Montejo-Gámez, J., Fernández-Plaza, J. A. y Ramírez, R. (2020). Talento matemático en la resolución de un problema de generalización
En E. Castro-Rodríguez, E. Castro, P. Flores y I. Segovia (Coords.). Investigación en educación matemática. Homenaje a Enrique Castro (pp. 121-138). Octaedro.
Preprint

TALENTO MATEMÁTICO EN LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE GENERALIZACIÓN

Mathematical Giftedness in solving a generalization problem

Jesús Montejo-Gámez [a], José A. Fernández-Plaza [a], Rafael Ramírez-Uclés[a]

[a]Universidad de Granada

Resumen

Este trabajo describe las estrategias que manifiestan estudiantes de Educación Secundaria con altas capacidades intelectuales en el marco de un programa de enriquecimiento curricular para resolver un problema de generalización. El problema consiste en identificar los dos puntos más alejados en una cuadrícula de dimensión N que representa la estructura del juego clásico del comecocos y relacionar la distancia máxima con esa dimensión. Tras realizar el análisis matemático y didáctico del problema, implementamos una sesión con 16 estudiantes sobre ese problema, y recogimos las respuestas individuales y grupales (en parejas). Los resultados más destacados evidencian estrategias creativas, uso eventual de notación propia y búsqueda espontánea de soluciones generales en seis participantes.

Palabras clave: altas capacidades, enriquecimiento curricular, estrategias, generalización.

Abstract

This chapter describes the strategies that Secondary Education talented students show in the context of a curriculum enrichment program when solving a generalization problem. The problem is to identify the two farthest points on a grid of dimension N that represents the classic "Pacman" game and to connect the maximum distance to N. After carrying out the mathematical and didactic analysis of the problem, we implemented a session with 16 students on that problem and collected the individual and group (in pairs) responses. Results exposed the use of creative strategies, eventual use of own notations, and spontaneous trials to generalisation of six of the participants.

Keywords: mathematical giftedness, curriculum enrichment, strategies, generalisation.

INTRODUCCIÓN Y MARCO TEÓRICO

En este trabajo queremos conectar dos ideas que han abordado los trabajos de Enrique Castro y que están estrechamente relacionadas entre sí: la resolución de problemas y la atención al talento matemático. Segovia y Castro (2004) apuntaban a dos razones fundamentales para investigar sobre niños superdotados intelectualmente: "...estos estudiantes deben tener un tratamiento específico para que esas aptitudes se desarrollen, por su propio bien y por el de la comunidad; por otro, en algunos casos esos niños presentan problemas variados que hay que atender" (p.125).

Varias de las tesis dirigidas por Enrique Castro se focalizaron en la caracterización del talento matemático (véanse Benavides, 2008; Ramírez, 2012). En estas investigaciones cobra una especial relevancia el diseño de tareas de enriquecimiento que permitan a los estudiantes manifestar dicho talento matemático. En este sentido, Castro, Ruiz-Hidalgo y Castro-Rodríguez (2015) señalaron que

> Uno de los problemas en las clases de matemáticas de la enseñanza obligatoria es el aburrimiento de los estudiantes. Además de ser un problema generalizado para muchos estudiantes, los alumnos con talento matemático los sufren de manera especial, pues gustan de tareas desafiantes que no suelen incorporarse al currículo escolar en estos niveles educativos. […] otra alternativa es proporcionarles tareas específicas que los enriquezcan y estimulen su talento (p. 102).

Desenvolverse con éxito ante tareas desafiantes involucra activar destrezas para resolver problemas. Diferentes autores han establecido relaciones entre el talento matemático y la resolución de problemas, si bien existe una diversidad amplia en cuanto a la perspectiva con la que se aborda: invención de problemas (Ellerton, 1986; Espinoza, Lupiáñez y Segovia, 2016), diseño de estrategias (Benavides, 2008; Heinze, 2005) o creatividad (Yuan y Sriraman, 2011), entre otros.

