ACERCAMIENTO DEL ÁLGEBRA LINEAL A LA MATEMÁTICA DE SECUNDARIA: ÁREA DE POLÍGONOS CON LA FÓRMULA DE GAUSS

M.Ed. Sara Benicia Parra Torres
Universidad de La Salle, Costa Rica
sara.parra.torres@ulasalle.ac.cr

Resumen: Una de las formas de introducir algunos conceptos del álgebra lineal, es mediante la fórmula o método de Gauss para calcular el área de polígonos. En este caso se trata de aplicar dicho método a un triángulo ubicado en el plano cartesiano para lo que se requiere conocer las coordenadas de sus vértices. El área del triángulo se calcula entonces, a partir del determinante de la matriz de tercer orden, generada por sus vértices.
Esta propuesta consiste en que los escolares de secundaria tengan contacto con algunos elementos, como las matrices y los determinantes, mediante la geometría analítica, además de trabajar la aritmética que implica el uso de dichos conceptos.

Palabras clave: determinante, matrices, triángulos, área, geometría analítica.

Abstract: One of the ways to introduce some concepts of linear algebra is by means of Gauss' formula or method to calculate the area of polygons. In this case it is a matter of applying this method to a triangle located in the Cartesian plane for which it is necessary to know the coordinates of its vertices. The area of the triangle is then calculated from the determinant of the third order matrix generated by its vertices.
The idea is for the students to have contact with some elements, such as matrices and determinants, through analytical geometry, in addition to working on the arithmetic involved in the use of these concepts.

Key words: determinant, matrices, triangles, area, analytical geometry.

Introducción

Una de las aplicaciones de las matrices y los determinantes se da en el cálculo del área de polígonos, utilizado en áreas como la Topografía y la Agrimensura en general. Carl Gauss propuso una fórmula que permite calcular el área de una región poligonal de la cual se conocen las coordenadas cartesianas de los vértices. Por ejemplo, el área del polígono de la figura 1 se puede deducir de la suma de varios trapecios que se forman trazando las perpendiculares que van desde los vértices hasta el eje de las abscisas. Estos trapecios son *P'1P1P2P'2; P'2P2P3P'3; P'3P3P4P'4* y *P'1P1P4*P'4.

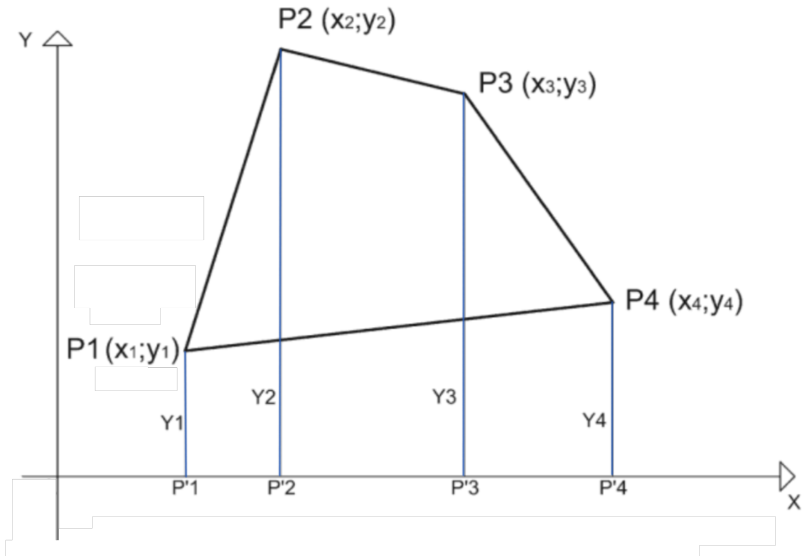

Figura 1. Polígono P1P2P3P4

Si llamamos a la superficie de estos trapecios S1, S2, S3 y S4, respectivamente, el área buscada será: *Área = S1+S2+S3-S4*.

El área de los trapecios en función de las coordinadas cartesianas de sus vértices será:

$$Área = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_2 - x_1) + \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_3 - x_2) + \frac{1}{2}(y_3 + y_4)(x_4 - x_3) - \frac{1}{2}(y_4 + y_1)(x_1 - x_4)$$

Resolviendo los productos y simplificando se obtiene:

$$Área = \frac{1}{2}[y_1(x_2 - x_4) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_4 - x_2) + y_4(x_1 - x_3)]$$

Generalizada para un polígono de *n* lados:

$$Área = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_i + y_{i+1})(x_{i+1} - x_i)$$

es decir:

$$\boldsymbol{Área} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{y_i}(\boldsymbol{x_{i+1}} - \boldsymbol{x_{i-1}}) \qquad \textbf{(1)}$$

Con el mismo procedimiento y trazando las perpendiculares desde los vértices hasta el eje de las ordenadas, se obtiene:

$$Área = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i + x_{i+1})(y_{i+1} - y_i)$$

es decir:

$$\boldsymbol{Área} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{x_i}(\boldsymbol{y_{i+1}} - \boldsymbol{y_{i-1}}) \qquad \textbf{(2)}$$

De modo textual, la fórmula de Gauss señala que el área de una superficie poligonal de *n* vértices, de los cuales se conocen las coordenadas cartesianas, está dada por la semisuma de los productos de las ordenadas de cada vértice por la diferencia de la abscisa del vértice siguiente y la abscisa del vértice precedente. Esto para el caso en que las perpendiculares trazadas desde los vértices al eje de las abscisas.

