INTRODUCCION AL CÁLCULO MEDIANTE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Johan Espinoza González, Marianela Zumbado Castro
Universidad Nacional de Costa Rica, Liceo Nocturno Alfredo González Flores — Costa Rica
johanespi@hotmail.com, mzumbad2@gmail.com
Campo de investigación: Resolución de problemas — Nivel: Medio

Resumen. *Esta investigación presenta la puesta en práctica de una propuesta pedagógica para apoyar la enseñanza del Cálculo mediante la resolución de problemas a nivel preuniversitario en Costa Rica. El proyecto tiene su origen en las dificultades que presentan los estudiantes en la comprensión de conceptos básicos de Cálculo, específicamente el de límite y derivada.*
Esta experiencia se fundamentó en la elaboración de una "situación problema" que provocó un conflicto intelectual en los estudiantes, mientras que el docente fungió como mediador y aprovechó los descubrimientos hechos por los estudiantes para fundamentar teóricamente los diferentes conceptos luego de la aplicación de la propuesta. Los resultados obtenidos son muy positivos y justifican la necesidad de un cambio en las estrategias metodologías utilizadas para enseñar el Cálculo. Sin embargo, es necesario un acercamiento de los docentes hacia la teoría de Resolución de problemas para aplicar con éxito este tipo de actividades.
Palabras claves: Resolución de problemas, cálculo diferencial, limite, derivada

Introducción

El Cálculo diferencial e integral es uno de las primeras materias que cursan los estudiantes de ingeniería y otras carreras cuando ingresan a la universidad. Esta asignatura es básica y es el preámbulo a otras materias específicas de la carrera donde requieren aplicar los conceptos adquiridos en esta área de la matemática.

El problema radica cuando los estudiantes al finalizar el curso de Cálculo afirman comprender las principales herramientas del cálculo, e incluso pueden calcular un límite o la derivada de una función, pero no saben contestar cuando se les pregunta qué es un límite o una derivada. Al respecto Artigue (1991) menciona que luego de que los estudiantes aprueban un curso de Cálculo logran un dominio razonable de los algoritmos algebraicos para calcular límites y derivadas; sin embargo, tienen dificultades en la conceptualización de los procesos subyacentes al límite y la noción de derivada.

En cuanto a su enseñanza, se ha caracterizado en su mayoría por la aplicación de estrategias de corte magistral, donde el docente explica los contenidos al inicio, resuelve algunos ejercicios aplicando los teoremas vistos en clase y al final de la misma propone ejemplos similares para que sean resueltos por los estudiantes.

Ante esto, nos propusimos diseñar una actividad diferente a la clase tradicional, que esté más acorde con la naturaleza misma de cómo nacen los conceptos matemáticos, que logre centrar el aprendizaje en el estudiante y lo involucre de una forma más activa dentro del proceso de aprendizaje.

Esta actividad debería permitir a los estudiantes construir formas de pensamiento que relacionen los conceptos matemáticos aprendidos y la aplicación de estos a la vida real.

Tomando en cuenta lo citado anteriormente, el motivo principal de esta investigación fue desarrollar una propuesta pedagógica para la enseñanza del Cálculo, específicamente los conceptos de límite y derivada, basada en la teoría de resolución de problemas planteadas por Pólya (1965), Shoenfield (1985) y Brousseau (1986), entre otros.

La actividad fue aplicada en un colegio público de Costa Rica ubicado en una zona rural. Se escogió esta estrategia porque genera en los jóvenes conocimientos más significativos y propicia en el aula un ambiente de mayor discusión académica. (Espinoza, Espinoza, González, Zumbado y Ramírez; 2008)

Fundamento Teórico

La resolución de problemas se ha convertido en los últimos años en una importante contribución a la Educación Matemática en muchas partes del mundo. Puede considerarse como pionera la obra de Pólya escrita en los años 40 del siglo XX, luego en los años 70 y 80 se realizaron más investigaciones en este campo, destacándose los trabajos de Kilpatrick, Lester, Goulding, Glasier, Schoenfeld y otros.

Lo más importante en la enseñanza de temas matemáticos a través de la resolución de problemas, es que éstos sean contextualizados y orientados. Además, debe caracterizarse porque el profesor ayude al estudiante a construir un profundo entendimiento de las ideas matemáticas y procesos, para que los estudiantes se ocupen de hacer matemáticas, esto es, crear, conjeturar, explorar, evaluar y verificar (Espinoza et al, 2008).