Uno de los tipos de problemas que van estrechamente relacionados con la puesta en juego del talento matemático son aquellos que demandan justificaciones (Sriraman, 2004), puesto que suponen una oportunidad para desarrollar intuición acerca de la forma de demostrar matemáticamente y plantear cuestiones desafiantes y valiosas. En este sentido, tanto para la investigación como para la atención de estos estudiantes es necesario planificar tareas ricas que requieran una demanda cognitiva apropiada (Gutiérrez, 2017) y que faciliten que los estudiantes hagan generalizaciones y justifiquen sus soluciones. Stein, Smith, Henningsen y Silver (2000) definen una tarea rica como aquella que es compleja, no algorítmica y no rutinaria, lo que permite múltiples estrategias y representaciones y no marca una ruta única hacia una solución. Cualquier solución a una tarea rica, por tanto, no es una respuesta que se debe marcar, ni siquiera una descripción de la estrategia o el razonamiento utilizado para llegar a esa respuesta. Las tareas ricas deben ir más allá, aportando oportunidades para que los estudiantes justifiquen su razonamiento o estrategia, expliquen por qué su enfoque es válido y busquen generalizaciones de forma autónoma. Estas orientaciones han sido consideradas en varios trabajos que han establecido pautas para trabajar en el diseño de este tipo de tareas para atender a los estudiantes de alta capacidad matemática (Ramírez y Flores, 2016; Ramírez, Ribera, Beltrán, Jaime y Gutiérrez, 2017).

En este trabajo presentamos el diseño y análisis de una tarea para atender e investigar las características del talento matemático asociadas con la generalización: (i) breve revisión del papel de la generalización para caracterizar el talento matemático, (ii) análisis de una tarea diseñada que demanda la justificación de las estrategias empleadas por estudiantes de alta capacidad, (iii) prueba piloto en la que se analizan las respuestas a esta tarea por un grupo de estudiantes que participan en un programa de enriquecimiento curricular en el ámbito de las matemáticas.

Generalización y talento matemático

El informe Marland (1972), consideraba estudiantes talentosos a aquellos que eran capaces de obtener un alto rendimiento por sus habilidades sobresalientes. Este rendimiento podía manifestarse separadamente o combinado en las siguientes áreas: habilidad intelectual general, habilidades académicas específicas, pensamiento creativo o productivo, liderazgo, artes visuales y escénicas y habilidades psicomotoras. En el caso particular de las matemáticas, se caracteriza a los estudiantes por poseer unas aptitudes, habilidades o capacidades por encima de la media en este ámbito específico (Johnsen, 2004; Kaufman y Sternberg, 2010).

La investigación del talento matemático tiene un referente clave en el trabajo de Krutetskii (Jaime y Gutiérrez, 2017). Posteriormente, otros autores han aportados diferentes listados de características del talento matemático que tienen muchos elementos en común (Ramírez, 2012). La generalización aparece de manera destacada en todas ellas, bien de manera explícita o a través de habilidades que la requieren: para generalizar rápida y ampliamente los objetos matemáticos, sus relaciones y sus operaciones (Krutetskii, 1976), para generalizar (Greenes, 1981), para trabajar de forma abstracta y ver relaciones entre objetos matemáticos (Miller, 1990), o para buscar patrones y relaciones, construir nexos y estructuras matemáticas (Freiman, 2006). Las características asociadas a la generalización se consideran clave para que se adquiera el conocimiento matemático desde las edades más tempranas (Mason, 2008; Pólya 1945).

El reposo curricular para el diseño de tareas de enriquecimiento

Con el fin de implementar una tarea que permita a los estudiantes con talento matemático manifestar su habilidad para generalizar, se propone una sesión de enriquecimiento curricular en la que se aborda el aprendizaje matemático buscando mayor profundidad, sin trabajar contenidos nuevos (Blanco, Ríos y Benavides, 2004).

Ramírez y Flores (2016) destacan tres factores a tener en cuenta en el diseño de actuaciones con alumnos de alta capacidad matemática: enriquecimiento de contenidos matemáticos, dándoles mayor profundidad y añadiendo elementos que estimulen el razonamiento matemático; atención a características específicas del talento que se quieren desarrollar; y uso de metodologías recomendadas para alumnos de altas capacidades. Estos autores, para profundizar en un contenido y abordarlo con mayor nivel de abstracción y complejidad, sugieren el "reposo curricular" tanto del profesor como del estudiante. Esto implica el análisis del contenido a enseñar, profundizando el significado, los sistemas de representación, sentidos y modos de uso (Rico, 2016). En relación al nivel de abstracción y generalización, es relevante determinar los tipos de razonamiento inductivos, deductivos o relacionales implicados en la tarea (Fernández-Plaza, 2016).

