eran los que organizaban los datos en tablas, no el profesor, e identificaron que el número de ojos era "doble" del número de perros y el total de ojos y colas era el "triple". Con 7 años, los alumnos, tras organizar datos en tablas, fueron capaces de realizar predicciones del número de ojos y número de ojos más colas para 100 perros. Ya con 8 años los alumnos no sólo eran capaces de realizar predicciones sobre el número de ojos u ojos más colas que habría, sino que fueron capaces de expresar que el número de ojos sería $2n$ ó $n \quad 2$. La única diferencia notable entre los alumnos de 8 años y los de 9 ó 10 era que éstos últimos necesitaron menos ejemplos consecutivos para identificar el patrón. Los alumnos emplearon distintos tipos de representaciones en las distintas etapas, entre las que se incluyeron tablas, gráficas, palabras, símbolos y dibujos, con el fin de darle sentido a la tarea. Los alumnos de tercer curso, de 8 años de edad, eran capaces de pasar el patrón que estaban comentando y observando a una representación simbólica. Este estudio deja claro el hecho de que los alumnos son capaces de poner en juego el pensamiento funcional incluso en las etapas de la educación infantil y sugiere que los alumnos son capaces de identificar la correlación entre dos variables y describir relaciones de correspondencia entre cantidades tan pronto como primero de primaria. Los resultados de otros estudios de estos autores (Blanton y Kaput, 2005) confirman estas evidencias.

En 2006, Warren y Cooper publicaron un trabajo donde se recopilaba una experiencia de aula en la que se promovía el pensamiento funcional mediante el trabajo con patrones. Se presentaba una secuencia con fichas rojas y verdes. Los alumnos trabajaron en parejas con sus propias fichas e intentaban contestar a las preguntas que se les hacía de manera verbal, donde los investigadores pretendían observar cómo ponían en funcionamiento el pensamiento funcional al trabajar con esta tarea. Desde que son pequeños, los alumnos trabajan mucho con tareas de patrones que se repiten y el objetivo de la experiencia de aula en concreto que presentaban era aprovechar ese conocimiento ya adquirido para trabajar otros conceptos matemáticos más complejos. Los alumnos demostraron que eran capaces de representar las relaciones entre los dos conjuntos, fichas rojas y verdes, de maneras que anteriormente se habían considerado imposibles para alumnos de primaria. La secuencia se componía de una ficha roja seguida de dos fichas verdes. Los alumnos debían identificar el número de fichas rojas, verdes y el total antes de continuar la secuencia. Una vez contestadas estas tres preguntas, se les pedía a los alumnos que continuasen la serie y después que volviesen a contestar a las tres preguntas sobre el número de fichas. El profesor organizaba esta información en una tabla a medida que los alumnos iban contestando a las preguntas. Se repetía este proceso varias veces. Tras esto, se les preguntaba a los alumnos por la relación entre el número de fichas. Se obtuvieron respuestas tales como "Las rojas incrementan de 1 en 1", "Las verdes incrementan de 2 en 2" o "Hay el doble de verdes que de rojas", "el número de veces que se repite el patrón es igual que el número de fichas rojas" o "El total incrementa de 3 en 3". Si n se considera el número de fichas rojas, el número de fichas verdes sería $2n$ y el total de fichas sería $2n + n2$ ó $3n$. Por tanto, aunque los alumnos en este caso no llegaron a representar la relación mediante simbolismo algebraico, sí fueron capaces de identificar la relación funcional y la correspondencia entre el número de fichas de distinto color y el total de fichas.

Carraher, Schliemann y Schwartz (2007) llevaron a cabo un estudio con alumnos de ocho años, donde se les planteaba una tarea sobre el número de caramelos que hay en dos cajas que pertenecen a dos niños, donde una caja tiene 3 caramelos más que la otra. En un principio los alumnos intentaban asignar cantidades exactas a las cantidades de caramelos en una y en otra caja o no tenían en cuenta la relación entre las cantidades de cada caja o se centraban en igualar las cantidades. Tras trabajar con los alumnos de forma oral, fue cobrando mayor importancia la correspondencia entre ambas cantidades en vez de la asignación de cantidades exactas.

Merino, Cañadas y Molina (2013) llevaron a cabo un estudio con alumnos de quinto curso de educación primaria en la que se analizaron las respuestas obtenidas en una prueba escrita donde se planteaba una tarea de identificación de patrones. Los alumnos debían partir de un ejemplo genérico y llegar a la generalización. Un ejemplo genérico es aquel que puede ser representante característico de determinada clase, es decir, se ajusta a las propiedades, características y estructura de esa clase, aunque se trata de un ejemplo concreto (Balacheff, 2000). Observó que los alumnos eran capaces de trabajar en este tipo de tareas y que el tipo de representación mayormente empleado era la representación pictórica cuando los números con los que se trabajaban eran pequeños. Cuando las cantidades eran mayores, se empleaba mayoritariamente el cálculo numérico, recurriendo a distintos patrones. Se identificaron ciertas dificultades con una cuestión donde se introducía el término n, indicando que les es más sencillo a los alumnos trabajar con sus propias representaciones que con terminología algebraica.

Cañadas y Fuentes (2015) realizaron un estudio exploratorio con alumnos de primer curso de educación primaria. Este estudio concuerda con el anterior en sus resultados en cuanto al tipo de representación mayormente empleado, siendo este el pictórico. Partiendo de esta representación, los alumnos daban respuestas simbólicas (números) o algunos emplearon la representación verbal escrita para responder a las cuestiones. Un problema que se manifestó en estos casos fue que, al ser alumnos de primer curso de primaria, donde la lectura y escritura todavía se están desarrollando y los alumnos no tienen demasiada soltura, las explicaciones dadas de manera escrita son pobres e incluso difíciles de entender. A pesar de estas dificultades, los alumnos dieron muestras de pensamiento funcional y de detección de patrones, objetivos de dicha investigación.

En 2016, Cañadas, Brizuela y Blanton publicaron un trabajo con los resultados obtenidos de trabajar el pensamiento funcional con un grupo de alumnos de segundo de primaria. Analizaron las relaciones que establecían los alumnos cuando se enfrentaban a situaciones que involucraban una función lineal. Trabajaron durante 8 semanas con estos alumnos, impartiendo dos clases a la semana donde se centraban en desarrollar su pensamiento funcional. Para el trabajo publicado se centraron en la sesión 4, el problema de las mesas de cumpleaños, donde se trabajaba con la función $f(x) = 2x$. Como resultados de este estudio se demuestra que los alumnos que participaron entendían la relación funcional y tenían diferentes maneras de expresar la relación que entendían, incluyendo representaciones verbales, gráficas, pictóricas y simbólicas. Además, estos alumnos buscaban generalizar la relación funcional y establecerlo como una norma. La notación algebraica se introdujo en la segunda de las sesiones de clase. Anteriormente los alumnos no habían trabajado con esta notación y, sin embargo, algunos entendieron enseguida su utilidad y lo empleaban para expresar las relaciones que iban descubriendo en las distintas sesiones de clase.

Con todo lo anterior queda patente que el campo del pensamiento funcional en la educación primaria es un campo en auge aunque bastante reciente, en el que todavía se requiere indagar más a fondo y realizar un mayor número de estudios para que pueda constituirse una base sólida de evidencias.

Capitulo 4 - Metodología

En este apartado se ofrece una descripción de las características de los alumnos que participaron en el proceso de recogida de datos, del tipo de investigación que se ha llevado a cabo, del diseño del instrumento de recogida de datos y del proceso seguido en dicha recogida de datos.

4.1 - Sujetos

Fueron 25 los alumnos que participaron en el proceso de recogida de datos. Todos ellos cursaban tercero de educación primaria en el curso 2014-2015 y por tanto sus edades estaban comprendidas entre los 8 y 9 años. Asisten a un colegio privado de línea 1 de los alrededores de Granada, donde se imparte educación infantil de 0 a 5 años y las seis etapas de educación primaria.

4.1.1 - Conocimientos previos

Los alumnos no habían trabajado previamente tareas específicas donde debían identificar patrones, realizar generalizaciones o emplear sistemas de representación con el fin de expresar dichos patrones o generalizaciones. Tampoco había recibido instrucción explícita para el desarrollo de este tipo de tareas. El currículo actual incluye específicamente trabajar la identificación de patrones como un contenido a abordar durante la educación primaria, aunque la legislación anterior, que se encontraba en vigor en el momento de la recogida de datos, no incluía específicamente dichos contenidos y por tanto es de esperar que no se hubieran trabajado con los alumnos.

En lo que respecta a las representaciones vinculadas al pensamiento relacional, disponían de cierta experiencia en el uso de tablas para sintetizar información cuantitativa relativa a situaciones de aula (ej., votaciones, mediciones).

4.2 - Tipo de investigación

Esta investigación es de tipo exploratorio y descriptivo (Hernández, Fernández y Baptista, 2010). Se considera exploratorio porque las investigaciones relacionadas con el tema son pocas y bastante recientes. No existen trabajos previos a nivel nacional en España en relación con el pensamiento funcional que puedan mostrar alumnos de tercero de primaria. Se considera también descriptivo porque se pretende realizar una descripción de los procesos y representaciones realizados y empleados por los alumnos en relación con el pensamiento funcional. Además, este estudio se enmarca dentro de una metodología cualitativa (Taylor y Bogdan, 1988) ya que se producen datos descriptivos acerca de las respuestas dadas por los alumnos y sus justificaciones, recogidas mayoritariamente de manera escrita en el cuestionario y complementadas con las intervenciones verbales de la sesión grabada de clase en la que se completó el cuestionario.

4.3 - Instrumento de recogida de datos

El instrumento de recogida de datos empleado ha sido una prueba escrita que consta de ocho cuestiones (Anexo 1)[1]. Está diseñada para ser completada en una sesión de una hora y media. Forma parte de una serie de cuestionarios diseñados para ser trabajados en cuatro sesiones de clase, en los cursos de primero, tercero y quinto (Molina, Cañadas, Moreno y del Rio, 2015). Se parte de un contexto familiar para los alumnos, en este caso las edades de dos hermanos, y se les pide contestar a ocho cuestiones relacionadas con ese contexto. Las primeras cuestiones refieren a casos concretos con el fin de que los alumnos perciban la relación funcional. Conforme se avanza en la tarea las cuestiones pretenden llevar a los alumnos a la generalización de la situación, más allá de los casos particulares. Las cuestiones involucran una función lineal, $x + 5$, sobre el conjunto de los números naturales. Se les pide a los alumnos el empleo de diferentes sistemas de representación: el lenguaje verbal, tanto escrito como oral, tablas para organizar datos y una expresión alfanumérica para poner de manifiesto la relación entre las edades de los dos hermanos.

El texto que contextualiza la situación es el que se encuentra en la Imagen 1:

Sesión 1. María y Raúl son dos hermanos que viven en La Zubia. María es la hermana mayor. Sabemos que María es 5 años mayor que Raúl. ¿Qué edad tiene cada uno?

Imagen 1: Texto de partida para la tarea.

[1] Los cuestionarios completados por los alumnos y analizados en el presente trabajo se pueden consultar en el siguiente enlace: https://www.dropbox.com/s/zlyd844tfxtfa6v/Cuestionarios.pdf?dl=0

Las primeras tres preguntas de la tarea tienen como objetivo que los alumnos exploren la relación funcional mediante el estudio de casos concretos, trabajando únicamente con números naturales. En la primera pregunta se les dice a los alumnos que Raúl tiene 7 años, en la segunda tiene 15 y en la tercera 80. En las tres se pregunta por la edad de María y una explicación de cómo saben la edad de María.

Con las preguntas siguientes se pretende dirigir la atención de los alumnos hacia la relación funcional de forma general, guiándolos hacia la relación que vincula ambas variables que se les presenta en el texto y alejándolos de los casos concretos. Se pide además que los alumnos hagan uso de diferentes representaciones como tablas para organizar los datos y letras para expresar la relación funcional de manera general.

La cuarta pregunta se les realiza de forma oral a los alumnos y está incluida en la transcripción de la grabación de la sesión de clase, en el Anexo II. Se plantea la siguiente situación: Tenemos una foto de un cumpleaños de Raúl de hace tiempo. En la En la foto aparece Raúl con sus amigos y con María, soplando las velas de la tarta. ¿Cómo puede averiguar María cuántos años tenía en ese cumpleaños? En la foto está la tarta con las velas de Raúl.

Tras esta indicación verbal, se les pedía a los alumnos que explicaran cómo podrían saber la edad de María en la situación descrita. Después de esto se les pedía a los alumnos que organizasen los datos obtenidos en las cuestiones anteriores en una tabla.

En la cuestión cinco se le daba una tabla con tres columnas: Edad de Raúl, Operación para calcular la edad de María y Edad de María. En la primera columna, Edad de Raúl, se proporcionaban tres edades distintas: 7, 15 y 80 años. Se pedía que los alumnos completaran la tabla con los datos que faltaba para las tres edades dadas y el resto de la tabla sugiriendo otras cuatro edades más para Raúl y las correspondientes para María. Esta cuestión sentaba la base para la cuestión seis, donde se pedía que los alumnos asignasen, al final de la columna Edad de Raúl, una letra que representase la variable "edad de Raúl". Al final de la siguiente columna, Operaciones para calcular la edad de María", se pedía emplear la variable asignada a "edad de Raúl" para calcular la edad de María. Se buscaba que los niños expresasen de forma alfanumérica la relación entre la edad de Raúl y la de María.

La cuestión 7 daba la edad de María, 66 años, y preguntaba por la edad de Raúl. Se requería también que los alumnos explicarán cómo sabían la edad que tendría Raúl.

La última cuestión planteaba que si sabíamos la edad de María, ¿cómo podríamos saber la edad de Raúl? Se requería que los alumnos explicasen de manera verbal escrita la relación entre las edades de ambos hermanos sin proporcionarles un caso particular de edades. De esta manera se podía observar si los alumnos habían realizado la generalización de la relación y si eran capaces de explicarlo.

Para complementar los datos recogidos en el cuestionario escrito, se realizó una grabación en vídeo de la sesión en la que los alumnos completaron la prueba escrita y además discutieron sus resultados en voz alta de una manera guiada por parte de dos de los miembros del equipo de investigación, siendo una de ellas la tutora oficial del presente trabajo. La transcripción de la grabación se encuentra en el Anexo II.

4.4 - Proceso de recogida de datos

La recogida de datos tuvo lugar en una sesión ordinaria de clase, de una duración de hora y 30 minutos, grabado también en vídeo. Asistieron 25 alumnos.

Dos miembros del equipo de investigación estuvieron presentes en la recogida de datos y se encargaron de la sesión, tanto de repartir los cuestionarios como de contextualizar la situación de la tarea, resolver las dudas que surgían y de dirigir la parte oral de la sesión y el debate sobre las cuestiones incluidas en el cuestionario.

Capítulo 5 - Análisis de datos

En este capítulo analizamos las respuestas de los alumnos al cuestionario teniendo en cuenta principalmente sus producciones escritas. Las intervenciones orales de los alumnos se han tenido en cuenta para complementar algunas de las respuestas que han proporcionado. Las tres primeras cuestiones se han analizado conjuntamente ya que todas ellas presentan la misma estructura. En estas tres cuestiones se les proporcionaba a los alumnos casos concretos con la edad de Raúl para que los alumnos averiguasen la edad de María, con el objetivo de que los alumnos explorasen la relación funcional.

Para mantener el anonimato de los alumnos que participaron en la recogida de datos, se le ha asignado un número a cada uno de ellos y por tanto se hace referencia al Alumno 1, Alumno 2 y así sucesivamente.

El objetivo de las cuestiones que se les pidió contestar a los alumnos era el de evaluar qué son capaces de hacer un grupo de alumnos quienes no han tenido experiencia previa con actividades donde deben poner en marcha el pensamiento funcional. El objetivo no era el de evaluar únicamente la corrección de la tarea ni centrarse sólo en los errores de los alumnos, sino centrarse en lo que son capaces de hacer.

5.1 - Cuestiones 1, 2 y 3.