En esta investigación se plantea la resolución de problemas como el medio para hacer matemática, donde los problemas no se ven solamente como una práctica o simplemente como un adorno en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, sino que constituyen los medular en el proceso, será lo que permitirá al estudiante construir sus conocimientos matemáticos, Stanic & Kilpatrick (1989) citado en (Barrantes, 2008)

De esta forma la resolución de problemas es una estrategia metodológica que plantea un nuevo paradigma en la enseñanza y aprendizaje de la Matemática, que dista mucho del modelo tradicional.

Sin embargo, existen concepciones erróneas sobre lo que significa resolver un problema matemático. La mayor parte de las veces los alumnos piensan que es equivalente a resolver ejercicios rutinarios discutidos en clase, reproduciendo los algoritmos y explicaciones dadas por el profesor (Espinoza et al, 2008). Resolver un problema implica otro tipo de actividad mental de mayor exigencia, que debe estar orientada hacia una mayor participación del alumno en la búsqueda de la solución.

Para Brousseau (1986), un problema es una situación que el profesor propone al alumno para hacerle adquirir un conocimiento nuevo, por lo que dicha situación se plantea al inicio de la lección y es precisamente la solución a este problema el conocimiento que el docente quiere enseñar a los estudiantes. Sin embargo, estos no saben que van a aprender un concepto nuevo.

El trabajo del docente es de suma importancia en este tipo de metodología, pues toma un rol de guía mediador durante la solución del problema. Según Brousseau (1986), debe promover en su lección algo semejante a una microsociedad científica donde se construyan los conocimientos mediante las situaciones problemas planteadas para este fin.

Por esto es importante que el docente elabore problemas interesantes y adecuados a los conocimientos de los estudiantes, que le permitan desarrollar aptitudes y facultades inventivas, que no quiten la responsabilidad que debe sentir por resolverlo y disfrutar la satisfacción que genera el encontrar, por sus propios medios, la solución. Además, el problema no debe tener una solución inmediata, sino que debe hacer pensar al estudiante ya que “un problema es conceptualizado como una situación que nos hace pensar, así de simple” (Mancera, 2000, p16).

Encontrar la solución requerirá poner en juego todas nuestras capacidades y conocimientos; pero podemos hacer algo para resolverlo.

También debe tomar en cuenta que la situación problema debe estar inmersa en un contexto conocido para el estudiante y poseer una problemática a resolver. Esto conlleva ir más allá de resolver un ejercicio rutinario, es responder a la pregunta para qué y por qué resolver el problema.

Metodología

El primer trabajo realizado fue el de estudiar matemáticamente los conceptos incluidos en la propuesta, así como el nivel de complejidad que se debía alcanzar según el programa del curso. En esta fase fue necesario realizar una investigación histórica del Cálculo, así como de los conceptos a enseñar, para tener un marco referencial de cómo los matemáticos de la época construyeron dichos conceptos y así poder elaborar un problema que modelara de forma semejante dicha situación.

Luego de plantear los objetivos que se pretendían alcanzar con la actividad, se procedió a la elaboración de la situación problema, la cual fue revisada y mejorada varias veces con el fin de aplicar aquella que se ajustara más al marco teórico propuesto. Además se previeron y organizaron en etapas aquellos procedimientos, que consideramos, los estudiantes podían utilizar como posibles soluciones al problema

La propuesta didáctica se aplicó a un grupo de 20 estudiantes de un colegio rural al sur de Costa Rica llamado “Colegio Científico de Costa Rica, Sede Universidad Nacional” que propone en uno de sus cursos la enseñanza del Cálculo a estudiantes entre 16 y 18 años. La actividad tuvo una duración de tres sesiones de 2 horas cada una.

Este grupo se eligió porque uno de los investigadores era su profesor de matemática y éste ya se encontraba concientizado sobre la teoría de resolución de problemas.

La información se recolectó mediante la observación participante. Para ello se elaboró una guía de observación subdividida en categorías de análisis relacionadas con la participación de los estudiantes durante la actividad, la motivación y persistencia que mostraron mientras resolvían el problema, el papel del docente, el ambiente en el salón de clases, los procedimientos utilizados por los estudiantes para resolver el problema y el proceso de institucionalización del saber.

También se recolectó información de un portafolio que los estudiantes diseñaron y que contenía todos los procedimientos correctos o incorrectos que utilizaron para resolver el problema, las ideas aportadas por los compañeros del subgrupo y las decisiones tomadas, así como una reflexión del trabajo realizado en cada sesión.