En el caso de tareas estimulantes para la alta capacidad matemática, los razonamientos exigidos vienen condicionados por la riqueza de la tarea, que varios autores han asociado con la complejidad de la actividad matemática que envuelve (por ejemplo, Becker y Shimada, 1997; Flewelling y William, 2001). Burkhardt y Swan (2013) enfatizaron la importancia de tener en cuenta la dificultad de la tarea a la hora de diseñarla, y señalaron que esta dificultad depende de varios factores: (i) complejidad, que está referida a la cantidad de variables, la variedad y cantidad de datos, y la cantidad de modos en que se presenta la información; (ii) desconocimiento: las tareas no rutinarias (aquellas que no son similares a tareas ya practicadas previamente) son más difíciles que los ejercicios de rutina; (iii) demanda técnica: las tareas que requieren una matemática más sofisticada para su solución son más difíciles que las que se pueden resolver con una matemática más elemental; y (iv) autonomía del alumno: la orientación de un experto (generalmente el maestro) o de la tarea en sí (por ejemplo, al estructurarla o "andamiarla" en partes sucesivas) hace que la tarea sea más fácil que si se presenta sin dicha orientación. A partir de estas consideraciones teóricas y metodológicas, presentamos el análisis previo de la tarea diseñada atendiendo especialmente a las estrategias de resolución y los elementos de razonamiento matemático.

ANÁLISIS TEÓRICO DEL PROBLEMA PROPUESTO

Se presenta el planteamiento del problema, el análisis de dos casos particulares y el estudio del caso general que incluye tratamiento y solución diferentes según la paridad de la dimensión.

Planteamiento del problema

El problema parte de una representación del juego clásico del comecocos, cuyo escenario se ha descrito utilizando una retícula NxN, de manera que los nodos de la retícula representan las posibles posiciones del comecocos. En este juego, los personajes tienen la propiedad de 'desaparecer' por un borde y 'aparecer' por el borde opuesto, por lo que las únicas posiciones admisibles sobre la retícula quedan descritas por los nodos interiores. Además, esta propiedad dota a la retícula de la estructura topológica del toro de revolución. En esta topología para cada j=0, 1, 2,…,N, el punto (0, j) está identificado con (N, j) y el punto (i, 0) está identificado con (i, N) para i, j=0,...N. Definimos la *distancia* entre dos puntos del tablero como la longitud del camino más corto que conecta esos dos puntos, es decir, la cantidad de segmentos que conectan esos dos puntos, o la cantidad de nodos intermedios enlazados más 1, teniendo en cuenta la topología establecida. En el interior del tablero, esta métrica se corresponde con la llamada métrica del taxista (Krause, 1986).

El problema que se plantea consiste en determinar los dos puntos más alejados en la retícula excluyendo los puntos del borde, la distancia máxima asociada, y relacionar esa distancia con el valor N.

Estudio de los casos particulares de dimensiones 5x5 y 6x6

Comenzamos con el caso particular N=5, en el que problema se puede resolver sin más que calcular las distancias de un punto I, fijado de antemano, al resto de los puntos interiores de la retícula, constatar cuál es la distancia máxima a I y luego mover I a lo largo de la retícula para optimizar ese máximo. Por cuestiones de simetría, podemos restringir las ubicaciones del punto I a las tres posiciones que se recogen en la Figura 1. Estos diagramas muestran que la distancia máxima es 4, pero la primera representación en la Figura 1ilustra la configuración óptima, en el sentido en que maximiza el número de puntos a la distancia máxima posible.