En las tres primeras cuestiones se les proporcionan ejemplos específicos no consecutivos donde se indica la edad de Raúl, a partir de la cual los alumnos deben calcular la edad de María. En el texto de introducción de la tarea ya se les ha indicado a los alumnos que María es cinco años mayor que su hermano Raúl. Los alumnos deben usar esta información para calcular la edad de María. Se les pide también que expliquen cómo han averiguado la edad de la hermana. Todos los alumnos contestaron a las tres cuestiones correctamente.

Tabla 1. Respuestas, justificaciones y sistemas de representación empleadas por los alumnos en las cuestiones 1,2 y 3

		Representación		Justificación		Identifica relación entre las edades	
Cuestión	RC	V	N	V	N	Sí	Explícitamente
1	25	5	20	17	16	25	5
2	25	4	21	18	15	25	6
3	25	5	20	13	19	25	5

Nota: CC = responde correctamente, V = verbal; N = numérica

La relación que han identificado los alumnos en estas tres cuestiones se puede expresar mediante una sentencia numérica, del tipo $a + b = c$, siendo a la edad de Raúl, b los años de diferencia entre las edades y c es la edad de María.

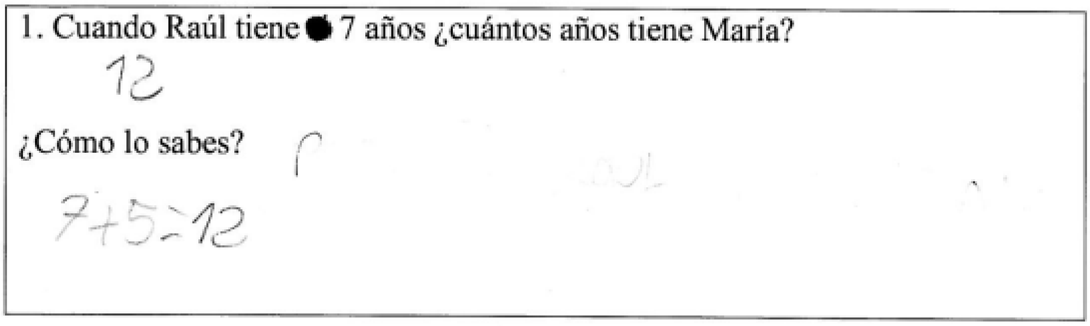
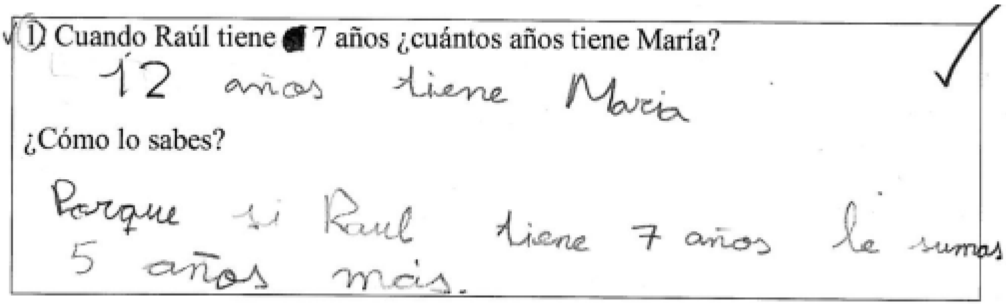


Imagen 2: Respuesta del Alumno 5 a la cuestión 1.

La mayoría de los alumnos proporcionan una respuesta numérica. Cinco alumnos prefirieron especificar aun más su respuesta e explicitaron que su respuesta numérica se refería a la edad de María, como se puede ver en la Imagen 3.



1) Cuando Raúl tiene 7 años ¿cuántos años tiene María?

12 años tiene María

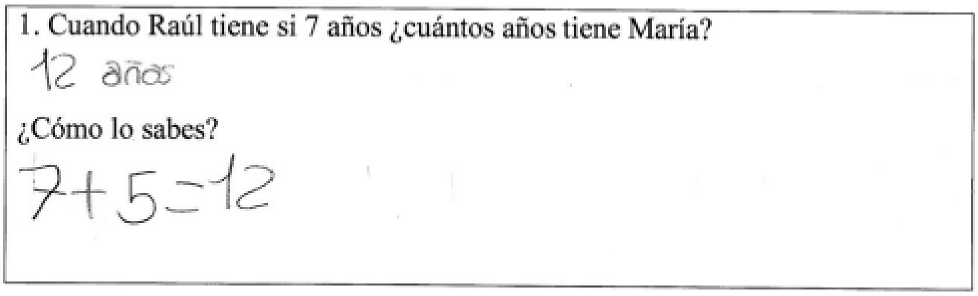
¿Cómo lo sabes?

Porque si Raul tiene 7 años le sumas 5 años más.

Imagen 3: Respuesta del Alumno 22 a la cuestión 1.

En la cuestión 1 hay seis alumnos que identifican explícitamente la relación funcional entre las edades según ponen de manifiesto sus justificaciones verbales. En las siguientes dos cuestiones son cinco los alumnos que identifican explícitamente esta relación. Esto lo demuestran con su explicación acerca de cómo saben la edad de María, de las que se puede interpretar que han percibido y empleado la relación funcional entre las edades de los hermanos. Sus explicaciones se asemejan a la proporcionada por el Alumno 17, quien dice que sabe la edad de María "Porque María es 5 años mayor que Raúl entonces $5 + 7 = 12$".

Hay casos donde algunos alumnos emplearon únicamente una justificación verbal, otros utilizaron una justificación numérica representando la suma que les ha llevado al resultado (Imagen 5) y otros se apoyaron en ambos tipos de representación, como se puede observar en la Imagen 6.



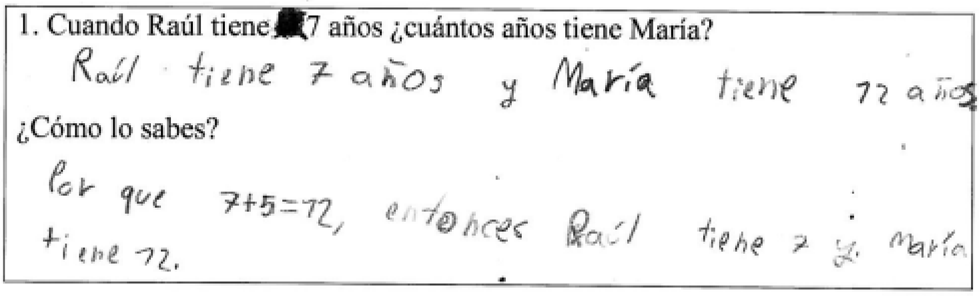
1. Cuando Raúl tiene si 7 años ¿cuántos años tiene María?

12 años

¿Cómo lo sabes?

7+5=12

Imagen 4: Respuesta y justificación del Alumno 19.



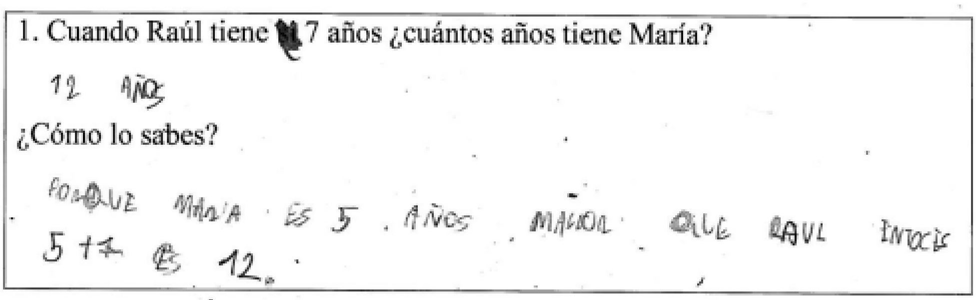
1. Cuando Raúl tiene [redacted]7 años ¿cuántos años tiene María?

Raúl tiene 7 años y María tiene 12 años

¿Cómo lo sabes?

Por que 7+5=12, entonces Raúl tiene 7 y María tiene 12.

Imagen 5: Justificación verbal escrita y numérica del Alumno 24.



1. Cuando Raúl tiene [redacted]7 años ¿cuántos años tiene María?

12 años

¿Cómo lo sabes?

PORQUE MARIA ES 5 AÑOS MAYOR QUE RAUL ENTONCES 5+7 ES 12.

Imagen 6: Justificación del Alumno 17.

Un caso a resaltar es el Alumno 3. La respuesta que proporciona en la cuestión 1 es correcta, 12 años, en la justificación de la cuestión 1 expresa que “porque María tiene 5 más”. En la justificación de la cuestión 2 escribe “porque sumando María tiene 15, ella 5 más”. Demuestra que ha identificado la relación entre las edades explícitamente y que “ella tiene 5 más”. Pero en la cuestión 3 su justificación pasa a ser simplemente una sentencia numérica: “$80 + 5 = 85$”.

5.2 - Cuestión 4

Esta cuestión se componía de dos partes. La primera parte no tenía enunciado escrito sino que se explicó de manera verbal a los alumnos. Este enunciado queda recogido en el apartado 4.3 del presente trabajo además de en la transcripción de la sesión en el Anexo II. Se les preguntaba a los alumnos por cómo podría María saber su edad si estaba observando una foto de un cumpleaños de Raúl, donde salían ambos con la tarta, y sobre ésta estaban las velas que representaban la edad que cumplía Raúl.

Tabla 2. Respuestas y sistemas de representación empleadas por los alumnos en la primera parte de la cuestión 4

			Representación	
Responden	Relación funcional de manera general	Otro ejemplo concreto	Pictórica	Verbal
24	16	9	2	22

Nota: n=25

Se ha considerado para este apartado que hay 16 alumnos que han llegado a generalizar la relación funcional entre las edades de los hermanos, explicando cómo podría María calcular su edad viendo la foto del cumpleaños donde aparecen las velas numéricas en la tarta de Raúl. Estos alumnos han proporcionado respuestas que siguen la estructura general de "viendo las velas de la tarta le sumamos cinco". Este tipo de respuestas se demuestra en las producciones mostradas en las imágenes 7 y 8.

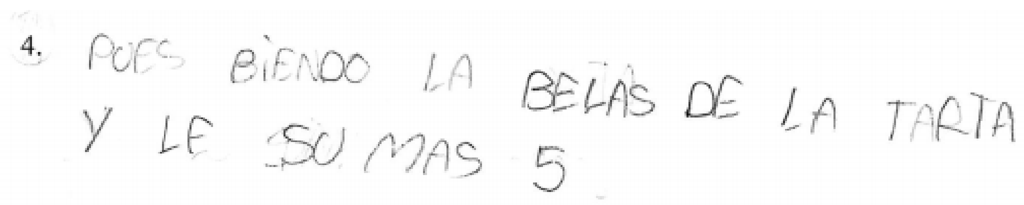


Imagen 7: respuesta dada por el Alumno 18 en la primera parte de la cuestión 4.

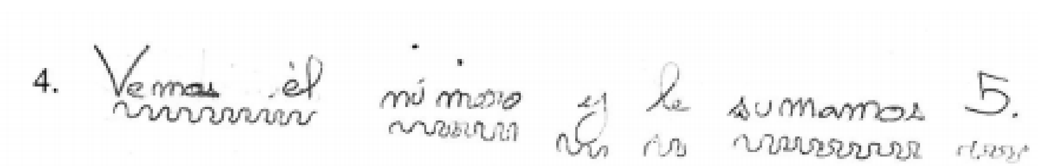


Imagen 8: respuesta dada por el Alumno 25 en la primera parte de la cuestión

Algunos alumnos han querido dejar más claro su explicación proporcionando también un ejemplo. Una muestra de este tipo de respuesta se encuentra en la Imagen 9 y 10.

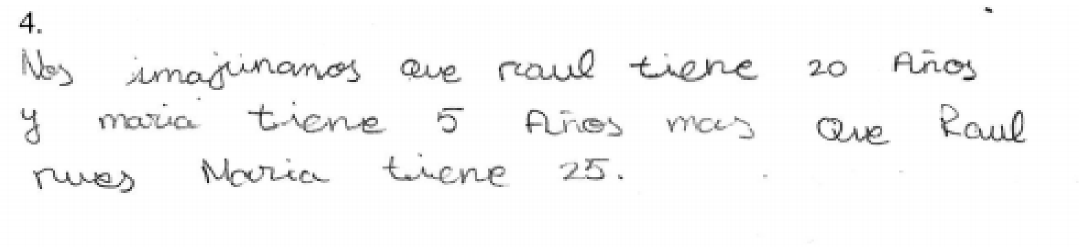

4.
Nos imajinamos que raul tiene 20 Años
y maria tiene 5 Años mas Que Raul
pues Maria tiene 25.

Imagen 9: respuesta dada por el Alumno 5 en la primera parte de la cuestión 4

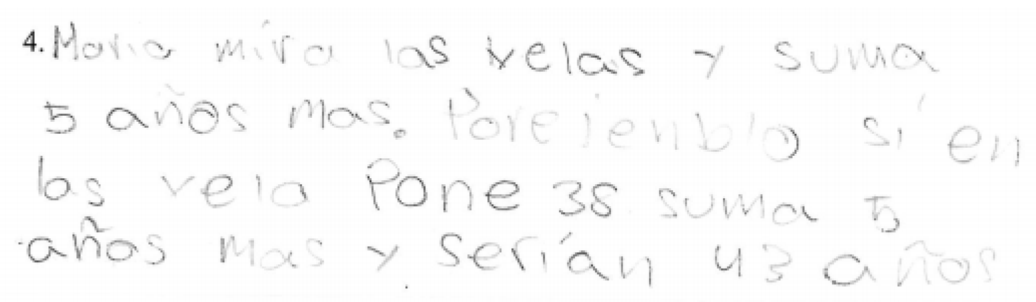

4. Maria mira las velas y suma
5 años mas. Porejenplo si en
las vela Pone 38 suma 5
años mas y serían 43 años

Imagen 10: respuesta dada por el Alumno 8 en la primera parte de la cuestión 4.

Del total de alumnos que contestaron y que han expresado la relación funcional de manera generalizada, hubo 2 quienes no proporcionan un ejemplo concreto para apoyar su explicación, como se puede ver en las imágenes 7 y 8, y 11 alumnos quienes apoyaron sus generalizaciones con ejemplos concretos, como se muestra en la imagen 12.

En esta cuestión solo hay un alumno, el Alumno 16, quien no contesta. Como se puede observar en la Tabla 2, esta es la primera cuestión donde las representaciones no son únicamente verbales o simbólicas, sino que hay dos alumnos, Alumno 9 y Alumno 14, quienes emplean una representación pictórica para representar su respuesta. Destacamos que en ambos casos los alumnos no demostraron mediante su representación la relación entre las edades de los hermanos, sino que más bien representaron la situación que se describe en el enunciado: una tarta con velas de números encima representando la edad de Raúl.

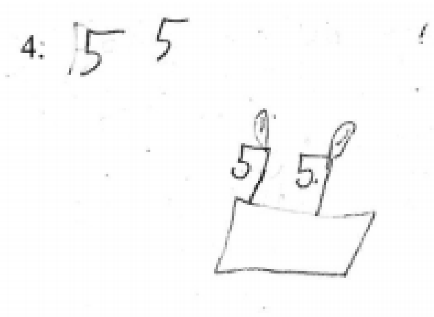


Imagen 11: respuesta pictórica del Alumno 10 en la cuestión 4.

El resto de alumnos emplearon una representación verbal escrita para responder a la cuestión en el cuestionario. Cabe mencionar el caso particular del Alumno 3, quien escribe en el cuestionario “90, porque en su anterior cumpleaños tenía 85+5=90”. Sin embargo, en la puesta en común oral de la sesión de recogida de datos comenta, tras completar el cuestionario, que no ha entendido la pregunta. Se le repite el enunciado de manera verbal y el alumno concluye que “(María puede calcular su edad) mirando las velas de la tarta y le sumas cinco a la edad de Raúl”. Por tanto, aunque la respuesta escrita no es correcta, su respuesta oral sí lo es y se ha considerado dentro de los 16 alumnos quienes dieron una respuesta donde se demostraba haber generalizado la relación entre las edades de los hermanos.

La segunda parte de esta cuestión pedía a los alumnos que representasen los datos obtenidos de las edades de Raúl y María de las cuestiones anteriores en una tabla. En esta cuestión los alumnos han representado los datos de diversas maneras, no sólo en tablas como se le pedía.