De una forma menos compleja, a continuación, se propone el cálculo del área de un polígono a partir del calculo del área de uno o varios triángulos utilizando esta fórmula de Gauss. Para eso se deducirá esta fórmula desde una matriz de tercer orden elaborada con las coordenadas de los vértices de un triángulo dado. Al final, la fórmula para el cálculo del área del triángulo no es más que un caso particular de la fórmula del área de Gauss expuesta anteriormente.

La finalidad de este texto es poner a consideración de los enseñantes de Matemáticas, la posibilidad de introducir el tema en secundaria, al nivel de escolares que no necesariamente han estudiado matrices, determinantes y sus aplicaciones.

Cálculo del área de un triángulo con la fórmula de Gauss

Para determinar el área de un triángulo de vértices A (x_A, y_A), B (x_B, y_B) y C (x_C, y_C), donde $A, B\ y\ C \in R^2$, se puede utilizar la fórmula de Gauss:

$$Área\ \Delta ABC = \frac{1}{2}|D|$$

Donde $|D|$ indica el valor absoluto del determinante de la matriz constituida por las coordenadas de los vértices del triángulo, es decir:

$$D = \begin{vmatrix} \mathrm{x_A} & \mathrm{y_A} & 1 \\ \mathrm{x_B} & \mathrm{y_B} & 1 \\ \mathrm{x_C} & \mathrm{y_C} & 1 \end{vmatrix}$$

Para calcular el valor de D, es útil emplear el método de la multiplicación en diagonal, también conocido como *regla de Laplace o de Sarrus.* Este método aplicado a una matriz de tercer orden, como la anterior, establece que su determinante se calcula de la siguiente manera:

> *El valor del determinante es la suma de los productos de los términos positivos, menos la suma de los productos de los términos negativos. (*Casteleiro, 2004, p.75).

Esta regla se traduce, con las coordenadas de los vértices del triángulo ABC, así:

$$(\mathrm{x_A})(\mathrm{y_B})(1) + (\mathrm{x_B})(\mathrm{y_C})(1) + (\mathrm{x_C})(\mathrm{y_A})(1) - (\mathrm{x_C})(\mathrm{y_B})(1) - (\mathrm{x_B})(\mathrm{y_A})(1) - (\mathrm{x_A})(\mathrm{y_C})(1)$$

Se puede simplificar factorizando términos semejantes, así:

$$\mathrm{x_A}[(\mathrm{y_B}) - (\mathrm{y_C})] + \mathrm{x_B}[(\mathrm{y_C}) - (\mathrm{y_A})] + \mathrm{x_C}[(\mathrm{y_A}) - (\mathrm{y_B})]$$

De donde resulta que el área del triángulo ABC, conocidos sus vértices A (x_A, y_A), B (x_B, y_B) y C (x_C, y_C), es:

$$Área\ \Delta ABC = \frac{1}{2}|\mathrm{x_A}[(\mathrm{y_B}) - (\mathrm{y_C})] + \mathrm{x_B}[(\mathrm{y_C}) - (\mathrm{y_A})] + \mathrm{x_C}[(\mathrm{y_A}) - (\mathrm{y_B})]|$$

Con un ejemplo muy sencillo se puede poner a prueba esta fórmula: Dado el triángulo ABC de la figura 1, calcular el área con el método de Gauss.

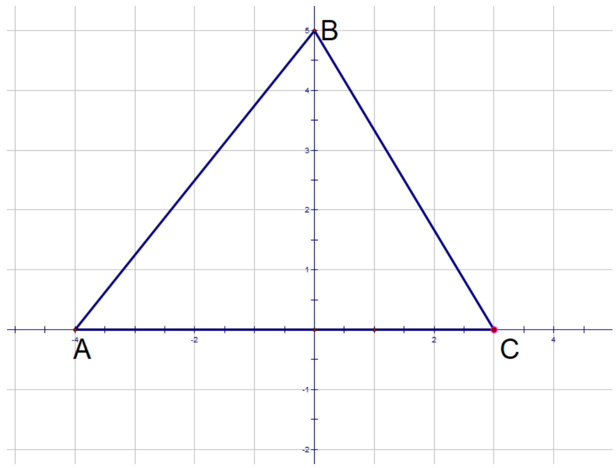

Figura 2. Triángulo ABC

Al sustituir las coordenadas de los vértices se obtiene:

$Área\ \Delta ABC = \frac{1}{2}|-4[(5) - (0)] + 0[(0) - (0)] + 3[(0) - (5)]|$, de donde:

$Área\ \Delta ABC = \frac{1}{2}|-35|$, es decir

$$Área\ \Delta ABC = \frac{35}{2}$$

Gráficamente, se puede constatar que la base del triángulo mide 7 unidades y su altura 5 unidades. Utilizando la fórmula de cálculo del área de un triángulo cualquiera:

$Área\ \Delta ABC = \frac{b \cdot h}{2}$ se obtiene:

$$Área\ \Delta ABC = \frac{35}{2}$$

Cálculo del área de un polígono

Este método para el cálculo del área de un triángulo puede aplicarse al cálculo de áreas de polígonos cuyas áreas correspondan a la suma de las áreas de varios triángulos, dicho de otra forma, regiones poligonales que puedan descomponerse en regiones triangulares.

Por ejemplo, si el triángulo ABC de la figura 2 hace parte del polígono ABCD de la figura 3, donde D tiene por coordenadas (-1,-2), el área total corresponde al área del polígono:

$$Area\ total = Area\Delta ABC + Area\Delta ACD$$

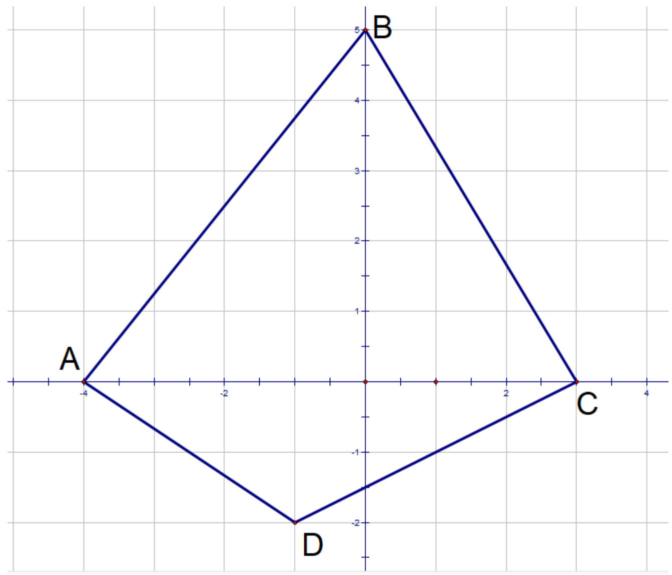

Figura 3. Polígono ABCD

El área del triángulo ACD corresponde a:

$\acute{A}rea\ \Delta ACD = \frac{1}{2}|\mathrm{x_A}[(\mathrm{y_c}) - (\mathrm{y_d})] + \mathrm{x_c}[(\mathrm{y_d}) - (\mathrm{y_A})] + \mathrm{x_d}[(\mathrm{y_A}) - (\mathrm{y_c})]|$

$\acute{A}rea\ \Delta ACD = \frac{1}{2}|-4[(0) - (-2)] + 3[(-2) - (0)] - 1[(0) - (0)]|$

$\acute{A}rea\ \Delta ACD = \frac{1}{2}|-14|$, es decir

$\acute{A}rea\ \Delta ACD = \frac{14}{2}$, por lo tanto:

$$Area\ total = \frac{49}{2}$$

A modo de verificación, podemos utilizar la fórmula de Gauss (1) para comprobar el resultado de calcular el área del polígono:

$$\acute{A}rea = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} y_i(x_{i+1} - x_{i-1})$$

$$\acute{A}rea = \frac{1}{2}[y_A(x_B - x_D) + y_B(x_C - x_A) + y_C(x_D - x_B) + y_D(x_A - x_C)]$$

$$Área = \frac{1}{2}[0(0-(-1))+5(3-(-4))+0(-1-0)-2(-4-3)]$$

$$Área = \frac{49}{2}$$

Bibliografía

Becerra, J. (2005). *Temas selectos de Matemáticas. La amena forma de aprender más.* México: Universidad autónoma de México.

Buffon, Carniel, Lucchetta & Spadetto. (2015). *Le matrici nel piano*. Realizzato nell'ambito del Progetto Archimede con la supervisione del Prof. F.Zampieri I.S.I.S.S. M.Casagrande, Pieve di Soligo.

Casteleiro (2004). *Introducción al álgebra lineal*. Madrid: ESIC editorial.

Larson & Hostetler. (2008). Pre-calculus. 7th edition. Barcelona: Editorial Reverté S.A.

Niglis, E. (2016). Guida alla professione di geometra. Santarcangelo di Romagna: Maggioli S.p.A.