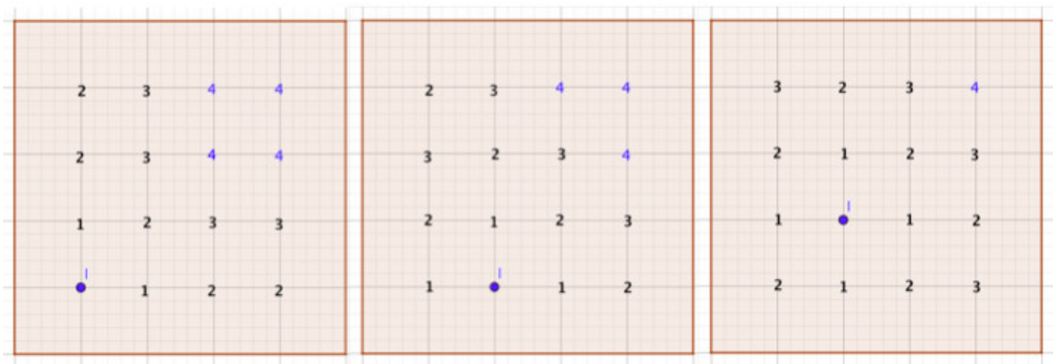

Figura 1. Diagramas que muestran las distancias entre diversas ubicaciones del punto I y los demás nodos interiores de la retícula 5 x 5. La primera representación ilustra la configuración óptima

El análisis de los caminos que conectan I con los diferentes puntos F que están a distancia 4 de I conduce a generalizar la solución encontrada. La Figura 2 muestra los posibles caminos "canónicos" que enlazan los nodos a distancia 4 de I, que proporcionan distancias menores o iguales que la distancia clásica dada por la métrica del taxista. En el primer diagrama se muestra en rojo el camino clásico 3↑ 3→ (o 3→3↑) de longitud 6, que conduce al mismo punto que el camino en verde 2↓2← (o 2← 2↓) de longitud 4. La notación empleada expresa la cantidad de segmentos en vertical (↓,↑) y horizontal (←,→) que recorre el camino expresado. El segundo diagrama muestra en rojo el camino clásico 2↑3→ de longitud 5, que conduce al mismo punto que el camino en verde 2← 2↑ de longitud 4. El tercer diagrama muestra un único camino en verde que coincide con el camino 2→2↑, de longitud 4. Finalmente el cuarto diagrama, muestra en rojo el camino de longitud 5, 2→3↑, que conduce al mismo punto que el camino 2↓2→.

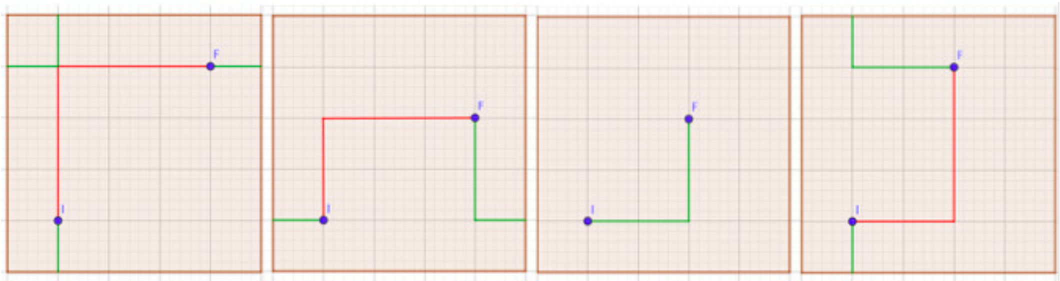

Figura 2. Diagramas que muestran en verde los caminos canónicos entre los diferentes nodos a distancia 4 del punto I y en rojo los generados por la métrica clásica del taxista

Se puede comprobar que con la topología establecida en la retícula, las transformaciones 2↑, 2↓, 2←, 2→, se corresponden respectivamente con, 3↓, 3↑, 3→, 3←. Luego basta trazar todos los caminos de longitud 6 para alcanzar todos los puntos a distancia máxima 4, a saber 3↑ 3→, 3↑ 3←, 3←3↓ y 3→3↓. En este caso, se obtienen destinos diferentes porque el avance de 3 casillas en una dirección y el de 3 casillas en dirección opuesta no son caminos que conduzcan al mismo punto. Por tanto, al existir 4 combinaciones posibles, se generan 4 puntos diferentes.