Tabla 3. Respuestas y representaciones empleadas por los alumnos en la segunda parte de la cuestión 4

			Representación empleada		
			Tabla	Otras	
Responden	Datos anteriores	Amplía		Valores emparejados	Valores no emparejados
25	16	9	10	4	11

Es interesante destacar que de 25 alumnos que contestaron a la cuestión, 10 de ellos representaron los datos en tablas y 15 de ellos emplearon otro tipo de representación para organizar los datos.

Para clasificar los otros tipos de representaciones que no son tablas se ha considerado si en la representación se demuestra que los valores van por parejas o no. Hay dos alumnos que han empleado representaciones donde se demuestra que los valores van emparejados. El Alumno 24 ha escogido una representación verbal escrita, donde ha redactado las edades de los dos hermanos con oraciones del tipo “cuando Raúl tenía 7, María tenía 12”. Es interesante destacar que este alumno especifica al final la relación entre las edades de los hermanos. Llama la atención el hecho de que el alumno no sólo resalta la relación directa entre las edades, sino que identifica también la relación inversa indicando “María tiene 5 años menos que Raúl”.

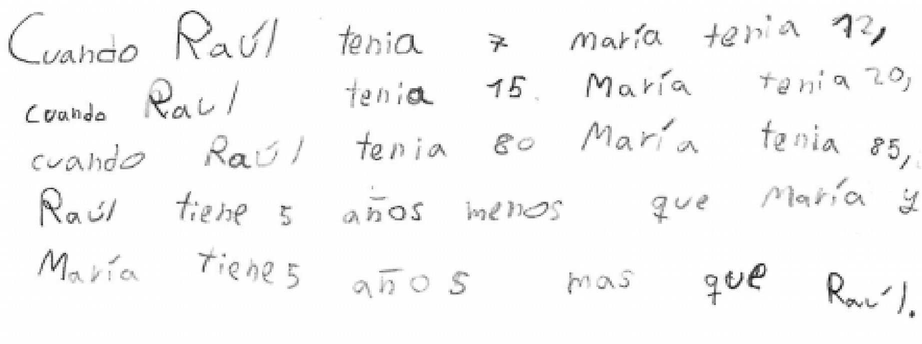

Cuando Raúl tenia 7 maría tenia 12,
cuando Raul tenia 15. María tenia 20,
cuando Raúl tenia 80 María tenia 85,
Raúl tiene 5 años menos que María y
María tiene 5 años mas que Raúl.

Imagen 12: respuesta del Alumno 24 a la segunda parte de la cuestión 4.

La representación empleada por el Alumno 15 se asemeja a un diagrama de barras, donde las barras se encuentran divididas horizontalmente en dos secciones: la sección inferior representa la edad de Raúl y la sección superior representa la edad de María. Cabe señalar que en esta representación el alumno no construye ni respeta ninguna escala pero sí muestra la diferencia constante de 5 que hay entre los pares de valores.

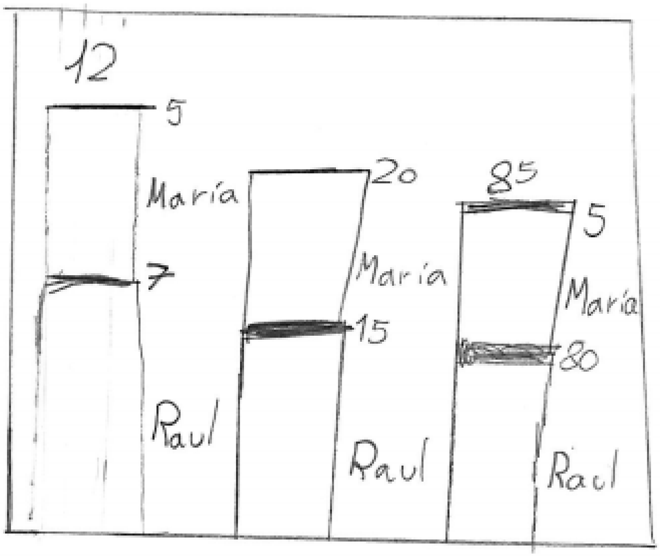


Imagen 13: representación del Alumno 15 en la segunda parte de la cuestión 4.

En la Imagen 14 se aprecia que el alumno ha empleado una representación que se podría asemejar a un diagrama de barras para representar la información que ha obtenido acerca de las edades de los hermanos. Las barras en posición impar indican la edad de Raúl y las barras en posición par indican la edad de María. Cada una de las barras las ha dividido en secciones y por tanto siempre se puede constatar la diferencia de cinco entre las edades de los hermanos. Además, ha empleado una escala para representar los valores en las barras, punto en el que difiere de la representación anterior del Alumno 15, quien no empleaba ninguna escala.

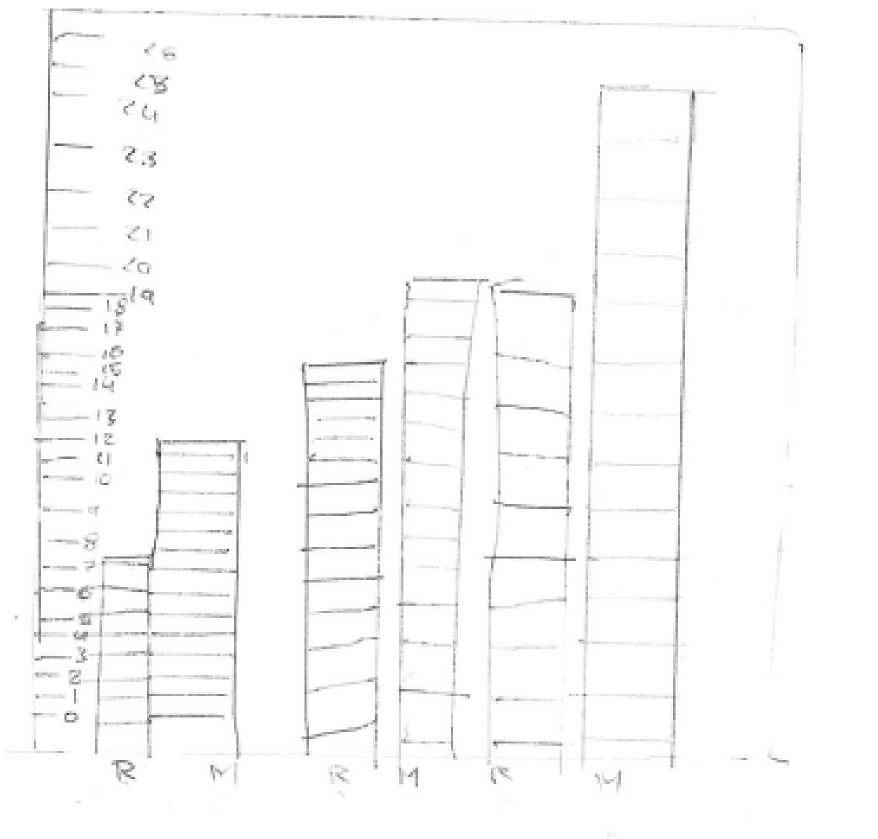


Imagen 14: representación del Alumno 7.

En la categoría de representaciones donde no se demuestra claramente que los valores están emparejados podemos encontrar gran riqueza de representaciones. Una de ellas es la representación del Alumno 13, quien ha representado las edades de los hermanos en el eje vertical y en el eje horizontal ha escrito los nombres de los hermanos varias veces, uniendo el nombre de un hermano mediante una línea con la edad.

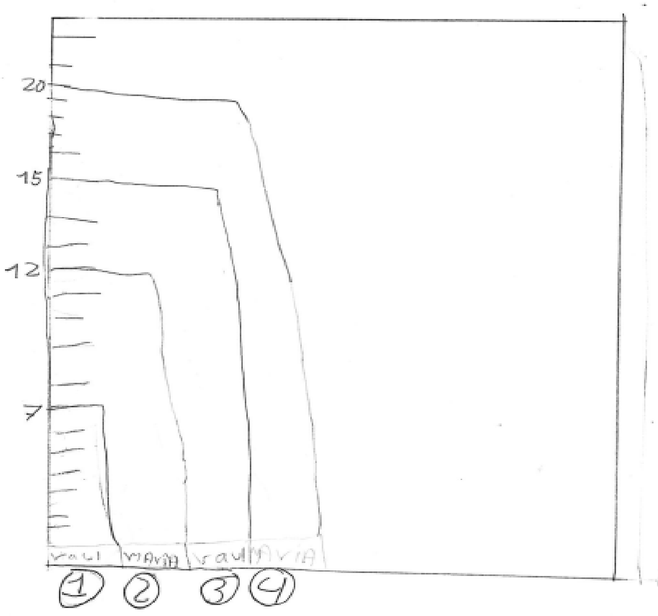


Imagen 15: representación del alumno 13 en la segunda parte de la cuestión 4.

Hay tres alumnos quienes han empleado un tipo de representación donde encontramos dos grandes columnas, una representando la edad de María y otra la edad de Raúl. En el eje vertical se representan las edades, se dibujan líneas horizontales que dividen las columnas verticales en secciones y se colorean las secciones según las edades de los hermanos. Esto se puede observar en la Imagen 15. Uno de estos tres alumnos ha representado las edades de manera ascendente en el eje vertical izquierdo, ha continuado las edades por el eje horizontal superior y de ahí por el eje vertical izquierdo, representando a lo largo de los tres bordes los valores desde el 1 hasta el 68. Esto lleva a confusión cuando se observa su representación porque no se sabe si ha tomado como referencia los valores del eje derecho o izquierdo cuando ha coloreado las casillas de su representación (Imagen 16).

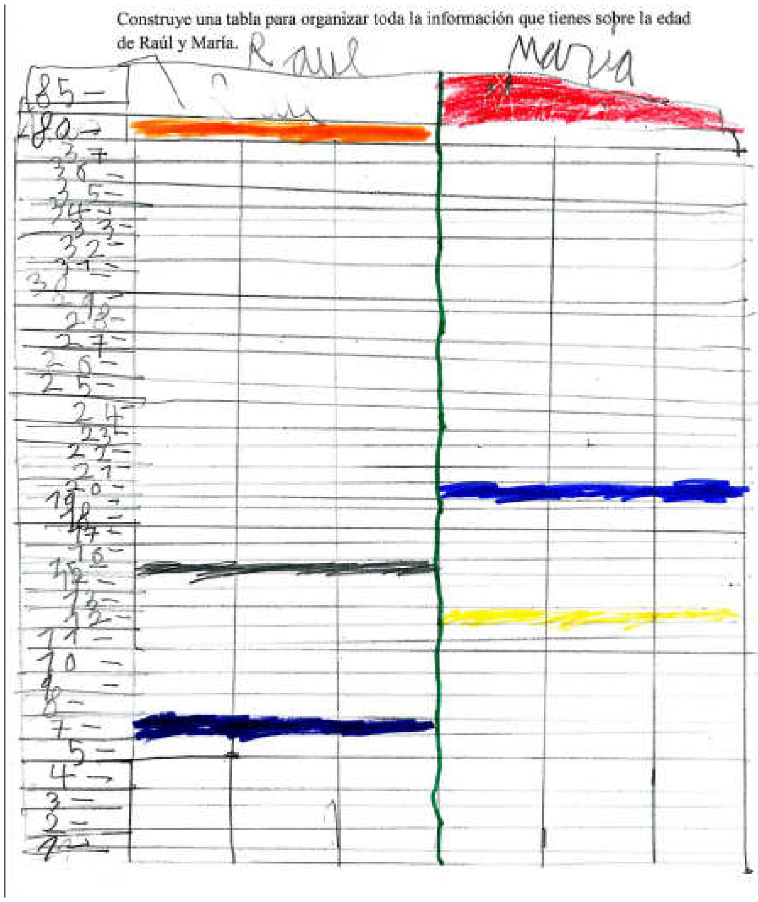


Imagen 15: representación del Alumno 1 en la segunda parte de la tarea 4

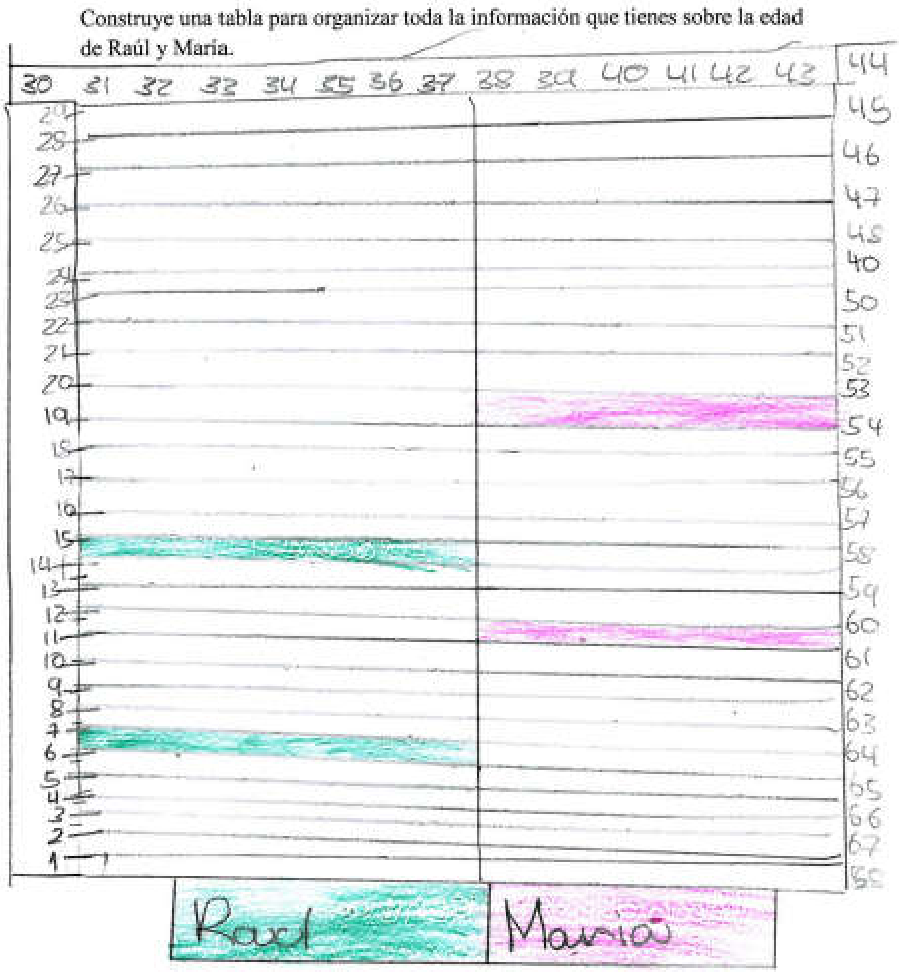


Imagen 16: representación gráfica del Alumno 21.

Un alumno comienza la tabla representando los datos obtenidos en las cuestiones 1, 2 y 3 y luego amplió con sus propios datos, incluyendo algunos que serían considerados imposibles en el caso concreto de las edades de los hermanos, ya que es casi imposible que alguien llegue a las edades de 100 y 105 años, e imposible llegar a las edades de 199 y 204. Este hecho es interesante ya que demuestra que el alumno se centra en la relación que ha generalizado e ignora por completo el contexto.

Los Alumnos 8 y 23 no sólo representaron los datos sino que representaron qué debían hacer con la edad de Raúl para obtener la edad de María: sumar 5. Al igual que el Alumno 4, que se ha comentado ya, el Alumno 23 amplía los datos, no se ciñe sólo a los obtenidos en las cuestiones anteriores, pero plantea edades que no serían posibles ya que supera las edades viables para un ser humano.

