ESTRUCTURAS EN FUNCIONES CON VARIABLES CONTINUAS EN ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN PRIMARIA EN UN PROGRAMA DE ENRIQUECIMIENTO CURRICULAR

Structures in functions of continuous variables by Primary students'I n a curriculum enrichment program

Damián, A.[a], Cañadas, M.C.[a], Ramírez, R.[a]

[a]Universidad de Granada

Resumen

Este trabajo se enmarca en el ámbito del pensamiento algebraico en las primeras edades. Nuestra investigación es parte de otra más amplia cuyo objetivo es describir el pensamiento funcional de seis estudiantes de 6º de primaria que pertenecen a un programa de enriquecimiento curricular. En el presente documento, nos centramos en la descripción de las estructuras evidenciadas por los estudiantes en una tarea de generalización en un contexto geométrico que involucra una función cuadrática de variable continua. Implementamos dicha tarea durante dos sesiones: en la primera de ellas, los alumnos trabajan de forma individual y colectiva, siendo la segunda una entrevista individual. Los estudiantes establecen varias estructuras y evidenciamos que tienen capacidad para representar de forma verbal y simbólica.

Palabras clave: pensamiento funcional, enriquecimiento curricular, estructura, representación, variable continua

Abstract

This work is part of the field of algebraic thinking in the early ages. Our research is part of a broader one whose objective is to describe the functional thinking of six 6th grade students who belong to a curricular enrichment program. In this document, we focus on the description of the structures evidenced by the students in a generalization task in a geometric context that involves a quadratic function of a continuous variable. We implement this task during two sessions: in the first one, the students work individually and collectively, the second being an individual interview. The students establish various structures, and we show that they have the ability to represent verbally and symbolically.

Keywords: *functional thinking, enrichment program, structure, representation, continuous variable*

INTRODUCCIÓN Y JUSTIFICACIÓN

Desde la década de los 90 se han llevado a cabo múltiples investigaciones en torno al desarrollo del pensamiento algebraico en educación primaria. Con las primeras investigaciones surge la conocida propuesta curricular conocida como *early algebra*, que busca promover modos de pensamiento algebraico, generar un mayor grado de generalización en el pensamiento de

Damián, A. Cañadas, M. C., Ramírez, R. (2020). Pensamiento funcional con variables continuas en estudiantes de educación primaria en un programa de enriquecimiento curricular. En A. Editor1, B. Editor2 y C. Editor3 (Eds.), *Actas de las Jornadas Internacionales de Investigación y Práctica Docente en Alta Capacidad Matemática* (pp. inicial-final). Logroño: Universidad de La Rioja.

alumnos de educación primaria y aumentar su capacidad para expresar la generalización (e.g., Brizuela y Blanton, 2014; Molina, 2005).

Uno de los focos de investigación en el contexto de la propuesta *early algebra* es el pensamiento funcional. Se entiende por pensamiento funcional "la componente del pensamiento algebraico basada en la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen" (Cañadas y Molina, 2016, p. 3). En la última década se han publicado diferentes estudios en este contexto con estudiantes en España, en el marco de dos proyectos investigación I+D centrados en el pensamiento algebraico de estudiantes de educación primaria (e.g., Pinto y Cañadas, 2019; Torres, Cañadas y Moreno, 2019). Estos autores indagan en las relaciones funcionales y las estructuras de las mismas establecidas por los estudiantes, entre otros aspectos.

Hasta ahora, tanto en el ámbito nacional como en el internacional, las investigaciones se han centrado en el trabajo con funciones lineales de variable discreta, por lo que consideramos relevante el estudio con funciones no lineales. Es por ello que introducimos funciones cuadráticas, por ser las más simples dentro de las no lineales. Consideramos interesante explorar también las variables continuas, pues describen muchos de los fenómenos que podrían contextualizar otros problemas con funciones.