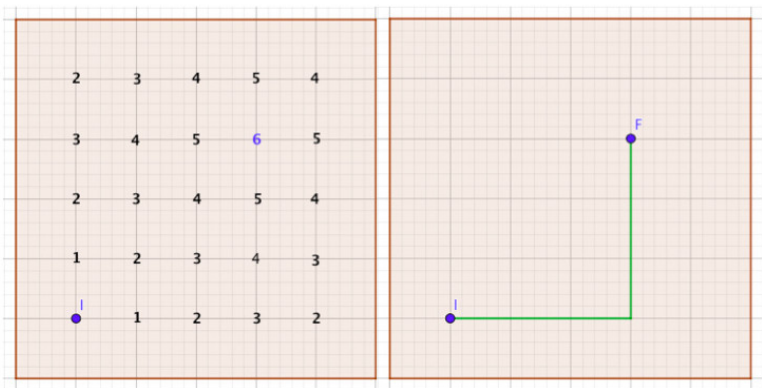

Figura 3. Distancias entre el punto I y los demás nodos de la retícula 6x6. Los caminos que conducen al nodo a máxima distancia se generan mediante combinaciones de las transformaciones 3↑, 3↓, 3← y 3→.

Respecto al caso N=6, la Figura 3 (izquierda) muestra las distancias al punto I, según la longitud del camino más corto entre ellos. En este caso, todas las combinaciones posibles de longitud 6 llevan al mismo destino (3↑3→ ; 3↑ 3←; 3←3↓; 3←3↓). Este hecho se produce porque las transformaciones 3↑, 3↓, 3←, 3→, se corresponden respectivamente con, 3↓, 3↑, 3→, 3← (Figura 3, derecha). Las posibles posiciones del punto I, salvo simetría, son las siguientes: (1,1), (2,1), (2,2) , cuya máxima distancia es 6; (3,1), (3,2), se reduce dicha distancia a 5, y (3,3), posición en la que la máxima distancia se reduce a 4.

Estudio del caso general

Los casos analizados permiten inducir que para un tablero de tamaño N x N hay que distinguir el caso par e impar. Si N es impar, la distancia máxima será N-1 y se alcanzará en 4 puntos. Si N es par, la distancia máxima será N y se alcanzará en un único punto.

Para estudiar el caso de N impar, usamos que todo camino se descompone de manera canónica en una cantidad de tramos verticales (↓,↑) y horizontales (←,→). Dados dos puntos P y Q sobre los nodos interiores de la retícula, se pueden trazar todos los caminos verticales y horizontales que pasan por P y por Q (Figura 4, izquierda). Por las características de la cuadrícula se verifica la relación j↓= (N-j)↑, equivalentemente, j←= (N-j) →, para j=1,2,…N-1. Esto permite escoger sentidos de avance vertical y horizontal y definir un camino entre P y Q formado a lo sumo por (N-1)/2 segmentos verticales y (N-1)/2 segmentos horizontales, lo que muestra que la distancia entre P y Q es, a lo sumo, N-1. Además, por ser N impar, N-1 es par, y existen dos caminos verticales diferentes de longitud (N-1)/2, el (N-1)/2↓ y el (N-1)/2 ↑ que llevan a dos puntos diferentes desde P. Análogamente cambiando la orientación de las flechas, (N-1)/2← y (N-1)/2→, se generan dos puntos diferentes, y todas las combinaciones posibles de estos caminos básicos llevarán a los cuatro puntos distintos que están a distancia mínima N-1 del punto inicial que es la máxima distancia posible. En la Figura 5 (izquierda) se muestra el diagrama de distancias para N=7 en el que se puede observar este patrón.

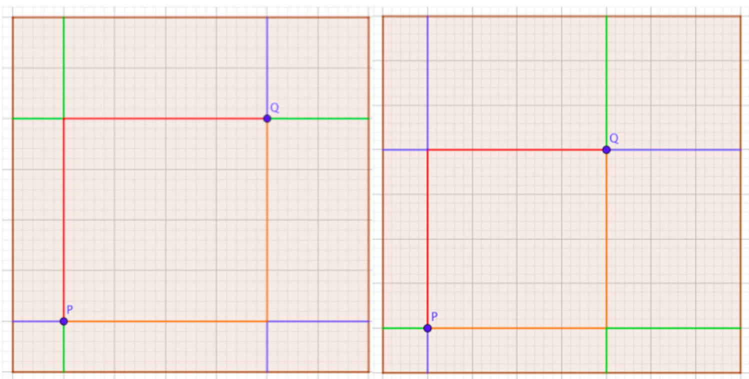

Figura 4. En el caso N=7 (izquierda), los caminos3↓ 3← (azul) o 3←3↓ (verde), materializan la distancia 6. En el caso N=8 (derecha) cualquier combinación de 4↓o 4↑ con 4→ o 4← materializa la distancia 8.