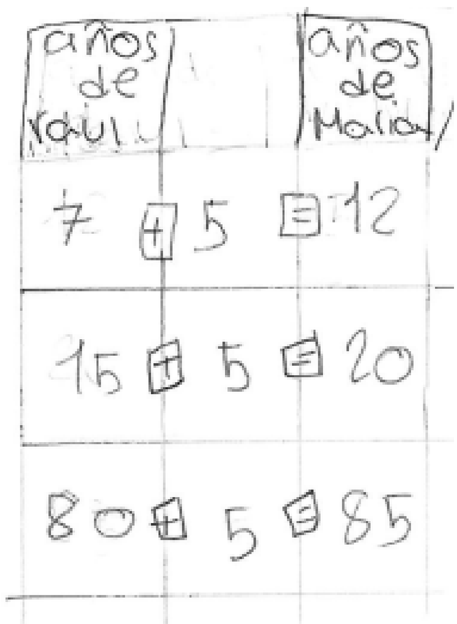


Imagen 18: Representación del Alumno 8 en la segunda parte de la cuestión 4

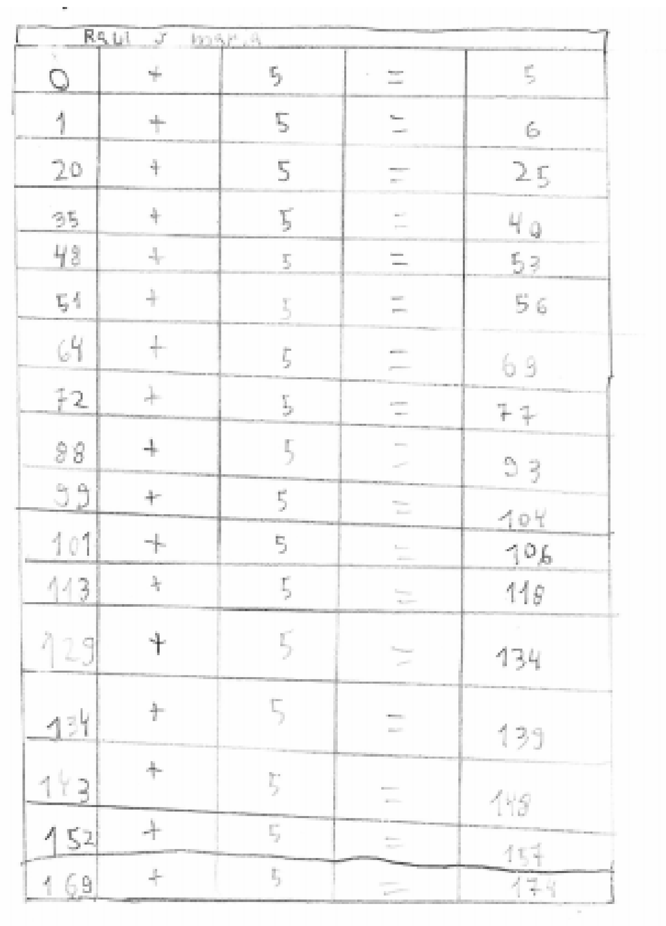


Imagen 19: representación del Alumno 23 en la segunda parte de la cuestión 4

5.3 - Cuestión 5

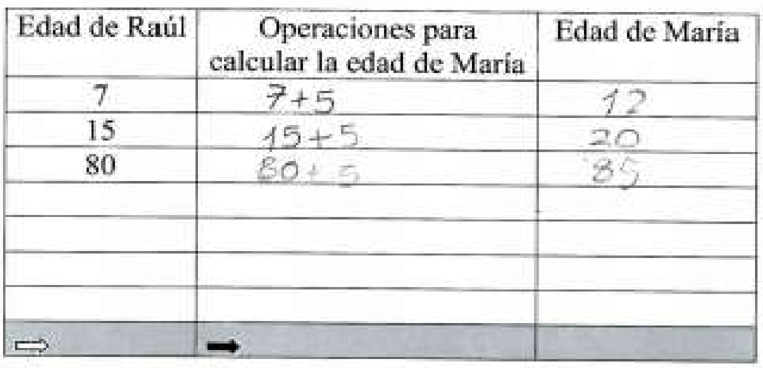
En la cuestión 5 se les proporcionaba una tabla para que los alumnos la terminaran de completar. Debían escribir la edad de Raúl, la operación necesaria para calcular la edad de María y la edad de María. Se les proporcionaba las edades de Raúl que se habían dado en las cuestiones 1, 2 y 3 y debían completar operación y edad de María, y después tenía cuatro filas en blanco para que los alumnos propusiesen otras edades de Raúl y las correspondientes de María.

Todos los alumnos completaron esta cuestión, mostrando que conocían la representación tabular y eran capaces de completarla cuando se les daba la estructura de filas y columnas (a diferencia de la tarea previa en la que se pedía que construyeran la tabla). A pesar de que algunos de los datos considerados para la edad de Raúl de algunos de los alumnos no eran posibles, muestran que comprenden la relación entre las edades de los hermanos y saben emplearla para calcular edades que ellos mismos proponen en vez de sólo emplear la relación para las edades que se incluyen en la tarea.

Tabla 4: Tipos de respuestas dadas por los alumnos a la cuestión 5

Responden	Datos correctos	Indica operación	Datos adicionales
25	23	24	20

En esta cuestión, todos los alumnos dieron una respuesta. Algunos de ellos solo completaron las edades de María para las tres edades dadas para Raúl y no ampliaron los datos para completar la tabla. Este es el caso del Alumno 15, como se puede observar en la Imagen 20.



Edad de Raúl	Operaciones para calcular la edad de María	Edad de María
7	7+5	12
15	15+5	20
80	80+5	85

Imagen 20: respuesta del Alumno 15 a la cuestión 5.

La mayoría de los alumnos, 20 de un total de 25, sí completaron la tabla con otras edades, aunque resaltan algunos casos particulares. El primero de ellos es el Alumno 9. Este alumno plantea para Raúl la edad de 0 años, y por lo tanto María tendría 5. También le asigna a Raúl la edad de 10000 y a su hermana 10005 años. Esto demuestra que ha entendido la relación entre las edades y no ha tenido en cuenta que estos datos no son posibles en el contexto en el que se sitúa el problema. Es el único alumno de todos que plantea que la edad de Raúl pudiera ser cero. Esto demuestra que el alumno no ha tenido en cuenta el contexto y se ha centrado en la relación funcional, moviéndose por el conjunto de los números naturales que es el conjunto que mejor conocen en la etapa educativa en la que se encuentra.

Edad de Raúl	Operaciones para calcular la edad de María	Edad de María
7	7+5=12	12
15	15+5=20	20
80	80+5=85	85
0	0+5=5	5
40	40+5=45	45
1.0000	1.0000 + 5 = 1.0005	1.0005
75	75+5=80	80
⇨ R	➡ R H	H

Imagen 21: respuesta del Alumno 9 a la cuestión 5.

El Alumno 11 comienza a completar la tabla correctamente pero en las dos últimas filas coloca la edad de Raúl en la columna de la operación que debe realizar para calcular la edad de María y deja en blanco la edad de María.

Edad de Raúl	Operaciones para calcular la edad de María	Edad de María
7	7 + 5	12
15	15 + 5 = 20	20
80	80 + 5 = 85	85
45	45+5=50	50
33	33 + 5 = 38	38
74	74	
67	67	
⇨ ~~R~~	➡ ~~R+M =~~	
R	R+R=	24

Imagen 22: respuesta del Alumno 11 a la cuestión 5.

Si analizamos las cantidades que han proporcionado los alumnos como edades posibles para Raúl en esta cuestión, es interesante destacar que muchos de los alumnos han proporcionado valores que son múltiplos de cinco, demostrando que han querido escoger valores con los cuales los cálculos son sencillos. El Alumno 12 es el único quien ha proporcionado cuatro valores adicionales que no son múltiplos de cinco y los Alumnos 11 y 25 han proporcionado tres valores que no son múltiplos de cinco. El resto de alumnos han proporcionado valores donde al menos tres de ellos son múltiplos de cinco. Se puede apreciar también que tres de los alumnos han tomado el último valor proporcionado en la tabla, el 80, y han propuesto los cuatro número siguientes que son múltiplos de cinco (85, 90, 95 y 100).

5.4 - Cuestión 6

Esta cuestión se basa en la tabla de la cuestión anterior, que debía servir de base para que los niños intentasen generalizar la relación entre las edades de los hermanos y la expresasen con notación algebraica. Se les pide a los alumnos asignar, al pie de la tabla de la cuestión 5, una letra que represente la edad de Raúl. Pueden escoger la letra que quieran para representar la variable. Una vez escogida la letra, deben usarla para representar la edad que tendría María. Se busca que los alumnos representen $x + 5$, siendo x la edad de Raúl.

Tabla 5. Tipos de respuestas dadas por los alumnos a la cuestión 6.

Responden	Asignan Letra	Proponen Operación	Operación Adecuada
18	18	7	5

Las respuestas proporcionadas por los alumnos en esta cuestión se pueden clasificar principalmente en tres grupos. El primer grupo es el de los alumnos que han empleado una notación algebraica para representar la operación que llevarían a cabo para emplear la incógnita elegida para designar la edad de Raúl con el fin de calcular la edad de María. Las respuestas son del tipo $x + 5$ (Imagen 31 e Imagen 32). Otro grupo son los que han empleado dos incógnitas para expresar la operación que emplearían para calcular la edad de María. Son del tipo $x + y$, donde x es la edad de Raúl (Imagen

23). El tercer grupo el de los alumnos que han empleado una incógnita para designar a la operación que realizaría. Es decir, no emplean la letra que representa la edad de Raúl dentro de una operación, sino que escogen otra letra para simbolizar la operación. Estas respuestas son del tipo x (Imagen 23). En cada caso, las letras escogidas por los alumnos como incógnitas varían aunque destacan las letras R, A y C.

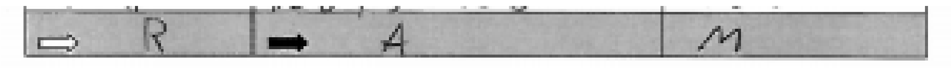


Imagen 23: respuesta del Alumno 10 a la cuestión 6

Se puede observar que esta cuestión plantea mayor dificultad para los alumnos, basándonos en el hecho de que sólo responden 18 alumnos a la cuestión. Todos los alumnos que respondieron fueron capaces de designar mediante una incógnita la edad de Raúl.

El paso siguiente, emplear la incógnita seleccionada para representar el cálculo de la edad de María resultó ser más complicado. Hubo alumnos que emplearon otra incógnita distinta en la columna del cálculo de la edad de María. Los alumnos 9 y 11 emplean la letra R para designar la edad de Raúl y luego el Alumno 9 indica que la operación sería "R M", y el Alumno 11 designa la operación como "R + e", pero no explica qué representa "e".

Imagen 24: respuesta del Alumno 11 a la cuestión 6.

Imagen 25: respuesta del Alumno 9 a la cuestión 6

Algunos alumnos emplearon correctamente la letra asignada para representar la edad de Raúl y al intentar emplearla para calcular la edad de María, calcula un ejemplo específico, donde la letra que representa la edad de Raúl realmente pasa a valer 5. Este es el caso del Alumno 20, quien expresa la edad de María como "R+17", donde R era la letra asignada para representar la Edad de Raúl. El tercera columna de la tabla, donde se encuentran las edades de María, escribe "22 años", resultado que le da de sumarle 5 a

17, implicando que ha considerado R=5, es decir, el número de años de diferencia entre las edades de los hermanos, en vez de R=Edad de Raúl.

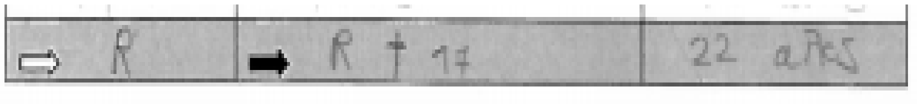


Imagen 26: respuesta del Alumno 20 a la cuestión 6

Situación similar ocurre con el Alumno 19, quién establece que “R” representa la edad de Raúl, cambiándola luego por “G” para representar la operación necesaria para calcular la edad de María en relación a la edad de Raúl. Este alumno propone en realidad una ecuación, en la que la edad de María debe ser 12.

Imagen 27: respuesta del Alumno 19 a la cuestión 6

El Alumno 12 asigna la letra R a la edad de Raúl y luego en la columna de la operación escribe W. Podemos apreciar en la grabación de la sesión de clase que este alumno dice “le sumamos 5 a la letra (la letra empleada para designar a la edad de Raúl) porque María tiene cinco años más que Raúl”. Este alumno está considerando las letras en el alfabeto y si partimos de la letra R, cinco posiciones más nos lleva a la letra W.

Otro alumno resuelve esta cuestión de una manera distinta a sus compañeros. Este alumno asigna la letra A a la edad de Raúl y dice “A mas cinco igual a E”. Cuando se le pide que lo explique dice que “entre A y E hay cinco”. La profesora intenta aclarar un poco más la situación y establecen que A representaría la edad de Raúl y E representaría la edad de María.

Algo parecido le ocurre al Alumno 23, quien asigna A a la edad de Raúl y F a la edad de María, ya que cinco letras después de la A encontramos la F. Estos dos alumnos demuestran haber entendido que para calcular la edad de María a partir de la de Raúl es necesario sumar 5, pero les ha resultado complicado expresar esto de una manera alfanumérica.

Imagen 28: respuesta del Alumno 23 a la cuestión 6.

El Alumno 16 asigna la letra A a la edad de Raúl aunque no lo emplea para expresar la relación entre las edades de los hermanos, sino que representa otro caso específico.

Imagen 29: respuesta del Alumno 16 a la cuestión 6

Un total de cinco alumnos han demostrado no sólo haber entendido la relación entre las edades sino que también han sido capaces de representar la relación funcional empleando notación algebraica, tal y como se muestra en las siguientes imágenes.

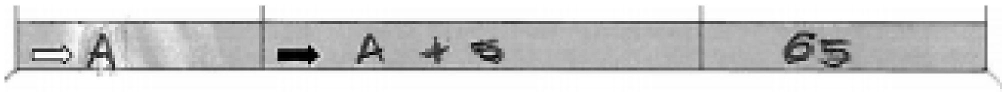


Imagen 30: respuesta del Alumno 7 a la cuestión 6

Imagen 31: respuesta del Alumno 25 a la cuestión 6

No todos los alumnos participan en la puesta en común verbal pero de aquellos que participaron y que no habían sabido representar la relación funcional de manera simbólica en el cuestionario escrito, dos de ellos expresaron de forma oral la relación entre las edades de una manera que demuestra claramente que habían identificado la relación funcional. Sus comentarios cuando se les pregunta por cómo emplearían la letra que representa la edad de Raúl con el fin de calcular la edad de María, ambas respuestas fueron parecidas a "a R le sumo cinco para calcular la edad de María".

5.5 - Cuestión 7

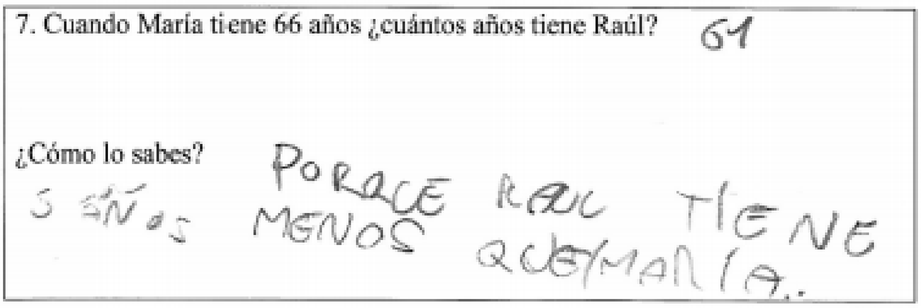
En esta cuestión se les pedía a los alumnos identificar la relación inversa entre las edades. Se les daba a los alumnos la edad de María, 66 años, y se les preguntaba a los alumnos por la edad de Raúl. Al igual que las cuestiones 1, 2 y 3, tras dar la respuesta, se pedía que los alumnos explicasen cómo lo habían averiguado. Algunos alumnos no contestaron a esta pregunta, como se puede observar en la siguiente tabla.