Como primera aproximación a este tipo de funciones con estudiantes de primaria, en este estudio trabajamos con alumnos de 6º de educación primaria que pertenecen a un programa de enriquecimiento curricular mediante el uso de una tarea que implica una función cuadrática de variable continua. En este tipo de programas se añaden "nuevos contenidos o temas que no están cubiertos por el currículo oficial o trabajo en un nivel de mayor profundidad de determinados contenidos de éste" (Benavides, Maz, Castro y Blanco, 2004, p. 54). La elección de dicho colectivo es minimizar las potenciales dificultades que podrían derivarse de la falta de conocimientos matemáticos previos o de una actitud negativa hacia las tareas matemáticas propuestas.

El presente estudio se justifica con base en dos dimensiones: curricular e investigadora. Desde el punto de vista curricular, el Ministerio de Educación y Ciencia (2014) establece el currículo básico de educación primaria. En matemáticas, encontramos la referencia al pensamiento funcional cuando se expone que el estudiante debe conseguir "describir y analizar situaciones de cambio, encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas en contextos numéricos, geométricos y funcionales, valorando su utilidades para hacer predicciones" (MECD, 2014, p. 19.387). En cuanto a la potenciación usada en la estructura de la tarea, la potencia es parte del bloque 2 y el área y el área del cuadrado aparecen en los bloques 3 y 4.

Desde el ámbito investigador, encontramos evidencias de la importancia de promover el pensamiento funcional en los primeros niveles educativos en estudios como Cañadas y Fuentes (2015) o Torres et al. (2019), entre otros. Dichos estudios cuentan con elementos comunes: tipo de variables (discreta) y tipo de funciones (lineales). Por tanto, destacamos la necesidad de indagar en el pensamiento funcional con tareas que impliquen variables continuas y funciones no lineales.

MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES

El foco matemático del pensamiento funcionales la función (Cañadas, Brizuela y Blanton, 2016). Se denomina pensamiento funcional al proceso de construir, describir y razonar con y sobre funciones, entendiendo como función la relación de dependencia entre cantidades covariantes. "Es una componente del pensamiento algebraico basada en la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen" (Cañadas y Molina, 2016, p. 3).

Nos centramos en funciones de variable continua. Se llama variable continua a aquella cuyos posibles valores son todos los valores pertenecientes a un intervalo y, por tanto, infinitos valores (Asencio, Romero y de Vicente, 2003).

De entre las diferentes concepciones de la estructura en el pensamiento algebraico (Molina y Cañadas, 2018), en el contexto funcional la asociamos a la organización de la regularidad entre las variables. Desde la perspectiva del pensamiento funcional, consideramos la noción de estructura como los números y las variables numéricas (expresadas mediante el uso de diferentes representaciones), operaciones y sus propiedades presentes (Pinto y Cañadas, 2018).

Diferentes autores abordan las estructuras que los estudiantes de educación primaria utilizan en la resolución de tareas de generalización de involucran funciones lineales. Torres et al. (2019) indagan en el pensamiento funcional de tres estudiantes de 2º de educación primaria (7-8 años), mediante el uso de tareas que implican tres funciones lineales: (a)$f(x) = x + 3$ (aditiva), (b) $(x) = 2x$ (multiplicativa) y (c) $f(x) = 1 + 2x$ (aditiva y multiplicativa). Los autores destacan la escasa variedad de estructuras diferentes por parte de los alumnos para una misma regularidad, en ocasiones porque identifican y usan la misma para todas las situaciones planteadas (correcta). También se evidencia la dificultad en el establecimiento de estructuras que implican una combinación de operaciones.