Para estudiar el caso N par, se parte del mismo planteamiento. Dados dos puntos P y Q sobre los nodos interiores de la retícula, se pueden aprovechar de nuevo las relaciones j↓= (N-j)↑ y j←= (N-j) →, para j=1,2,…N-1. En este caso, tras escoger sentidos de avance vertical y horizontal adecuados, se puede encontrar un camino entre P y Q formado a lo sumo por N/2 segmentos verticales y N/2 segmentos horizontales, lo que muestra que la distancia entre P y Q es, a lo sumo, N (Figura 4, derecha). En este caso, al ser N par, N/2↑ genera el mismo punto que N/2↓, y N/2← genera el mismo punto que N/2→. Por tanto, las 4 combinaciones de estos caminos generan un único punto a distancia máxima N del punto inicial. Para ilustrar se adjunta el diagrama de distancias para el caso N=8 (Figura 5, derecha).

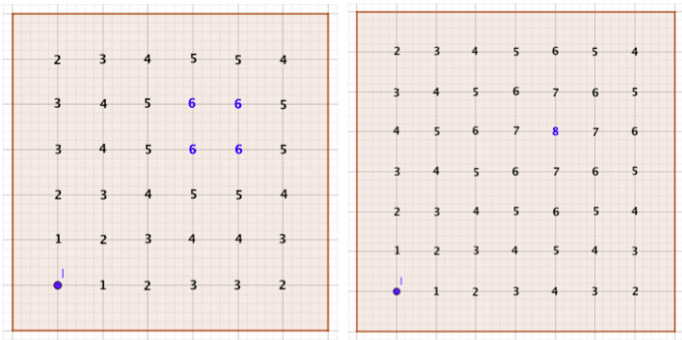

Figura 5. Izquierda: puntos a distancia 6 del punto E, a los que se llega mediante las 4 combinaciones de transformaciones 3↑ y 3↓ con 3← y 3→. Derecha: punto único a distancia 8 del punto E que se genera mediante las 4 combinaciones de transformaciones 4↑ 4↓ con 4← y 4→.

Como conclusión del análisis del problema, consideramos que esta tarea puede satisfacer algunas de las características exigidas como tarea de enriquecimiento. Por un lado, el contenido matemático relativo a la métrica del taxista en el plano es novedoso y permite profundizar en el concepto de distancia, enriqueciendo el significado al compararlo con métricas diferentes a la euclídea. También pueden introducirse elementos extracurriculares como los relativos a la topología y la conexión del plano con otros espacios como los cilindros y los toros de revolución.

En relación a la argumentación, la tarea admite aproximaciones tanto empíricas, a través de ejemplos, como más deductivas, por lo que se esperan diferentes estrategias tanto visuales como analíticas. Se pueden aportar tanto razonamientos inductivos al ir aumentando el número de lados, deductivos al abstraer propiedades y relacionales si se asocian con las correspondientes situaciones euclídeas. En el caso de la generalización, se presta a la identificación de regularidades al ir analizando los casos más sencillos, si bien la argumentación para el caso general implica distinguir paridad y hacer deducciones lógicas abstrayendo propiedades de los ejemplos. También admite la búsqueda de contraejemplos para contrastar las conjeturas que surgieran en el trabajo en grupo.

En cuanto a la dificultad, es una tarea no rutinaria y, al ser novedosa, pensamos que no la han practicado anteriormente. Aunque los contenidos matemáticos no son excesivamente sofisticados para los casos particulares, la generalización y la forma de organizar la información hace que la demanda técnica sea elevada. En cuanto a la gestión de la tarea, se presentará de manera que inicialmente el trabajo sea individual y que la orientación del profesor sea para estructurar y organizar la puesta en común, especialmente secuenciar los distintos apartados particulares (por ejemplo, motivar la diferenciación entre casos pares e impares).

EXPERIMENTACIÓN Y PRUEBA PILOTO

Una vez diseñada la tarea, se realizó una prueba piloto en una sesión de un programa de enriquecimiento en el que participaron un grupo de estudiantes de secundaria de un colegio de Granada. Participaron en el estudio 16 estudiantes, 10 niñas y 6 niños de los diferentes cursos de ESO. Esta toma de datos forma parte de un estudio más general que comprende varias sesiones de enriquecimiento para relacionar las características del talento matemático que se favorecen determinados tipos de problemas.