Tabla 6. Tipos de respuestas y representaciones empleadas en la cuestión 7

		Justifica la respuesta		Identifica la relación inversa	
Responden	Simbólico	V	N	Sí	Explícitamente
19	19	1	18	17	2

Nota: V = verbal; N = numérica

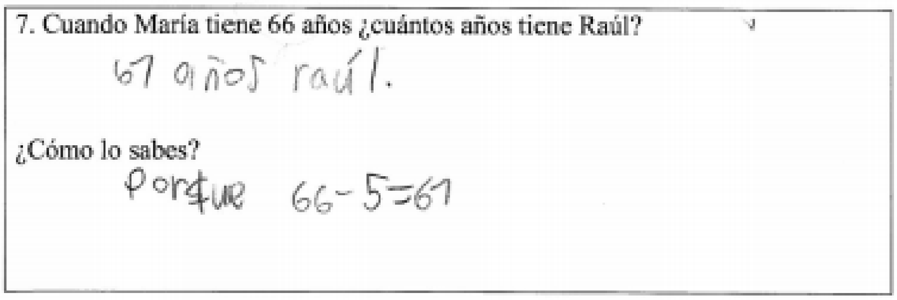
Se ha considerado que dos de los alumnos han identificado explícitamente la relación inversa. El Alumno 22 emplea una representación verbal escrita para explicar cómo ha calculado la edad de Raúl, como se puede ver en la Imagen 32, donde justifica que “Porque Raúl tiene 5 años menos que María”. El otro alumno, el Alumno 20, no expresa por escrito en el cuestionario la relación pero sí la manifiesta de forma verbal oral en la grabación de la sesión.


7. Cuando María tiene 66 años ¿cuántos años tiene Raúl? 61

¿Cómo lo sabes? PORACE RAUL TIENE
5 AÑOS MENOS QUEMARIA.

Imagen 32: respuesta del Alumno 22 a la cuestión 7

La mayoría de los alumnos, concretamente todos salvo dos, justificaron su respuesta proporcionando una sentencia numérica. Es decir, identificaron una relación del tipo $a \quad b = c$, siendo a la edad de María, b la diferencia de años entre los hermanos y c la edad de Raúl. En la Imagen 33 se puede ver un ejemplo.


7. Cuando María tiene 66 años ¿cuántos años tiene Raúl?

61 años raúl.

¿Cómo lo sabes?

Porque 66-5=61

Imagen 33: respuesta del Alumno 16

5.6 - Cuestión 8

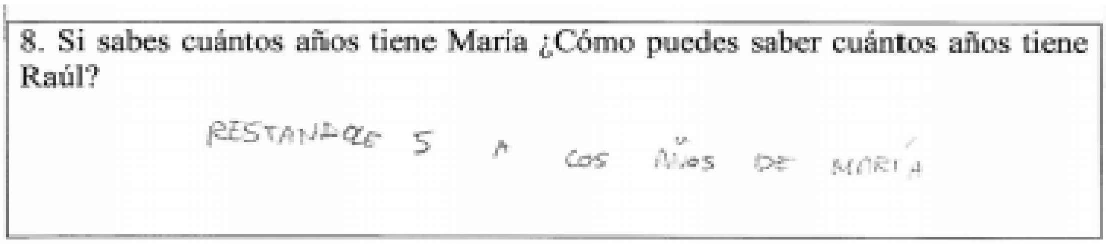
En esta última cuestión se les pedía a los alumnos explicar cómo se podría averiguar la edad de Raúl si se sabía la edad de María. En la siguiente tabla se pueden ver las respuestas y representaciones empleados por los alumnos.

Tabla 7. Tipos de respuestas y representaciones empleados por los alumnos en la cuestión 8

Respuesta			Identifican relación inversa	
Correcta	Incorrecta	Verbal Escrita	Sí	Explícitamente
15	2	17	15	7

Al igual que la cuestión anterior, hubo alumnos quienes no respondieron. Todos aquellos que proporcionaron una respuesta la hicieron de manera verbal escrita, que era lo que se pretendía en la cuestión; que los alumnos explicasen cómo se podía calcular la edad de Raúl sabiendo la de María sin dar un ejemplo concreto de edades.

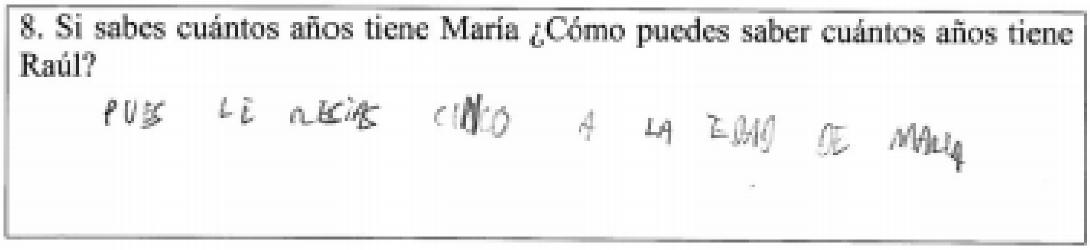
Los alumnos que han proporcionado una respuesta similar a "restando cinco a la edad de María" se ha considerado que han identificado explícitamente la relación entre las edades de los hermanos. Se pueden ver a continuación algunos ejemplos.



8. Si sabes cuántos años tiene María ¿Cómo puedes saber cuántos años tiene Raúl?

RESTANDOLE 5 A LOS AÑOS DE MARÍA

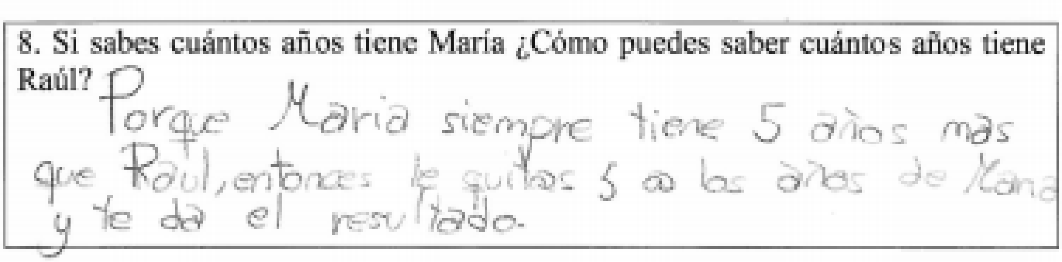
Imagen 34: respuesta del Alumno 7 a la cuestión 8



8. Si sabes cuántos años tiene María ¿Cómo puedes saber cuántos años tiene Raúl?

PUES LE RESTAS CINCO A LA EDAD DE MARIA

Imagen 35: respuesta del Alumno 17 a la cuestión 8

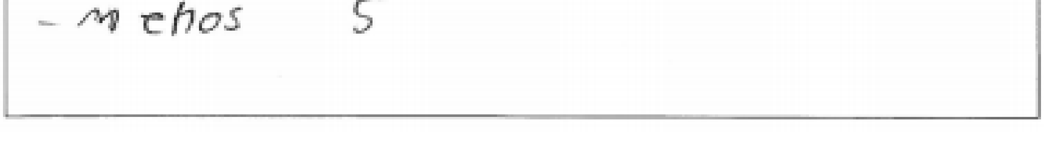


8. Si sabes cuántos años tiene María ¿Cómo puedes saber cuántos años tiene Raúl?

Porque Maria siempre tiene 5 años mas que Raul, entonces le quitas 5 a los años de Maria y te da el resultado.

Imagen 36: respuesta del Alumno 19 a la cuestión 8

Hay alumnos que se puede intuir que han identificado la relación entre las edades de los hermanos aunque han tenido dificultad en expresar de manera verbal escrita esa relación. En los casos de los alumnos quienes han participado en la puesta en común oral en clase se esclarece y explicita que con los siguientes tipos de respuesta que los alumnos entienden que se debe "restar cinco a la edad de María para calcular la edad de Raúl", a pesar de que en el cuestionario escrito se han proporcionado respuestas muy escuetas como "restando 5", "cinco menos", "menos 5".



8. Si sabes cuántos años tiene María ¿Cómo puedes saber cuántos años tiene Raúl?

- menos 5

Imagen 37: respuesta del Alumno 10 a la cuestión 8

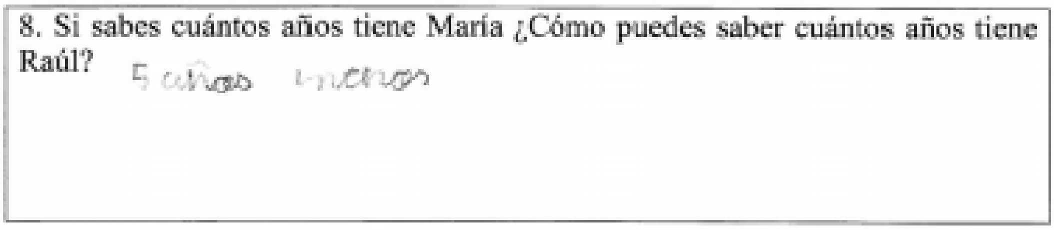
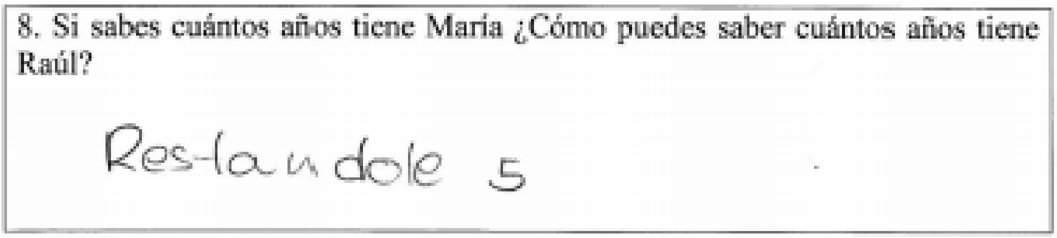

8. Si sabes cuántos años tiene María ¿Cómo puedes saber cuántos años tiene Raúl? 5 años menos

Imagen 38: respuesta del Alumno 6 a la cuestión 8


8. Si sabes cuántos años tiene María ¿Cómo puedes saber cuántos años tiene Raúl?

Restandole 5

Imagen 39: respuesta del Alumno 21 a la cuestión 8

Capítulo 6. Discusión de resultados

En este capítulo se presenta la discusión de los resultados descritos en el capítulo anterior. Se realiza una descripción por cuestiones, al igual que el análisis de resultado en el apartado previo.

6.1 – Cuestiones 1, 2 y 3

En estas tres cuestiones los alumnos no presentaron dificultades para los alumnos ya que todos no sólo contestaron sino que su respuesta fue correcta en todos los casos, en la primera parte de la pregunta, correspondiente a la edad de María. La segunda parte de las cuestiones, cuando se les pedía a los alumnos explicar cómo podían saber la edad de María, se puede observar que tienden a emplear una sentencia numérica como explicación, escaseando las explicaciones verbales. Esto puede deberse a que están acostumbrados a emplear sentencias numéricas como explicaciones en la asignatura de matemáticas. Se les pedía a los alumnos que explicaran cómo sabían la edad de María con el objetivo de poder identificar el razonamiento y el proceso seguido por los alumnos para dar sus respuestas.

6.2 – Cuestión 4

En la primera parte de la cuestión es notable destacar las dificultades que los alumnos tuvieron para comprender qué se les pedía en esta cuestión. En la transcripción de la sesión de clase se puede apreciar que fue necesario explicarles varias veces a los alumnos la situación y qué se les pedía. Destaca también de nuevo las dificultades e imprecisiones de los alumnos para explicar cómo se podría averiguar la edad de María teniendo la foto del cumpleaños de Raúl y su edad en las velas de la tarta. Los alumnos preguntaban por casos particulares, tenían la necesidad de saber cuántos años tenía Raúl en la foto para poder realizar una operación y calcular la edad de María. Las tres primeras cuestiones les resultaron fáciles ya que solo debían resolver una suma muy sencilla para ellos. Pero en esta cuestión se necesitaba expresar de forma general la relación funcional entre las edades de los hermanos y, recordando que no tenían experiencia anterior en este tipo de tareas, demostraron que este paso a la generalización era complicado para ellos. Esto es normal si consideramos que en una clase regular de matemáticas se suele centrar la atención en casos particulares y buscar respuestas concretas.

De entre los alumnos quienes contestaron a la pregunta y demostraron poder expresar la generalización, hubo quienes expresaron la generalización apoyándose en ejemplos concretos y dos alumnos quienes fueron capaces de expresar la generalización sin expresar ejemplos concretos. Es importante destacar que aunque la mayoría se apoyaron en un ejemplo concreto para dar una explicación más clara, demostraron que no solo habían identificado el que $a + b = c$ relacionaba las edades, sino que fueron capaces de expresarlo una manera generalizada. Dos alumnos intentaron representar de manera pictórica la situación, entendemos que con el fin de ayudarse a entender lo que se le pedía que hiciese, dibujando una tarta con velas donde las velas representaban una edad concreta de Raúl, y de esta manera podía proporcionar la edad de María sin realizar la generalización.

Según la definición de Radford (2008) de generalización algebraica, podemos decir que los alumnos ya contaban con la característica común en el conjunto de elementos que es el hecho de que la edad de María siempre es cinco más que la de su hermano, independientemente de la edad del hermano. Han sido capaces de aplicar esta característica de manera general para calcular la edad de María en cualquier situación, quedando esto demostrado en las respuestas proporcionadas en la tabla de edades de la cuestión 5. De las tres características establecidas por Radford para las generalizaciones algebraicas faltaría cumplir con la última, que es deducir y expresar con notación algebraica dicha generalización. Pero se considera que esto se consigue en la cuestión 6 y por este motivo podemos afirmar que los alumnos han sido capaces de realizar una generalización algebraica.

En la segunda parte de esta cuestión cabe resaltar la riqueza de representaciones empleadas por los alumnos. En total 10 alumnos emplearon una representación gráfica correspondiente a una tabla y el resto de los alumnos emplearon diversas representaciones gráficas para reflejar la información de las cuestiones anteriores. Muchas de ellas representan los datos de las cuestiones anteriores aunque el tipo de representación empleada no era la que se pedía. Con esto los alumnos han demostrado la variedad de representaciones gráficas que conocen y su flexibilidad para emplearlas. Recordamos también que, según Golding (2013), las representaciones empleadas por los alumnos son personales, reflejando su visión personal de los datos que se les pide representar. Por tanto, en esta cuestión hemos podido observar que, aunque no era lo que se pedía, los alumnos han empleado distintos tipos de representaciones gráficas para organizar los datos de una manera significativa para ellos.

Según Golding (2013), "crear significado" es el proceso por el cual pasan los niños para usar con soltura las representaciones gráficas y una parte esencial de este proceso es interpretar y expresar sus conocimientos de maneras cada vez más lógicas y sistemáticas. Cuando los alumnos emplean representaciones, éstas reflejan las características, los aspectos y procesos que ellos han considerado más importantes y que les ayudan a comunicar sus pensamientos y crear significado de situaciones nuevas, complejas o a mirar situaciones familiares de otras maneras (Golding, 2013). Si tenemos en cuenta lo que dice este autor, la gran variedad de representaciones que han empleado los alumnos nos indica que cada uno tiene su manera de organizar su conocimiento, lo representa de la manera que le es útil y que le permite hacer frente a la situación problemática a la que se enfrentan, en este caso la de organizar los datos de las tres cuestiones anteriores. En las representaciones alternativas que han empleado los alumnos, algunos de ellos representan claramente que los valores de las variables están relacionados entre sí pero otros no dejan claro esta relación en sus representaciones. Si atendemos a lo que dice Golding se puede intuir que en los casos donde los alumnos no han representado claramente que los valores de las variables están relacionadas, esto se debe a que estos alumnos no han considerado que esta relación sea lo más importante para ellos y han representado aquello que sí han considerado importante: los valores exactos de las edades de los hermanos.

6.3 – Cuestión 5

Esta cuestión, donde los alumnos debían terminar de rellenar una tabla con las edades de los dos hermanos, todos los alumnos contestaron y 20 de ellos lo hicieron correctamente y además ampliaron con datos adicionales en las casillas que se habían dejado vacías a tal efecto. Con estos datos los alumnos han demostrado que conocen la representación tabular y con capaces de completarla cuando se les daba la estructura de filas y columnas. Esto contrasta con la cuestión anterior donde, como se ha comentado, únicamente 10 alumnos representaron datos en una tabla cuando se les pedía que la construyesen. Teniendo en cuenta que estos alumnos habían empleado tablas, no solo en la asignatura de matemáticas sino también en otras, como herramienta para organizar datos, nos puede indicar que la dificultad de la cuestión anterior radica en representar una tabla para colocar los datos y no en entender y organizar dichos datos. Es decir, que los alumnos son capaces de organizar unos datos proporcionados en una tabla si se les presenta ya construida pero encuentran mayor dificultad si son ellos quienes deben construir la tabla además de organizar los datos en ella.