Resultados

Uno de los principales resultados de esta investigación fue elaborar un problema con las características de un verdadero problema matemático, pues según el marco teórico expuesto no debería tener una solución inmediata, debía hacer pensar al estudiante y además estar contextualizado e inmerso en una problemática.

La situación problema presentaba a los estudiantes un escenario hipotético donde él, junto con su familia, se dirigían de paseo por una carretera muy conocida en la zona, pero que a cierta distancia de un punto los detuvo un oficial de tránsito y les dijo que según el radar para medir la velocidad viajaban a exceso de velocidad. Debido a que el padre del estudiante siempre conducía de forma prudente, pero el día anterior se había dañado el tacómetro, no sabía si la versión dada por el oficial era cierta. Ante esto, se le propone al estudiante justificar con argumentos válidos al oficial de tránsito, que el vehículo no había sobrepasado el límite de velocidad permitido y que por tanto no merecían ningún tipo de multa.

Para resolver el problema los estudiantes se organizaron en subgrupos de 4 personas. Estos discutieron a lo interno del subgrupo para comprender la problemática a resolver. Al inicio se observó alguna resistencia a iniciar el trabajo, algunos estudiantes hicieron comentarios como “no sé cómo empezar”. En este momento fue muy importante la intervención del profesor para motivar a los estudiantes a continuar con la solución del problema, ya que el docente es el encargado de generar situaciones que puedan mantener al alumno interesado y provocar un envejecimiento positivo de las situaciones (Chevallard, 1991).

Esta resistencia se dio posiblemente porque los estudiantes no están acostumbrados a este tipo de actividades; sin embargo, como avanzó la actividad se sentían más comprometidos y motivados a resolver el problema.

Después de comprender la problemática, discutieron a lo interno del subgrupo para establecer una estrategia que les permitiera resolver el problema. En esta fase identificaron que tenían que calcular la velocidad en que viajaba el vehículo en el instante en el que el oficial había tomado la medición de la velocidad.

En la redacción del problema se le indicó a los estudiantes que estudios previos mostraban, que la distancia recorrida desde un punto determinado hasta 4 km al sur (de dicho punto) estaba dado por la relación $s(t) = \frac{1}{2}t^2 \quad \frac{1}{16}t^3, \quad 0 \le t \le 4$. Con esta información determinaron que el oficial de tránsito había tomado la medición 2 minutos después de dicho punto.

En primera instancia determinaron la velocidad media desde el minuto cero al minuto 2; sin embargo, después de analizar la respuesta obtenida y las condiciones del problema, se dieron cuenta que dicha respuesta no era la velocidad con la que viajaban en el momento que el oficial tomó la medición de la velocidad. Luego de analizar las nuevas estrategias que aportaban los compañeros del subgrupo, decidieron calcular la velocidad del vehículo como una razón de cambio entre la distancia y el tiempo, pero en un lapso muy pequeño de tiempo. Al respecto uno de los estudiantes anotó en su portafolio *"al principio pensamos en hacer lapsos de tiempo, pero los que hicimos eran muy grandes, así que lo hicimos con lapsos de 2 segundos y de menos, así la velocidad media nos dio 75 km/h".*

A continuación se presenta la solución dada por uno de los subgrupos de trabajo, donde se observa los cálculos realizados del tiempo, la distancia y por último la velocidad aproximada del vehículo en el instante 2 minutos.

$$v = \frac{d}{T} \qquad \frac{x - 1{,}5}{2{,}1 - 2} \qquad \frac{1}{2}(2{,}1)^2 - \frac{1}{16}(2{,}1)^3 = 1{,}6261875$$

$$\frac{1{,}6261875 - 1{,}5}{2{,}1 - 2} = 1{,}261875 \cdot 60 = 75{,}7125$$

$$\frac{1}{2}(2{,}01)^2 - \frac{1}{16}(2{,}01)^3 = 1{,}512512438$$

$$\frac{1{,}512512438 - 1{,}5}{2{,}01 - 2} = 1{,}2512437 5 \cdot 60 = 75{,}074625$$

$$\frac{1}{2}(2{,}001)^2 - \frac{1}{16}(2{,}001)^3 = 1{,}501250125$$

$$\frac{1{,}501250125 - 1{,}5}{2{,}001 - 2} = 1{,}250124938 \cdot 60 = 75{,}00749625$$

$$\frac{1}{2}(2{,}000001)^2 - \frac{1}{16}(2{,}000001)^3 = 1{,}50000125$$

$$\frac{1{,}50000125 - 1{,}5}{2{,}000001 - 2} = 1{,}25000012 \cdot 60 = 75{,}0000072$$

Tiende a 75 Km/h $\therefore$ No excede 80 km/h

José Andrés
Lizeth María
Diana María
Bairon Josué

Luego de que los subgrupos resolvieron el problema, el profesor realizó la institucionalización de los conceptos matemáticos empleados por los estudiantes. Para ello se tomó una sesión de 2 horas y se definió teóricamente los conceptos de límite y derivada y se contrastó con las nociones que tenían los estudiantes producto del proceso de solución del problema.