Los estudiantes trabajaron por parejas durante una sesión de una hora que tuvo la siguiente estructura: (i) presentación del problema, en la que se fijó el significado del término *distancia*, se proporcionó la cuadrícula para representar el escenario del juego del comecocos y se planteó el problema en el caso de dimensiones 5x5; (ii) trabajo individual, por parejas y puesta en común de las respuestas a este primer caso en el gran grupo, seguidos del planteamiento del caso 6x6; (iii) trabajo individual, por parejas y puesta en común de las respuestas a este caso en el gran grupo, junto con el planteamiento del "caso N" (invitación a la generalización para cualquier dimensión), que se dejó abierto. Durante la sesión, los participantes abordaron de forma individual y por parejas a los casos de dimensiones 5x5 (pregunta 1) y 6x6 (pregunta 2). Las respuestas proporcionadas se recogieron en fichas que contenían una cuadrícula para facilitar el trabajo del alumnado. El resultado de la sesión fue un conjunto de 16 registros escritos que dan cuenta de las estrategias empleadas por los estudiantes. Los investigadores, además, registraron en un cuaderno de campo los comentarios complementarios a las producciones escritas que se generaron durante la sesión.

Las preguntas de investigación de esta prueba piloto son: ¿Qué estrategias emplearon estos estudiantes para resolver el problema? ¿Qué capacidad espontánea de generalización evidenciaron? Como instrumentos de recogida de información, se dispone de las producciones escritas y las anotaciones de los tres investigadores que participaron en la sesión. Para el análisis cualitativo de las intervenciones de los estudiantes, se realiza un análisis del contenido de las producciones en torno a las estrategias empleadas para resolver el problema y búsqueda de soluciones generales. Los resultados más destacados que se han obtenido se exponen en términos de las estrategias desarrolladas y las tentativas de generalización encontradas.

Estrategias empleadas

Los registros escritos permitieron identificar las estrategias desarrolladas por quince de los participantes del estudio, que se pueden organizar en dos categorías (Figura 6).