6.4 – Cuestión 6

Tras completar la tabla con datos en la cuestión anterior, en esta cuestión se pedía que los alumnos asignasen una letra a la edad de Raúl y la empleasen para representar cómo calcular la edad de María. Al igual que ocurría con la primera parte de la cuestión 4, algunos alumnos intentan expresar ejemplos concretos. Otros alumnos no tuvieron dificultad a la hora de asignar letras a las edades de cada uno de los hermanos aunque luego no supieron emplearlas para mostrar la operación que se debía hacer para obtener la edad de María. Otros consideraron las letras como números concretos y afirmaban que si la edad de Raúl es R, entonces la edad de María sería W, porque "R más 5 son W". Esta dificultad no la presentaron siete de los alumnos, quienes emplearon las letras como variables y las usaron para representar la operación que relaciona las edades de los alumnos. Estos resultados concuerdan con los encontrados por Cañadas, Brizuela y Blanton (2016), quienes vieron que, a pesar de no haber tenido contacto previo con la notación algebraica, tras su introducción en clase hubo alumnos de segundo de primaria quienes fueron capaces de hacer uso de las letras como variables dentro del contexto de la tarea con la que estaban trabajando. Blanton y Kaput (2001) sugieren que en tercero de primaria, unos 8-9 años de edad, los alumnos pueden observar al covariación entre variables además de emplear la notación algebraica para representar relaciones funcionales. Esta idea se sustenta también en el trabajo realizado por Carraher, Schielman, Brizuela y Earnest (2006). Algunos alumnos dejaron esta pregunta sin contestar por lo que podemos intuir que o bien no la entendieron o no supieron dar una respuesta.

Con las distintas respuestas de los alumnos, éstos han demostrado que son perfectamente capaces de calcular las edades de los hermanos en casos concretos pero dar un paso más y realizar la generalización les resulta más difícil a la mayoría.

6.5 – Cuestión 7

En esta cuestión se les pedía los alumnos calcular la edad de Raúl sabiendo la edad de María, es decir, que hicieran uso de la relación inversa entre las edades. Todos aquellos que dieron una respuesta a la cuestión calcularon correctamente la edad del hermano. Cabe mencionar que en la justificación de la respuesta, todos salvo uno, justificaron la respuesta dada con una operación sin dar una explicación verbal escrita del resultado obtenido. Esto contrasta con las justificaciones dadas en las primera tres cuestiones, donde hubo un mayor número de alumnos quienes justificaron o bien de manera verbal escrita o bien combinando la explicación verbal con una operación.

6.6 – Cuestión 8

Una vez más se les pide a los alumnos expresar la relación entre las edades de los hermanos de manera generalizada para poder calcular la edad de Raúl sabiendo la de María, sin proporcionar un ejemplo concreto. Es importante destacar de esta cuestión que, con las respuestas dadas por los alumnos, se intuye que entienden la relación entre las edades y son capaces de calcular una u otra edad en casos concretos pero tienen dificultad para explicar el proceso que se debe realizar. Algunas de las respuestas se limitan a "restándole 5" o "menos 5", lo que indica que los alumnos identifican sin problema la relación inversa entre las edades de los hermanos aunque les falta especificar que hay que "restarle 5" a "la edad de María". Es necesario destacar que esto se soluciona cuando las respuestas de los alumnos son orales en vez de escritas. Tampoco hay que olvidar que es la primera vez que los alumnos se enfrentan a una tarea de este tipo y quizá no están acostumbrados a explicar las respuestas que proporcionan en las clases regulares de matemáticas.

Si se contrastan los tipos de respuestas que proporcionan los alumnos en las cuestiones 1, 2, y 3 con los tipos de respuesta obtenidos en las cuestiones 7 y 8, se puede observar algunas semejanzas y diferencias entre ellos.

Todos los alumnos, exceptuando dos, que proporcionaron una respuesta numérica en las tres primeras cuestiones han proporcionado el mismo tipo de respuesta en la cuestión 7. Los alumnos 8 y 9 proporcionaron una respuesta numérica en las tres primeras cuestiones y sin embargo no respondieron a las cuestiones 7 y 8.

De los cuatro alumnos que explicaron de manera verbal más detallada cómo sabían la edad de María en las tres primeras cuestiones (Alumno 11, Alumno 12, Alumno 24 y Alumno 25), dos de ellos no respondieron a las cuestiones 7 y 8 y los otros dos alumnos proporcionaron una respuesta a la cuestión 7 pero no a la cuestión 8. Por tanto, los alumnos que a primera vista, basándonos en las tres primeras cuestiones, parecen haber entendido bien la relación directa entre los hermanos y han sido capaces de especificar con bastante detalle cómo han averiguado la edad de María, luego parecen tener dificultades en identificar y/o generalizar la relación inversa entre las edades.

6.7 – Comentarios generales

En general, a lo largo de las cuestiones se puede observar poca riqueza en las explicaciones escritas de los alumnos. Esto puede ser normal si están acostumbrados a justificarse empleando sentencias numéricas en la clase de matemáticas o si no están acostumbrados a que se les pida justificación de sus respuestas. Además, son alumnos de entre 8 y 9 años de edad quienes están todavía desarrollando la expresión verbal y escrita. Las explicaciones orales son más ricas que las escritas, como se puede observar en la transcripción de la sesión grabada. No debemos olvidar que, tal y como se indica en Kieran et al. (2016), el rol del lenguaje natural es esencial en el desarrolla del Early Algebra en los alumnos. Por tanto, para desarrollar el pensamiento funcional dentro de las clases de matemáticas es necesario también dedicar tiempo a fomentar la expresión verbal de los alumnos con el objetivo de facilitarles la tarea de explicar y argumentar los procesos seguidos y resultados obtenidos en las tareas de pensamiento funcional.

La mayoría de los alumnos contestaron a la tarea completa, siendo solo una pequeña parte los que no contestaron las cuestiones 6, 7 y 8. Esto hace pensar que o bien la tarea fue demasiado larga para estos alumnos en concreto y perdieron la concentración, o bien que tuvieron dificultades con la cuestión 6 y se terminó el tiempo asignado para completar la tarea sin que hubieran mirado las dos últimas cuestiones. También es posible que al encontrarse con dificultades en la cuestión 6 se desmotivaron y no siguieron resolviendo las cuestiones. Teniendo en cuenta que la mayoría de los alumnos contestaron todas las preguntas, podemos afirmar que no fue una tarea demasiado complicada para ellos y por tanto son capaces de trabajar con tareas de pensamiento funcional en sus clases ordinarias de matemáticas.

Capítulo 7. Conclusiones

En este capítulo se presentan las conclusiones obtenidas tras la realización del trabajo de investigación y se deja constancia de las limitaciones y posibles vías de continuación de dicha investigación.

Con este trabajo se ha querido contribuir a un conjunto de estudios que se están llevando a cabo con el objetivo de llevar al aula una visión diferente del álgebra dentro del currículo de la enseñanza primaria. Por ese motivo el objetivo principal de este estudio era describir el pensamiento funcional que demuestran un grupo de alumnos de tercer curso de educación primaria cuando resuelven una tarea de generalización.

7.1 - Consecución de objetivos

El primer objetivo específico que se planteaba para esta investigación era describir las respuestas proporcionadas por los alumnos en las distintas cuestiones que componen la tarea mediante la cual se realizó la recogida de datos. Este objetivo se considera que se ha conseguido ya que en el capítulo 5 se han descrito las distintas respuestas de los alumnos en cada una de las tareas. Se puede ver cómo los alumnos han sido capaces de identificar "$x + 5$" como la relación entre las edades de Raúl y María, donde "x" representa la edad de Raúl, y "z 5" como la relación entre las edades de los hermanos, siendo "z" la edad de María. Les ha resultado difícil usar la notación algebraica para representar estas relaciones. Hemos podido ver cómo los alumnos no presentan dificultad para representar la edad de Raúl con una letra pero sí han tenido mayor dificultad a la hora de emplearla para representar la relación funcional entre las edades de los hermanos. Algunos quisieron emplear la letra escogida para la edad de Raúl para calcular un ejemplo concreto, otros emplearon una letra diferente para designar la operación y otros tomaron la letra escogida dentro de alfabeto y calcularon la letra que se encontraba cinco posiciones por delante para proporcionarla como la edad de María. Fueron una minoría los que emplearon adecuadamente la letra escogida para representar la relación entre las edades, pero no es de extrañar ya que era la primera vez que estos alumnos empleaban letras como variables.

El segundo objetivo específico era describir las representaciones empleadas por los alumnos para responder a las cuestiones planteadas y sus características. Este objetivo se considera conseguido ya que se han descrito, cuestión por cuestión, las representaciones empleadas por los alumnos en sus respuestas. Vemos como predomina la representación simbólica, combinada o no con representaciones verbales, en las cuestiones 1, 2, 3 y 7. En las cuestiones donde se pedía justificar o explicar el resultado predominan las representaciones verbales escritas en las cuestiones 1 2 y 3, pero en la cuestión 7 se sustituye esta representación verbal escrita por una representación simbólica en modo de operación.

En la segunda parte de la cuestión 4 y en la cuestión 5 se pedía un tipo de representación específica: una tabla. En la cuestión 5, al proporcionar la tabla para ser rellenada, los alumnos han empleado este tipo de representación, a diferencia de la cuestión 4, donde se les pedía a ellos elaborar la tabla. Con las respuestas a la cuestión 5 podemos saber que los alumnos entienden cómo organizar datos en tabla, pero en la cuestión 4 demuestran tener mayor dificultad a para elaborar ellos la tabla. Sin embargo, nos demuestran que son capaces de producir gran variedad de representaciones personales para representar un conjunto de datos, aunque éstas se basan en otras representaciones, como pueden ser el diagrama de barras o la recta numérica. Algunas de estas representaciones los alumnos las emplean para representar correctamente los datos aunque otros no los recogen correctamente.

Sólo dos alumnos emplearon como estrategia la representación pictórica de la situación para la resolución de la primera parte de la cuestión 4. Esto quizá se deba a que los datos de contextualización de la situación inicial se dieron de manera verbal escrita y por tanto los alumnos intentaron emplear la misma estrategia. En otras investigaciones han predominado las representaciones pictóricas, como pueden ser Fuentes y Cañadas (2015) o Merino, Cañadas y Molina (2013), quizá debido a que para contextualizar la situación se empleaba una representación pictórica que acompañaba a la representación verbal escrita. También es posible que los alumnos no considerasen emplear este tipo de representación debido a que una representación pictórica probablemente les resultase menos útil para representar el contexto de la tarea que completaron.

7.1.1 – Conclusiones de utilidad para la enseñanza

Se ha podido comprobar con las repuestas de los alumnos que son capaces de trabajar con tareas que requieren el uso del pensamiento funcional, lo que indica que son tareas que pueden incluirse perfectamente en las clases ordinarias de matemáticas, con el fin de fomentar el desarrollo de este tipo de pensamiento en los alumnos. Hemos visto que en la mayoría de las cuestiones los alumnos explican su respuesta proporcionando la operación que han empleado para llegar a la solución. Con esto podemos saber qué han hecho para llegar a la solución dada pero se pretende ir un paso más allá y que los alumnos expliquen el por qué de la operación empleada, por qué los términos de dicha operación, etc. Lo mismo ocurre con las cuestiones donde no es necesario emplear operaciones para llegar a una respuesta. Con la transcripción de la sesión de clase se ha constatado que estas explicaciones parecen más completas cuando se realizan de forma oral y por tanto fomentarlas de manera escrita sería beneficioso para los alumnos. Esto se puede realizar en cualquier clase, ya no solo en la de matemáticas, pidiendo a los alumnos explicar sus repuestas de manera escrita.

Sería también de interés trabajar cuestiones en las que los alumnos deben representar información que han obtenido, o que se les haya proporcionado, utilizando tipos de representaciones específicas. Se ha visto que en la segunda parte de la cuestión 4 los alumnos han demostrado gran riqueza de representaciones para organizar la información que tenían, pero no todos han empleado el tipo de representación que se pedía específicamente en el enunciado ni en todas ellas han conseguido remarcar los datos que, en este caso, se consideraban los más importantes: la relación entre las edades. Por tanto, sabemos que los alumnos son capaces de organizar datos de distintas formas y debemos desarrollar en ellos la capacidad de detectar lo más importante del conjunto de datos con el que se está trabajando para poder trasladar esta información a la representación.

7.1.2 – Conclusiones de utilidad para la investigación

Los alumnos que han participado en la recogida de datos han demostrado poder identificar una relación de correspondencia entre dos conjuntos de datos trabajando con una tarea de generalización, sin haber tenido contacto con este tipo de tareas anteriormente. Esto nos indica no solo de lo que son capaces los alumnos en estas edades sino que es interesante y necesario indagar más sobre este tema.

Los tipos de representaciones que han empleado los alumnos para organizar los datos son muy variadas y cada uno le ha dado énfasis a lo que ha considerado más importante desde su propio punto de vista, sin centrarse tanto en el objetivo que se perseguía con la cuestión, que era de organizar los datos por parejas atendiendo a su correspondencia, en una tabla. Esto nos puede indicar la necesidad de indagar acerca de este tema, sobre las ideas de los alumnos y las intenciones que tienen cuando organizan datos de una manera u otra.

7.2 - Limitaciones de la investigación

Esta investigación tiene una serie de limitaciones debido a diferentes factores. El primer factor es la extensión del Trabajo Fin de Máster en tiempo y en longitud de la memoria a presentar. Debido a esto, el presente estudio se ha limitado al análisis de las ocho cuestiones que componían la primera de las cuatro sesiones de clase diseñadas dentro del proyecto de investigación del Plan Nacional I+D con referencia EDU2013-41632-P, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España.

Otra limitación es el acceso a las aulas. Es necesario contar con autorización para acceder a los colegios y contar con la voluntad del colegio para poder tener acceso a sus aulas. El colegio al que se tuvo acceso para realizar la recogida de datos es de línea 1 y por tanto sólo hay un grupo por nivel educativo, impidiendo poder realizar la recogida de datos en otro grupo del mismo nivel dentro del colegio.

7.3 - Líneas de continuación

Como se ha mencionado en el apartado anterior el tiempo y la extensión del Trabajo Fin de Máster son restricciones que impiden realizar una recogida de datos y un análisis más extenso de dichos datos. Esto deja la posibilidad de ampliar y complementar este estudio con la recogida de datos de alumnos del mismo nivel educativo en otros centros que tuvieran más de un curso por nivel y comparar los datos obtenidos de los diferentes centros.

Sería de interés realizar una comparación de los datos obtenidos de los alumnos de este estudio con aquellos obtenidos de los estudios realizados en el mismo centro con los alumnos de primer y quinto curso para analizar posibles semejanzas y diferencias entre ellos. Así mismo, sería interesante diseñar una serie de sesiones de clase donde los alumnos continuarán trabajando con tareas similares a la planteada en el cuestionario y después realizar otra recogida de datos con el fin de analizar la diferencia, si la hubiera, de los resultados obtenidos antes de que los alumnos tuviesen una formación específica en tareas que requieren el empleo del pensamiento funcional y después de recibir formación específica en este área.

Otra vía posible de continuación del presente trabajo sería la comparación de las diferentes formas en las que los mismos alumnos organizan los datos cuando resuelven las otras tareas de las que se compone el experimento de enseñanza.

Referencias bibliográficas

Balacheff, N. (2000). Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas. Una empresa docente. Recuperado el 12/07/2016 de https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00520133

Blanton, M., y Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. J. Hoynes y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 135–142). Oslo, Noruega: PME

Blanton, M. y Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36(5)*, 412-446.

Blanton, M. y Kaput, J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 5-23). Heidelberg, Berlín: Springer.

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A. M., Isler, I., y Kim, J. S. (2015). The development of children's algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(1), 39-87.

Boletín Oficial del Estado (2013). *Ley Orgánica 8/2013 de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa* (Vol. BOE Nº 295, pp. 97858-97921). Madrid, España: Ministerio de Educación y Ciencia.

Boletín Oficial del Estado (2014). *Real Decreto 126/2014 de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria* (vol. BOE nº 52, pp. 19349-19420). Madrid, España: Ministerio de Educación y Ciencia.

Cañadas, M. C., Brizuela, B. M., y Blanton, M. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *Journal of Mathematical Behavior, 41,* 87-103.