Se debe destacar que los estudiantes tuvieron un gran protagonismo en esta última fase de la clase, ya que relacionaban lo expuesto por el profesor con la experiencia vivida al momento de enfrentar las diferentes etapas para resolver el problema. Además, pusieron en práctica estos conceptos en otros ejercicios que se les aplicó.

Consideraciones finales

Según Brousseau (1986) el trabajo intelectual del estudiante es muy importante dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje, ya que éste no debe basarse solamente en aprender definiciones y teoremas para reconocer su aplicación a ciertos ejercicios. Además, menciona que debe descubrir los resultados por sí mismos, llevando a cabo procesos de formulación, comprobación y refutación para compartirlos con sus compañeros.

Es estimulante observar que el trabajo realizado por los estudiantes en esta actividad se asemejó en gran medida al planteamiento de Brousseau, pues ellos mismos construyeron el concepto de límite y derivada al resolver el problema. Además, las lecciones no se basaron únicamente en aplicar teoremas expuestos por el docente, para que luego los estudiantes determinaran el valor de un límite o una derivada.

De las reflexiones hechas por los estudiantes se extrae que estos se sintieron cómodos con la experiencia de resolver el problema, ya que hicieron anotaciones como *"me sentí motivado porque la actividad era diferente" "trabajar en grupos es más bonito, porque todos aportan ideas", "con este tipo de actividades se comparte más con los compañeros".*

La actividad realizada también dejó ver la motivación y persistencia de los estudiantes para resolver el problema. Aunque al inicio se notó frustración en los estudiantes porque el problema les pareció difícil y no vieron una solución inmediata, al finalizar manifestaron que cuando lo resolvieron quedaron satisfechos porque el esfuerzo que pusieron valió la pena.

En cuanto al papel del docente, los estudiantes manifestaron que este no debe decir la respuesta al problema, sino que ellos tienen que resolverlo con la ayuda del profesor. En este tipo de metodología es importante que el docente se encuentre concientizado sobre los aspectos teóricos de la propuesta, pues no debe dar respuestas a las preguntas planteadas por los estudiantes sino que debe generar discusión a través de buenas preguntas. Según Espinoza et al (2008), las intervenciones que éste hace deben reorientar al estudiante en la solución del mismo.

En síntesis, este tipo de metodologías produce que los estudiantes construyan el conocimiento, despertando el interés, la motivación y la responsabilidad por resolver el problema. Además, propicia una mayor participación académica del estudiante, desarrolla habilidades de comprensión, análisis, trabajo en equipo, actitud de diálogo, toma de decisiones y la convivencia, así como la aplicación de conocimientos al mundo real. Los estudiantes encuentran en esta actividad una forma interesante y diferente a la tradicional de ver los conceptos matemáticos y la manera en que estos son utilizados y reviven de alguna manera la construcción del saber como lo hicieron los matemáticos de la antigüedad.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1991). Analysis. En D. Tall (Ed). *Advanced mathematical thinking* (pp. 167- 198). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Barrantes, H. (2008). Creencias sobre las matemáticas en estudiantes de la enseñanza media Costarricense. *En Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática* 4, 191 – 213.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques 7 (2)*, 33-115.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del Saber Sabio al Saber Enseñado*. Buenos Aires: Aique Grupo Editor.

Espinoza, J., Espinoza, J., González, M., Zumbado, M. y Ramírez, C. (2008) *La resolución de problemas en la Enseñanza de las matemáticas: una experiencia con la función exponencial, polígonos y Estadística*. Tesis de Licenciatura no publicada. Universidad Nacional de Costa Rica.

Mancera, E. (2000). *Saber Matemáticas es saber resolver problemas.* México D.F: Grupo Editorial Iberoamericana

Pólya, G. (1965) .*Cómo plantear y resolver problemas.* México D.F: Trillas.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematics Problem Solving.* Orlando: Academics Press