Pinto y Cañadas (2018) realizan un estudio a 24 estudiantes de 5º de educación primaria (10-11 años) que implicaba la función lineal $f(x) = 2x + 6$. Entre los resultados, destacan que los alumnos fueron capaces de establecer la generalización y que 10 estudiantes establecieron diferentes estructuras, expresadas de varias formas (hecho que permite interpretar y entender el proceso seguido por los estudiantes para generalizar, según los autores). Los autores conjeturaron que algunos estudiantes generalizaron pero no lo expresaron hasta que se les requirió. Pinto y Cañadas (2019) plantean la tarea anterior a alumnos de 3º de educación primaria (8-9 años) y 5º de educación primaria, observando una mayor variedad de estructuras en 3º que en 5º. Más estudiantes en 5º (19 de 24) que en 3º (11 de 24) establecieron la estructura. De hecho, los estudiantes de 3º hicieron uso de casos particulares en sus producciones, en ocasiones porque no necesitaban la regularidad para responder a las preguntas.

OBJETIVOS

El presente trabajo forma parte de una investigación más general cuyo objetivo general es describir el pensamiento funcional manifestado por un grupo de estudiantes de un programa de enriquecimiento curricular de 6º de educación primaria. El objetivo de este trabajo es describir las estructuras establecidas por dichos estudiantes.

METODOLOGÍA

Este estudio posee un enfoque cualitativo. Su naturaleza es, en consecuencia, descriptiva. Con base en la escasez de literatura de investigación en materia de estructuras cuadráticas y variables continuas en el contexto de educación primaria, este trabajo es de carácter exploratorio.

Trabajamos con 6 estudiantes de 6º de educación primaria (11-12 años) de un colegio concertado de Granada (España). Se trata de una muestra de carácter intencional. Los estudiantes pertenecían a un programa de enriquecimiento curricular en el área de matemáticas para atender a la diversidad dentro del aula.

El instrumento de recogida de información es un cuestionario que trabajamos con los estudiantes durante el desarrollo de dos sesiones, compuesto por diferentes preguntas. Dicha tarea involucra la función cuadrática$A(L) = 36 - L^2$ con una contextualización geométrica, hecho que permite el análisis de la continuidad de la variable, los valores extremos de las mismas y el uso de representación pictórica. Entendemos en el presente estudio por continuidad de la variable que los estudiantes reconozcan que la misma puede tomar todos los valores comprendidos en un intervalo (para los estudiantes, que puede tomar valores decimales); en este caso, el valor de la variable L está comprendido entre los valores 0 y 6.

La tarea consiste en la determinación del área resultante de quitar una esquina cuadrada de lado indeterminado (L) a un cuadrado de lado 6 (Figura 1).

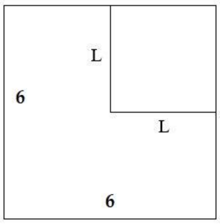

Figura 1. Tarea correspondiente a la primera sesión.

Diseñamos la recogida de información en dos sesiones en las que dos investigadores estuvieron presentes, así como la tutora de los estudiantes, aunque esta última no participó. Ambas sesiones fueron video grabadas.

En la primera sesión propusimos a los estudiantes trabajar con un cuadrado de lado 6 al que se le quita la esquina superior derecha. Les preguntamos por la relación existente entre el área de la figura resultante y el lado de la esquina que se elimina, siendo la misma $A(L) = 36 - L^2$, donde $A(L)$ es el área de la figura resultante y L es el lado de la esquina suprimida. La tarea se compone de tres apartados. En el primero de ellos, los estudiantes calcularon el área de un cuadrado de lado 6. En el segundo, el área de un cuadrado de lado 6 al que se le suprimen esquinas de lados 2 y 4; en el último, el área de un cuadrado de lado 6 al que se le suprime una esquina de lado L. Tras trabajar de forma individual cada uno de los apartados, los estudiantes hicieron una puesta en común junto con los investigadores, donde expusieron sus respuestas y llegaron a conclusiones comunes.