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA, 1*(2), 69-81

Cañadas, M. C. y Fuentes, S. (2015). *Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: Un estudio exploratorio.* En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIX (pp. 211-220). Alicante, España: SEIEM.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). *Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades.* En E. Castro, E. Castro, J.L. Lupiáñez, J.L. Ruiz-Hidalgo y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada, España: Comares.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D. y Brizuela, B. M. (2000, Octubre). *Early algebra, early arithmetic: Treating operations as functions.* Presentado en the Twenty–second annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Tucson, Arizona.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M., y Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. J*ournal for Research in Mathematics education*, 87-115.

Carraher, D. W., Schliemann, A.D. y Schwartz, J. (2007). Early algebra is not the same as algebra early. En J. Kaput. D. Carraher, y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 235-272). Mahwah, NJ: E Lawrence Erlbaum Associates.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Coord), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona, España: ICE UB/Horsori.

Castro, E, Cañadas, M. C. y Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO, 54,* 55-67.

Davis, R. (1989). Theoretical considerations: Research studies in how humans think about algebra. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (vol. 4., pp. 266-274). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Diccionario de la lengua española (2014). Recuperado de www.rae.es

Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(1), 199-219

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* Granada, España: Dpto. de Didáctica de la Matemática de la universidad de Granada.

Goldin, G. A. (2013). *Show Me what You Know: Exploring Student Representations Across STEM Disciplines*. B. M. Brizuela y B. E. Gravel (Eds.). New York: Columbia University, Teachers College Press.

Kaput, J. (1998). Transforming Algebra from an Engine of Inequity to an Engine of Mathematical Power by "Algebrafying" the K-12 Curriculum. En *The Nature and Role of Algebra in the K-14 Curriculum* (pp. 25-26). *Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics and the Mathematical sciences Education Board, National Research Council.*

Kaput, J. (1992). Technology and mathematics education. En D. A. Garouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 515-556). New York, MacMillan.

Kaput, J. (1998). *Teaching and learning a new algebra with understanding*. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fenne, y T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. En C. Alsina, J. Alvarez, B. Hodgson, C. Laborde y A. Pérez (Eds.), *Proceedings of the 8th International Congress* *on Mathematical Education: Selected lectures* (pp. 271-290). Sevilla, España: S.A.E.M. Thales.

Kieran, C., JeongSuk, P., Schifter, D. y Ng, S. F. (2016). *Early Algebra. Research into its Nature, its Learning, its Teaching*. ICME-13 Topical Surveys. Springer Open

Kolovou, A., van den Heuvel-Panhuizen, M. y Köller, O. (2013). An intervention including an online game to improve grade 6 students' performance in Early Algebra. *Journal for Research in Mathematics Education, 44*(3), 510-549

Malara, N. A. (2003). Dialectics between theory and practice: theoretical issues and aspects of practice from an Early Algebra project. En N. A. Pateman, B. J. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1,* pp. 33-48). Honolulu, HI: PME

Merino, E., Cañadas, M. C., y Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2*(1), 24-40.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA, 3*(3), 135-156.

Molina, M. (2014). Traducción del simbolismo algebraico al lenguaje verbal: indagando en la comprensión de estudiantes de diferentes niveles educativos. *Gaceta de la RSME, 17*(3), 559-579.

Molina, M., Cañadas, M. C., Moreno, A. y del Rio, A. (2015). *Tareas para promover el pensamiento funcional. Una propuesta para segundo ciclo de educación primaria.* Granada, España: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

National Council for Curriculum and Assessment, NCCA. Recuperado de http://www.ncca.ie/en/Curriculum_and_Assessment/Early_Childhood_and_Primary_Education/Primary-Education/Primary_School_Curriculum/

NCTM Standard and Positions. Principles and Standards: Algebra (2015). Recuperado de http://www.nctm.org/Standards-and-Positions/Principles-and-Standards/Algebra

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM. Mathematics Education, 40*, 83-96.

Radford, L. (2015). Introduction: The phenomenological, epistemological, and semiotic components of generalization. *PNA, 9*(3), 129-141.

Rico, L. (2006). La competencia matemática en PISA. *PNA, 1*(2), 47-66

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA, 4*(1), 1-14

Schliemann, A., Carraher, D., Brizuela, B., Earnest, D., Goodrow, A., Lara-Roth, S., y Peled, I. (2003). Algebra in Elementary School. *International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4,* 127-134.

Smith, E. (2008). *Representational Thinking as a Framework for Introducing Functions in the Elementary Curriculum.* En J. J. Kaput, Carraher, D. W., Blanton, M. L. (Eds.), *Algebra in the Early Grades (*pp. 133-160). New York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Taylor, S. & Bogdan, R. (1988). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación*. Barcelona, España: Ed. Paidos.

Van Der Walle, J. A. (2007). *Elementary and middle school mathematics. Teaching developmentally*. Boston, MA: Pearson Education.

Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA, 9*(3), 191-213.

Vergnaud, G. (1985). Understanding mathematics at the secondary-school level. En A. Bell, B. Low, y J. Kilpatrick (Eds.), *Theory, research and practice in mathematical education* (pp. 27-45). Shell Center for Mathematical Education, University of Nottingham, UK

Warren, E., y Cooper, T. (2006). Using repeating patterns to explore functional thinking. *Australian Primary Mathematics Classroom, 11*(1), 9.

ANEXOS

Anexo I - Instrumento de recogida de datos

Curso 3º Fecha: ____________________

Nombre y Apellidos: ______________________________________

María y Raúl son dos hermanos que viven en La Zubia. María es la hermana mayor. Sabemos que María es 5 años mayor que Raúl.

1. Cuando Raúl tiene si 7 años ¿cuántos años tiene María? ¿Cómo lo sabes?

2. Cuando Raúl tiene 15 años ¿cuántos años tiene María? ¿Cómo lo sabes?

3. Cuando Raúl tiene 80 años ¿cuántos años tiene María? ¿Cómo lo sabes?

Curso 3º

Nombre y Apellidos: ______________________________

Construye una tabla para organizar toda la información que tienes sobre la edad de Raúl y María.

5. Rellena algunas filas de la tabla con cantidades que pueden ser ciertas. Recuerda que María es 5 años mayor que Raúl. No escribas en la fila que aparece en gris.

Edad de Raúl	Operaciones para calcular la edad de María	Edad de María
7		
15		
80		
⇨	➡	

6. Elije una letra para indicar la edad de Raúl. Coloca la letra en la fila de la tabla que aparece en gris, junto a la flecha blanca.
Junto a la flecha negra, escribe cómo usar la letra para calcular la edad de María.

7. Cuando María tiene 66 años ¿cuántos años tiene Raúl?

¿Cómo lo sabes?

8. Si sabes cuántos años tiene María ¿Cómo puedes saber cuántos años tiene Raúl?

Anexo II - Transcripción de las intervenciones orales de los alumnos durante la sesión de recogida de datos

Marta: ¿Qué edad pensáis que pueden tener Raúl y María? ¿Quién está hablando, a ver que levante la mano? Mario, ¿cuántos crees tú que pueden tener?

Mario: Raúl 3 y María 8

Marta: Otra idea, a ver Miguel

Miguel: 55,

Marta: ¿Quién?

Miguel: María

Marta: y ¿Raúl?

Miguel: 50

Marta: Alejandra tú qué piensas

Alejandra: Yo creo que Raúl tiene 30, luego, y.....

Marta: y María ¿tienes alguna idea?

Alejandra: y María 35

Marta: puede ser, Sandra:

Sandra: yo creo que María tiene 16 y Raúl tiene 12, 11

Marta: vale, a ver por ejemplo, Carla

Carla: yo creo que María 20 y Raúl 15

Marta: Puede ser también. ¿Mariona?, a que te la ha quitado. ¿Pablo?

Pablo: yo creo que María 19 y Raúl 14.

Marta: Bueno, veo que tenéis muchas respuestas. Voy a parar porque vamos a empezar a trabajar con las actividades y luego participáis los demás. ¿Vale? ¿Alguien tiene alguna duda de la situación, algo que no haya entendido? Yo os recuerdo, hay dos hermanos, María es la mayor, vale, Raúl es el pequeño y María es 5 años mayor que Raúl. ¿Alguien tiene alguna pregunta? ¿No?

Alumno: ¿Cuántos años tiene Raúl?

Marta: eso no os lo he dicho, yo solo he dicho que uno, que María es mayor y que es 5 años mayor y os he dicho los dos nombres, María y Raúl. No os he dicho más cosas. ¿Alguna pregunta más? Entonces vamos a empezar. Lo que vamos a hacer es que os voy a dar una hojita y quiero que penséis tranquilos la primera hoja que hay tres preguntas y luego vamos a comentarlas todos juntos para ver como lo habéis pensado cada uno, ¿vale? Si tenéis cualquier duda pues nos llamáis a María o a mí y nos acercamos, levantáis la mano.

Si tenéis cualquier duda nos lo decís a María o a mí y nos acercamos.

Veréis que en la hoja pone un hueco para la fecha y para el nombre, así que lo primero que podéis hacer es poner la fecha y el nombre. ¿Os acordáis de que día es hoy?

Todos: 11

Marta: ¿de qué mes?

Todos: de febrero, del 2

Marta: ¿de qué año?

Todos: de 2015

Marta: pues entonces sí que os acordáis.

Marta: Ya sabéis, si tenéis alguna duda, levantáis la mano y nos acercamos.

Marta: Hay una errata, empezamos bien.

María: En la primera, donde pone 1, y dice "cuando Raúl tiene si 7 años" el sí sobra.

Marta: Yo lo estoy tachando.

María: Este sí sobra, "cuando Raúl tiene 7 años".

María: Hay por detrás

Niña: en el mío no

Marta: No pero bueno, si habéis acabado ya, que veo que algunos sí, bueno, vamos a esperar a darle la vuelta, vale, os esperáis vale y lo hablamos todos juntos. Luego ya le daremos la vuelta. Ahora no hace falta.

María: Los que habéis terminado, como ahora vamos a hablar de las respuestas que habéis dado, vamos a poner las respuestas en común, podéis ir pensando como explicaríais lo que habéis hecho, vale y aprovecháis así este ratillo.

Marta: vamos a esperar un poco más, vale, para que acaben los que faltan y ahora lo vemos.

Marta: Bueno parece que ya todos tenéis las respuestas

Niños: si

Marta: bueno no, perdón, falta un poquito. No, ese después todavía no hemos llegado. Vamos a esperar un poquito y ya....

Marta: Bueno ya creo que si hemos acabado. Vamos a ver cómo lo habéis pensado. En la primera pregunta decía, cuando Raúl tiene 7 años, ¿cuántos años tiene María? ¿Quién quiere explicarme lo que ha pensado? ¿Manuel, tú que has pensado?

Manuel: yo he sumado 7 +2 son 10 y 10 más 2 son 12.

Marta: ¿tu respuesta cuál es?

Manuel: 12

Marta: 12 ¿y cómo lo has hecho? ¿Puedes repetirlo otra vez que no me he enterado bien?

Manuel: sumo 7 con 3 del 5 y luego más 2 da 12.

Marta: Muy bien, muy bien, ¿quién lo ha hecho de otra forma? A ver Carla ¿Cómo lo has hecho tú?

Carla: pues a 7 sumándole 5, María tiene 5 más

Marta: Vale, ¿alguien quiere explicarlo de otra manera? ¿Pablo?

Pablo: a 5 le sumo 7 y me da igual a 12 años

Marta: Vale, ¿hay alguien que haya dicho otra edad que no sea 12 años? ¿No? Parece que no, ¿no?,. Vamos a ver entonces la siguiente ¿Cuándo Raúl tiene 15 años, cuántos años tiene María entonces ahí? Uy cuantas manos, a ver Iñigo, ¿tú en este caso tú que has pensado?

Iñigo: que si Raúl tiene 15 años y María tiene 5 años más que Raúl, pues 15 más 5, 20.

Marta: ¿Quién me lo explica de otra manera diferente? ¿O lo ha pensado de una manera distinta? Puede que tenga la misma respuesta o no. A ver, ¿Cuál es tu nombre? Mariona, ¿tú como lo has pensado?

Mariona: imperceptible

Marta: Cuando tu tengas 15, ¿quién?

Mariona: cuando yo tengo 15….imperceptible

Marta: y entonces en este caso, ¿cuantos tendrá María?

Mariona: 20

Marta: ¿Alguien lo ha pensado de una manera distinta?

María: ¿alguien ha dado una respuesta diferente de 20? ¿Todos habéis puesto 20? ¿Seguro?

Marta: Bueno y cuando Raúl, si Raúl tiene 80 años, ya es más mayor Raúl y tiene 80 años. ¿Quién me lo quiere decir? A ver, ¿Samuel?

Samuel: Pues, si Raúl tiene 80 años y María es 5 años mayor, pues 80 más 5, 85

Marta: muchas gracias por la explicación. A ver, ¿quién lo ha pensado de una forma distinta? ¿O, tiene una respuesta distinta? ¿Pablo tú lo has pensado de una forma distinta?

Pablo: Raúl tiene 5 años menos que María, entonces si Raúl tiene 85, pues María tiene 80

Marta: Vale, vale, estupendo. A ver dime, ¿tú tienes otra forma de explicarlo? ¿Sandra?

Sandra: que como María tiene 5 años más que Raúl y Raúl tiene 80, pues 80 son 8 veces 10, al 10 le pones 5 y son 15, pues lo mismo solo que el 80.

Marta: no te he entendido bien, explícamelo otra vez

Sandra: como 80 son 8 veces 10 y María tiene 5 años más que Raúl, pues en vez de ponerle al 80 directamente 5, pues también puedes poner como 10 más 5 son 15, pues es igual que 80 más 5.

Marta: ¿y cuál es tu respuesta, entonces?

Sandra: pues 85

Marta: Vale, muy bien. Bueno, parece que no habéis tenido muchas dificultades con esto. Ahora os voy a decir una pregunta tan difícil que he dejado un hueco, habréis visto que hay un 4 que no pone nada al lado. Porque os voy a explicar yo una cosa que me pasó el otro día. Yo estuve viendo a María y me enseño una foto de un cumpleaños de hace tiempo, vale. Un cumpleaños de Raúl. En la foto aparece Raúl con sus amigos en el cumpleaños y con María, y soplando las velas de la tarta. Entonces, en la foto se ve la tarta con las velas, esas velas de numeritos, ¿las habéis visto esas velas de números? Pues en la foto aparece la tarta con las velas, y están Raúl con su hermana y otros amigos. Y entonces María viendo esa foto pensó, ¿cuántos años tenía yo en este cumpleaños de Raúl? Entonces, lo que quiero que penséis, es que me escribáis ahí, vamos a dejar un tiempo para que lo penséis cada uno, y ahora me lo decís a mí, pero ahora quiero que lo penséis cada uno y lo escribáis ¿Cómo puede averiguar María cuántos años tenía en ese cumpleaños? Sabiendo que en la foto están los dos y está la tarta con la velas de Raúl.

Alumno: ¿pero cuantos velas tiene?

Marta: yo no lo sé porque yo no he visto la foto

María: Marta yo no lo he entendido bien del todo

Marta: Tú no lo has entendido bien. En la foto del cumpleaños de Raúl, sale Raúl soplando las velas de su tarta, sale María y salen otros amigos. Entonces en la tarta podemos ver los años que cumplió Raúl, lo que pasa es que yo no he visto la foto. Entonces no os puedo decir cuántos años, cuantas velas había, porque yo no la he visto, a mí me lo ha contado María. Pero yo quiero que vosotros expliquéis ahí, si vosotros vierais la foto, ¿cómo podríais averiguar cuantos años tiene María? porque la foto es del cumpleaños de Raúl y sabéis que María es mayor que él, que es 5 años mayor. Escribidlo primero y ahora nos lo contáis, porque quiero darle tiempo a cada uno que lo piensa, porque hay gente que lo piensa más rápido y otra más despacio. Entonces pensadlo despacio cada uno y escribid lo que penséis al lado del 4 y ahora después lo hablamos todos juntos. Eso sí, si tenéis alguna duda llamadme porque entonces yo os puedo ayudar

Alumno: Pero ¿cómo sabemos cuántos años tiene Raúl?