La segunda sesión fue una entrevista individual con cada uno de los estudiantes. La llevamos a cabo los dos investigadores del equipo que realizamos la sesión anterior, siendo uno de ellos el entrevistador y el otro, el encargado de grabaciones y observación. Les planteamos dos tareas similares a la de la primera sesión: un cuadrado al que se le quitan cuatro esquinas iguales y un cuadrado al que se le sustraen dos esquinas opuestas, no necesariamente iguales. En la primera tarea (Figura 2, izquierda), la relación es $A(L) = 36 - 4L^2$, donde $A(L)$ es el área de la figura resultante y L es el lado de la esquina suprimida; en la segunda (Figura 2, derecha), $A(X,Y) = 36 - X^2 - Y^2$, donde $A(X,Y)$ es el área de la figura resultante, X es el lado de una de las esquinas suprimidas y Y es el lado de la otra. La entrevista individual tuvo una duración máxima de media hora, aunque hubo estudiantes que la realizaron en menos tiempo.

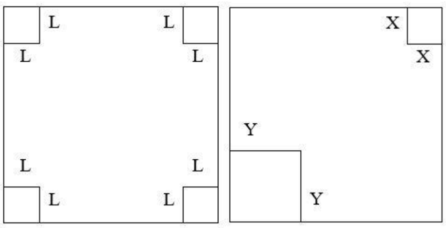

Figura 2. Tarea correspondiente a la segunda sesión

La información con la que contamos son la grabación y transcripción de las sesiones y el material escrito de los estudiantes.

La unidad de análisis del presente trabajo son las respuestas dadas por los estudiantes a cada pregunta de la tarea en cada sesión. Para analizar la estructura establecida por los estudiantes, tenemos en cuenta tres momentos de la recogida de datos: trabajo individual, puesta en común, entrevista.

ANÁLISIS DE DATOS Y RESULTADOS

Presentamos el análisis de datos y los resultados en tres partes, según los momentos temporales en los que recogimos la información: trabajo individual de la sesión grupal, puesta en común de dicha sesión y entrevista.

En el trabajo individual en el cuestionario, tres estudiantes establecieron una estructura, aunque incorrecta ($36 - L$). Los otros tres dieron valores concretos a la variable pero no llegaron a establecerla.

En la puesta en común, cinco los estudiantes intervinieron. En general, todos establecieron una relación entre las dos variables al decir que necesitaban conocer el lado de la esquina para poder calcular el área de cuadrado y por extensión, el área de la figura resultante. Los investigadores ayudaron a los estudiantes a establecer la estructura de forma simbólica mediante pasos, comprobando al final que todos ellos la entendieron y eran capaces de establecerla. Aunque los seis llegaron a establecer la estructura, solamente tres de ellos (E2, E3 y E6) establecieron por sí solos que el área pequeña es $L \times L$ (aunque en la estructura establecieron $36 - L$). Uno de los estudiantes usó la expresión “doble L” para representar el área del cuadrado pequeño.

Como síntesis de los resultados obtenidos durante la entrevista, en la tarea de las 4 esquinas, los seis estudiantes establecieron la estructura: uno mediante el uso de casos particulares, dos de forma incorrecta ($36 - 4L$, $36 - L$) y tres de forma correcta ($36 - 4L^2$). Teniendo en cuenta que todas las esquinas son iguales, analizamos si los estudiantes hicieron uso de una sola variable, concluyendo que 5 de ellos lo hicieron. En relación al hecho de usar la misma letra para las cuatro esquinas (pues son iguales las cuatro), cuatro de los cinco estudiantes lo tuvieron en cuenta y lo incluyeron en la estructura que establecieron. La dificultad de poner $4L$ en lugar de $4L^2$ puede provenir del hecho de que identificasen que debían quitarle cuatro veces algo que depende de L, pero no diferenciasen que L fuese la longitud del lado o el área de la esquina suprimida.

En la tarea de las 2 esquinas, dos estudiantes respondieron de forma correcta mientras que los restantes establecieron estructuras incorrectas ($36 - X - Y$). Dada la presencia en esta ocasión de dos variables y la existencia de la condición $X + Y = 6$ que liga ambas en caso de rellenar todo el lado, analizamos también la respuesta de los estudiantes con base en este hecho. En referencia al uso de dos variables diferentes, fueron todos los alumnos los que utilizan dos letras diferentes para notar cada una de las esquinas. Esto evidencia que los estudiantes asociaron que a esquinas diferentes le correspondían letras diferentes. Cuatro de ellos precisaron de ayuda pues sostenían argumentos como “si no fueran iguales pues a uno le pondría L y a otro pues un número o una letra más grande, multiplicando L por L” o “las llamaría igual porque al fin y al cabo hago lo mismo, puedes utilizar la misma letra”. También es interesante notar la agrupación de términos llevada a cabo por E4: en lugar de expresar $36 - X^2 - Y^2$, hizo uso de otras letras para indicar los productos ($M \times M = N$, $L \times L = A$), de forma que la relación final fue $36 - N - A$.

Atendiendo a los estudiantes, haremos una breve síntesis de la evolución de cada uno de ellos (Tabla 1):

Tabla 1. Síntesis de los resultados obtenidos por estudiante.

Estudiante	Trabajo individual	Puesta en común	Entrevista	
			Tarea 2 esquinas	Tarea 4 esquinas
E1	No establece estructura	No hay información	No establece estructura	$36 - X = 32$ $36 - Y = 30$
E2	$36 - L$	$36 - L$	$36 - 4L^2$	$36 - X^2 - Y^2$
E3	No establece estructura	No hay información	$36 - 4L^2$	$36 - X^2 - Y^2$
E4	No establece estructura	No hay información	$36 - L$	$36 - X^2 - Y^2$
E5	$36 - L$	$36 - L$	$36 - 4L$	$36 - X - Y$
E6	$36 - L$	$36 - L$	$36 - 4L^2$	$36 - X^2 - Y^2$

Vemos así que E2, E3 y E6 establecen de forma correcta las estructuras de las tareas de la entrevista, por lo que los estudiantes evolucionan con respecto a la primera sesión. Sin embargo, E5 no consigue establecer correctamente la estructura y E4 establece bien la relativa a la tarea de las 4 esquinas.

CONCLUSIONES

La principal contribución del presente estudio estriba en la introducción de una tarea que implica variable continua y una función cuadrática en un contexto geométrico. Ello ha permitido evidenciar las capacidades de los estudiantes de generalizar en contextos funcionales diferentes a los usuales en la literatura, que suelen contemplar variable discreta y funciones lineales.

Los estudiantes, que no habían recibido instrucción previa en el uso de las letras, establecieron$L \times L$ como área de la esquina eliminada, hecho que consideramos un logro importante por la generalización conseguida y la identificación de la estructura (equivalente a L^2). Sin embargo, cuando restaron esta cantidad a 36 (área del cuadrado original), no fueron capaces de agrupar como potencia cuadrada. Algunos estudiantes mencionaron la potencia, aunque no hicieron uso de ella de forma correcta. Ello puede deberse al hecho de que, si bien conocían la potencia aplicada a una situación con números, aritmética, no les era conocida en una situación con letras, algebraica (siendo el uso el mismo en ambas situaciones, pueda ser que los estudiantes no lo identifiquen como tal y consideren que el uso de la potencia es diferente con letras y con números). Puede deberse también al hecho de no haber adquirido bien los conocimientos previos relativos a la potencia.

Evidenciamos que los estudiantes tienen capacidad para representar de forma verbal y simbólica. No rechazan la notación simbólica, pero cometen errores, por lo que no creemos que la dificultad provenga de la función cuadrática, sino por agrupación de términos o uso de la notación simbólica. Concordamos con Pinto y Cañadas (2018) en que los estudiantes fueron capaces de generalizar y usar para ello estructuras de varias formas.

Torres et al. (2019) exponen la dificultad que presentaron los estudiantes de su estudio al establecer estructuras cuando estas implican una combinación de operaciones. En su caso, dichas estructuras son aditivas y multiplicativas. Si bien la estructura aquí es diferente, por ser combinación de potencia y diferencia, coincidimos con los autores en su conclusión de la dificultad de los estudiantes asociada a la combinación de estructuras.