Marta: Es que no lo sabemos, porque no veo la tarta.

Alumno: imperceptible

Consuelo: pero no contamos los días, supongamos que sí que nacieron el mismo día exactamente, vale y así no tenemos problemas

Marta: vosotros veis la tarta y en la tarta vais a ver el número. Entonces vosotros si veis la foto en la tarta viene el número, es si vierais la foto ¿Cómo averiguaríais la edad de María?

Alumno: sumándole… imperceptible

Consuelo: pero no lo digas en voz alta

Marta: Vamos a pensarlo cada uno un poquito, quiero que lo penséis porque es una pregunta difícil. Yo sé que la pregunta es difícil porque no os estoy diciendo cuantos años tiene Raúl.

Consuelo: Manuel tú piénsalo a tu manera, porque a lo mejor lo haces de forma diferente.

Marta: Yo sé que la pregunta es un poco extraña, pero quiero que la penséis y ahora hablamos sobre la pregunta.

26:39

Marta: A ver chicos, parece que todos tenéis ya una respuesta. ¿Quién me quiere explicar como lo ha pensado? A ver, Alejandro todavía no ha hablado, despacio. Silencio vamos a escuchar unos a otros. ¿Cómo has pensado tú que averiguarías la edad de María?

Alejandro: María puedes saber su edad mirando la tarta. Por ejemplo, si Raúl tiene 40 años, ella tendrá 45, si Raúl tiene 20, entonces María tendrá 25.

Marta: lo que pasa es que no sabemos los que hay en la tarta, las velas no sabemos exactamente cuántas hay

Consuelo: ¿por qué has puesto esos números?

Alejandro: ¿qué números?

Consuelo: el 20 y el 40

Alejandro: Ah, para el ejemplo

Consuelo: Ah, pero solo por poner un ejemplo. ¿Te servía cualquier número?

Alejandro: Si

Marta: ¿a ver cómo lo has pensado tú, Mario?

Mario: María tiene 5 años más que Raúl, entonces le sumas 5 a la edad de Raúl

Marta: vale, ¿y cómo sabrías la edad de Raúl?

Alumna: mirando en la tarta

Marta: a ver Joel, ¿quieres explicarlo de otra manera?

Joel: viendo las velas de la tarta, y cuantas velas tiene la tarta, si tiene por ejemplo 25, le sumas 5 más.

Consuelo: es importante que no borréis las respuestas, porque algunos a lo mejor no estáis hablando pero lo tenéis bien si lo habéis hecho de otra manera. Que os estoy viendo con la goma. No pasa nada, a lo mejor lo tenéis hecho de otra forma, la respuesta es correcta porque lo habéis explicado de otra manera. Por aquí Carla te quería decir algo.

Marta: ¿qué, Carla?

Carla: que no lo entiendo

Marta: No lo entiendes. Mira, en la foto sale Raúl y sale la tarta de Raúl, entonces podemos ver cuantos años que está cumpliendo en esa foto., porque podemos ver las velas y vemos el número. Y María está con él, sabemos que María es su hermana y es 5 años mayor que él. La pregunta es, como podemos averiguar, mirando la tarta, cuantos años que cumple María. Porque la tarta nos dice cuántos años cumple Raúl, pero no los que cumple María ¿Cómo podríamos averiguar la edad de mará?

Carla: sumándole 5

Marta: ¿a quién le sumarías 5?

Carla: a los años de Raúl

Marta: muy buena explicación ¿Alguien quiere explicarlo de otra manera? ¿Mario?

Mariona: imperceptible

Consuelo: pero la edad que ves es la de Raúl, ¿no Marta?

Marta: en la tarta lo que vemos es lo años que tiene Raúl en ese cumpleaños. Entonces, lo que sabemos, no sabemos la edad que tiene María, que es justo lo que queremos averiguar.

Mariona: lo que ha dicho Carla

Marta: Lo que había dicho Carla ¿qué es lo que había dicho Carla?

Mariona: le sumas 5 a la edad de Raúl

Consuelo: ah, que le sumas 5, vale

Marta: ¿Alguien tiene alguna pregunta?, ¿no? Bueno pues ahora lo que os quiero pedir es que construyamos una tabla con toda esta información que tenemos y por eso tenéis espacio por la parte detrás de folio, porque vosotros no sé si estáis acostumbrados pero, en matemáticas muchas veces organizamos lo datos en tablas, los números. Entonces ahora quiero que cada uno haga una tabla como quiera, ¿vale? cada uno como quiera, para recoger la información que tenéis de las edades de María y de Raúl.

Consuelo: ¿habéis hecho tablas alguna vez?

Alumnos: si

Consuelo: ¿si, no?

Alumna: Las llamamos, lluvia de ideas.

Consuelo: ¿Lluvia de ideas les llamáis a las tablas?

Alumnos: Nooooo

Alumna: cuando tenemos muchas ideas pues….

Alumno: pero eso no tiene nada que ver

Consuelo: Pero ahora es un poco distinto lo que está diciendo Marta, es que la información que tenéis de las edades de Raúl y de María que las pongáis en una tabla y l tabla la hacéis como queráis

Marta: vamos a organizar la información que tenemos. Antes hemos visto, me habéis estado vosotros contestando, cuando Raúl tiene 7 años, pues vosotros me habéis dicho cuántos años tenía María, cuando Raúl tenía 15, vosotros también me habéis dicho cuántos años tenía María y lo mismo le hemos hecho para 80 años. Entonces ahora lo que quiero es que hagáis una tabla donde pongáis toda esa información que sabéis de la edad de Raúl y de María. Vamos a poner las respuestas antes hemos estado pensando. Y cada uno lo pone como quiera.

(Los alumnos resuelven la cuestión, preguntando dudas a las distintas profesoras, imperceptible)

Marta: A ver chicos por favor, cada uno que vuelva a su asiento. Vamos a recoger las hojas, ¿vale? A ver, por favor, en la hoja que os hemos dado ahora no hay hueco para el nombre, pero quiero que lo pongáis. A ver por favor, Manuel ¿puedes cerrar el libro ahora que vamos a acabar?, gracias. En la hoja que tenéis quiero que pongáis el nombre arriba en la esquina y la vamos a recoger. Lo último que vamos a hacer ahora es hablar sobre lo que habéis estado pensando. Pero antes de que hablemos de eso voy a recoger los folios, vale, para que así me prestéis atención. Entonces os pido que pongáis el nombre y cuando ya tengáis el nombre puesto ya me puedo llevar las hojas. Y ahora quiero que me expliquéis todo lo que habéis estado pensando, porque habéis estado pensando mucho.

Marta: Quiero que me prestéis atención y me contéis todo lo que habéis estado pensando. Habéis visto que en la segunda hoja que yo os he dado, ya os he dado una tabla para que la rellenéis ahí, ¿vale? Y las habéis rellenado y habéis poniendo los números. Habéis tenido 3 columnas (mientras dibuja en la pizarra). Y habéis estado poniendo. En la primera columna habéis puesto, la edad de Raúl, aquí habéis puesto la edad de María, y en medio habéis puesto las operaciones que habéis hecho para averiguar. Con estas operaciones habéis averiguado la edad de María con la edad de Raúl. Y entonces habéis ido rellenando la tabla. Por ejemplo, habéis puesto el 7 (escribe en la primera columna), está el 7 ese venía, que habéis escrito aquí, en las operaciones que hay que hacer. ¿Cuál es tu nombre? Joel ¿qué operaciones?

Joel: 7 más 5, 12 y pones al lado que María tiene 12

Marta: Muy bien. Otro número que había en la tabla, el 15, ¿Quién me explica lo que había en el 15?

Alumnos: no es un 15, es un 12

Marta: uy, me he equivocado, menos mal que estáis despiertos (borra en la tercera columna). Muchas gracias. ¡Qué apañada eres! Cuando estaba aquí el 15(señala 1º columna), ¿qué operaciones habéis hecho con el 15? ¿Carmen?

Carmen: 15 más 5

Marta: 15 más 5, muchas gracias. ¿Y aquí? (señala la 3º columna)

Carmen: 20

Marta: había más números, algunos habéis puesto más números y otros menos. Y había, os pedíamos que pensarais en una letra. Que ese era el siguiente ejercicio, que algunos os habéis quedado con una cara muy rara diciendo, ¿qué me está pidiendo aquí? Podías elegir la letra que quisierais.

Alumnos: A, R, C, M, H

Marta: daba igual, la que queramos. Yo voy a poner la Z (escribe en la 1º columna). Por ejemplo, pero podría poner cualquiera de la que habéis dicho vosotros. Y entonces esta letra os pedíamos que la usarais para indicar la edad de Raúl, porque es que no sabemos cuántos años tiene Raúl, y que me explicarais que operaciones habría que hacer con la letra para averiguar la edad de María. ¿Qué se os ha ocurrido? Porque esta pregunta era un poco extraña. ¿Qué se os ha ocurrido? A ver, ¿Natalia?

Natalia: sumarle 5 a la letra

Marta: Sumarle 5 a la letra ¿por qué? ¿Por qué has pensado eso?

Natalia: porque María tiene 5 años más que Raúl

Marta: ¿Quién lo ha pensado de otra manera? A ver, ¿Pablo?

Pablo: Z más…, no, si fuese A más 5 igual a E

Marta: A más 5 igual a E. A ver explícame ¿cómo has llegado a eso?

Pablo: entre A y E hay 5

Marta: Hay 5, ¿dónde? ¿En el abecedario?

Pablo: Si

Marta: Ah, vale, Por eso pones la A para expresar la edad de Raúl y la E ¿qué indica en ese caso?

Pablo: La edad de María

Marta: ¿quién me explica la forma en que lo ha pensado? Alguien más que quiera contar como ha pensado lo de la letra. Mariona.

Mariona: Yo he puesto aquí una R de Raúl (señala 1º columna), y aquí una C de cinco (señala 2º columna)

Marta: una C de cinco, aquí ¿y por qué has puesto una C de cinco?

Mariona: Porque todo era sumando 5

Marta: Porque todo era sumando 5. Vale y si R es la edad de Raúl, ¿cómo pondrías la edad de María?

Mariona: M

Marta: ¿Por qué?

Mariona: Porque es la inicial

Marta: Porque es la inicial, ¿y qué tiene que ver la R con la M.?¿Qué relación hay entre la R y la M que has escogido?

Mariona: Son las iniciales de sus nombres

Marta: ¿qué más ideas tenéis? A ver Claudia

Claudia: Imperceptible…

Marta: O sea por ejemplo si coges la letra Z, ¿te vale esa, o cual has pensado tú? Si pongo la A que tú me estabas diciendo. Entonces en este caso, ¿qué harías con esa letra?

Claudia: Haría A más 5

Marta: A más 5, ¿y cuál sería entonces la edad de María?

Claudia: imperceptible

Marta: por ejemplo 47, ¿por qué 47?

Claudia: imperceptible

Marta: tú me has dicho que la A representa la edad de Raúl, y esto ¿qué quiere decir? (señala segunda columna A+5) ¿nos puedes explicar que quiere decir esto?

Claudia: imperceptible… porque si A es 42, le sumo 5. Imperceptible.

Marta: y te da 47, en el ejemplo que tú has pensado eso te da 47. A ver, Mario ¿cómo lo has pensado tú?

Mario: yo creo que es de otra forma, porque en vez del 5, en vez de sumarle 5.por ejemplo, yo tenía el número 17, como yo tenía 12 y yo tenía 5, pues lo que hacía era, sumaba R más 12 y me da 17

Marta: ¿La R qué es?

Mario: Raúl

Marta: ¿la edad de Raúl?

Consuelo: ¿A qué has llamado R tú?

Mario: a Raúl

Consuelo: ¿a la edad de Raúl?

Marta: ¿y qué haces con la R, que no me he enterado bien, le sumas 12?

Mario: como tengo 5 pues le sumo 12 y me da 17….imperceptible, R era el 5 más 12 era el 17

Marta: ¿tú estás pensado que María tiene 17 años?

Mario: Si

Consuelo: Mario, pero fíjate en la tabla que ha hecho allí Marta que es la misma que tenías en el folio. Tu habías llamado R a la edad de Raúl, y entonces, donde ponía operaciones, ¿Qué operaciones has puesto ahí? Para saber la edad de María. Si R es la edad de Raúl, como sabes cuál es la edad de María, ¿Qué operación haces con esa R?

Mario: la sumo a 12 y como yo quería que María tuviera 12, pero….es que me he equivocado. Porque en vez de poner A 5, yo creía que era al revés, entonces he puesto 12 y…

Consuelo: pero no pasa nada, Mario, lo puedes hacer ahora. Para ti le has llamado R a la edad de Raúl, piensa ahora que operación harías para saber la edad de María, aunque en la hoja hayas escrito otra cosa

Mario: le sumaría 5

Consuelo: le sumaría 5 a la R. Ponlo en medio Marta.

Mario: imperceptible

Consuelo: pero ahora lo puedes hacer bien Mario, no te preocupes, no pasa, aunque en la hoja hayas puesto otra cosa.

Marta: Entonces Mario, tú me estás diciendo que aquí pones una R

Consuelo: R es la edad de Raúl

Mario: y ahora a la R le sumo 5 para María

Marta: entendéis lo que están explicando vuestros compañeros, ¿qué os parece? ¿Tú quieres decir algo más? Natalia

Natalia: Por ejemplo la letra C, C más…

Marta: si pongo aquí una C, estás pensando (escribe 1º columna)

Natalia: la otra C más 5 y ahora pongo en el otro, H

Marta: ¿H? y este H ¿qué quiere decir?

Natalia Porque C más 5 es la H

Marta: Vale, Tú C más 5 lo estás escribiendo con la H: Entonces, esta C ¿qué se refiere? ¿Qué significa?, la C que son ¿qué cosa es?

Natalia: la edad de Raúl

Marta: La edad de Raúl, eso es. Y abajo el C más 5 ¿qué significa?

Natalia: la operación

Marta: ¿y la H? ¿Qué sería?

Natalia: la edad de María

Consuelo: Natalia, y entonces, Marta que le ha llamado Z a la edad de Raúl ¿qué operación tendría que hacer? Vamos a ayudarle porque tiene esa parte sin rellenar

Alumno: Z más 5

Consuelo y Marta: ¿quién está diciendo Z más 5?

Marta: Pablo ¿tú piensas que aquí es Z más 5?, ¿cómo los sabes?

Pablo: Se le suma 5 a Z

Marta: Carmen, ¿querías decir algo?

Mariona: imperceptible

Marta: dilo otra vez que no te he entendido bien, yo creo que casi nadie te ha escuchado

Mariona: la letra que tienes que poner debajo del 20 es una D, porque Z más 5 sería D.

Marta: Ah, vale ¿Lo habéis escuchado? Ella ha pensado que aquí habría que poner una D, porque Z más 5, si cuentas en el abecedario sería otra vez la D. Estamos pensando entonces en el orden del abecedario. Realmente la letra, que da igual la que pongamos, lo que quiere decir es la edad de Raúl, ¿no? entonces lo que estamos diciendo aquí es que, para calcular la edad de María le sumamos 5, eso es lo que me habéis dicho.

Vamos a ver lo que, había otras dos preguntas que ya nos queda muy poco tiempo, pero que quiero que las veamos a ver lo que habéis hecho. Una decía, cuando María tiene 66 años, ¿cuántos años tiene Raúl? ¿Quién me lo sabe decir? A ver, ¿Cuale es tu nombre? ¿Mario?

Mario: 61 años

Marta: ¿cómo lo has pensado?

Mario: 66 que tenía María menos 5 que tenía, menos 5 porque María era mayor, 61

Marta: ¿alguien quiere decir algo más? ¿No? Había una última pregunta, que no decía cuántos años tenía María, que decía: "Si sabes cuántos años tiene María (pero no nos dice cuántos), ¿Cómo puedes saber cuántos años tiene Raúl?" A ver, alguien que no haya hablado todavía. ¿Todo el mundo ha hablado? ¿Pablo?

Pablo: 5 años menos

Marta: ¿5 años menos? ¿Cómo lo sabes?

Pablo: porque si María son 5 años más que Raúl, pues cada año que sepan…imperceptible…. Si quitas 5 menos, si quito 5 pues Raúl tiene esos años

Marta: Muchas gracias ¿Alguien quiere decir algo más? ¿NO?