Destacamos el papel delos investigadores en su interacción con los estudiantes durante las sesiones. Dichos estímulos ayudaron en varias ocasiones a los estudiantes a la consecución de las tareas, de forma similar a lo expuesto por Ureña, Ramírez y Molina (2019), donde los investigadores evidenciaron que los estímulos influyeron mucho en las respuestas de los estudiantes. La reformulación de las preguntas, la verbalización de las reflexiones de los estudiantes o la repetición de las preguntas son algunos de los estímulos que se llevaron a cabo en las sesiones. De acuerdo con Hidalgo-Moncada y Cañadas (2020), permitieron a los estudiantes en diversas ocasiones cambiar la estrategia en la que se aproximaban a la tarea o comprender lo que se les estaba pidiendo en la misma. El conocimiento de los estímulos que permiten avanzar a los estudiantes en el reconocimiento de estructuras y su representación simbólica es de interés para el posterior diseño de investigaciones docentes.

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo de investigación se ha realizado dentro del proyecto de investigación del Plan Nacional I+D con referencia EDU2016-75771-P, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España; y en el seno del grupo de investigación FQM-193: “Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico” (FQM-193) de la Universidad de Granada, perteneciente al Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía.

REFERENCIAS

Asencio, M. J., Romero, J. A. y de Vicente, E. (2003). *Estadística*. Madrid, España: McGraw-Hill Interamericana de España S.L.

Benavides, M., Maz, A., Castro, E. y Blanco, R. (2004). La educación de niños con talento en Iberoamérica. *Santiago de Chile: Oficina Regional de Educación de la Unesco para América Latina y el Caribe*.

Blanton, M. y Kaput, J. (2004). Elementary grades students’ capacity for functional thinking. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group of the Psicology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen, Noruega: Bergen University College.

Brizuela, B. y Blanton, M. (2014). El desarrollo del pensamiento algebraico en niños de escolaridad primaria. *Revista de Psicología – Segunda épica (UNLP), 14,* 37-57.

Cañadas, M. C., Castro, E. y Castro, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria en el problema de las baldosas. *PNA, 2*(3), 137-151.

Cañadas, M. C. y Fuentes, S. (2015). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: un estudio exploratorio. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 211-220). Alicante, España: SEIEM.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp.209-218). Granada, España: Comares.

Hidalgo-Moncada, D. y Cañadas, M. C. (2020). Intervenciones en el trabajo con una tarea de generalización que involucra las formas directa e inversa de una función en sexto de primaria. *PNA, 14*(3), 204-225.

Mason, J., Stephens, M. y Watson, A. (2009). Appreciating mathematical structure for all. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 10-32.

Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *2*(1), 24-40.

Ministerio de Educación y Ciencia (2014). Real Decreto 126/2014 de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. *BOE, 52,* 19.349-19.420).

Molina, M. (2005). La integración del pensamiento algebraico en Educación Primaria. En M. Camacho, P. Flores y M. P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 53-69). San Cristóbal de la Laguna, España: SEIEM.

Molina, M. y Cañadas, M. C. (2018). La noción de estructura en el early algebra. En P. Flores, J. L. Lupiáñez e I. Segovia (Eds.), *Enseñar matemáticas. Homenaje a los profesores Francisco Fernández y Francisco Ruiz* (pp. 129-141). Granada, España: Atrio.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2018). Generalization in fifthgraders within a functional approach. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, *12*(3), 173-184.

Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2019). Estructuras y representaciones de alumnos de 2º de primaria en una aproximación funcional del pensamiento algebraico. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y A. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 573-582). Valladolid, España: SEIEM.

Ureña, J., Ramírez, R. y Molina, M. (2019). Representations of the generalization of a functional relationship and the relation with interviewer's mediation. *Infancia y Aprendizaje, 42*(3), 570-614.