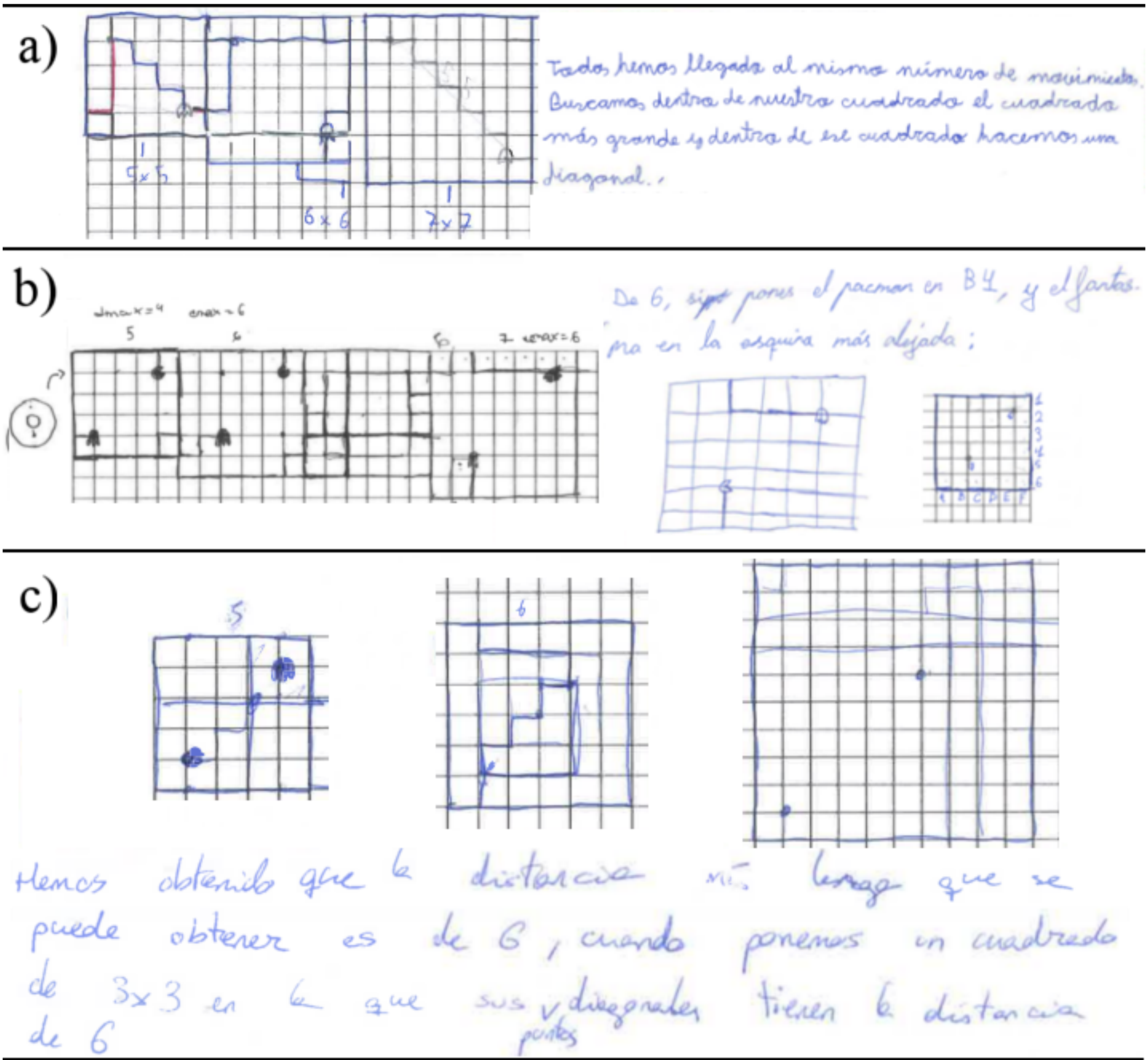

Figura 6. Ejemplos de estrategias empleadas

La primera está compuesta por aquellas estrategias que asumen que los puntos interiores a las esquinas son aquellos que materializan la máxima distancia (Figura 6a), que fueron seguidas por siete estudiantes. Las estrategias de la segunda categoría, que engloba las producciones de ocho alumnos, parten de la misma idea intuitiva pero se apoyan de forma evidente en el cálculo de la distancia entre puntos de la retícula para ir moviendo un punto en la búsqueda de la distancia máxima (Figura 6b). Un caso particular de estrategias de esta segunda categoría fue desarrollada por dos estudiantes. Estos consideraron el punto A, interior a la retícula y situado lo más abajo y a la izquierda que posible (Figura 6c), y fueron construyendo parejas de cuadrados de lado creciente a partir de ese punto. Así, caracterizaron la mayor distancia posible en el tablero como la diagonal de un cuadrado óptimo cuyo vértice es A.

La observación durante la sesión reveló ideas intuitivas sobre la ubicación de puntos a máxima distancia sobre el tablero que no se vieron materializados en los registros escritos. En este sentido, una participante comentó, durante el desarrollo de su estrategia que "*Si aumentas por un lado, disminuyes el otro: tiene que haber un equilibrio*. *Es como si* [los puntos a máxima distancia] *fueran inversamente proporcionales*". Otras compañeras afirmaron que los puntos a máxima distancia "*tienen que estar completamente opuestos*", haciendo así alusión implícita a la topología que dicha distancia define y sus restricciones sobre la búsqueda de distancias máximas.

Las implicaciones de la identificación de lados opuestos en la retícula sobre la topología del tablero estuvieron presentes durante toda la sesión. Los estudiantes trabajando en parejas observaron de que había puntos en la retícula que eran inaccesibles ("*¡No se puede llegar a la esquina!*"). Ante la condición de que el comecocos puede "saltar" por la derecha para "aparecer" por la izquierda (y viceversa), uno de los alumnos identificó rápidamente un cilindro para describir la situación. Al conocer que el comecocos también "salta" por arriba para "aparecer" por debajo, el mismo estudiante concluyó que la situación del tablero era una "*esfera desplegada*". Aunque no se constató que los estudiantes identificaran de forma autónoma el toro de revolución como cuerpo útil para representar de la situación, el grupo asumió con naturalidad esta idea cuando los investigadores lo señalaron. La Figura 6b y la Figura 7 muestran ejemplos de cómo los alumnos describieron las identificaciones topológicas señaladas.

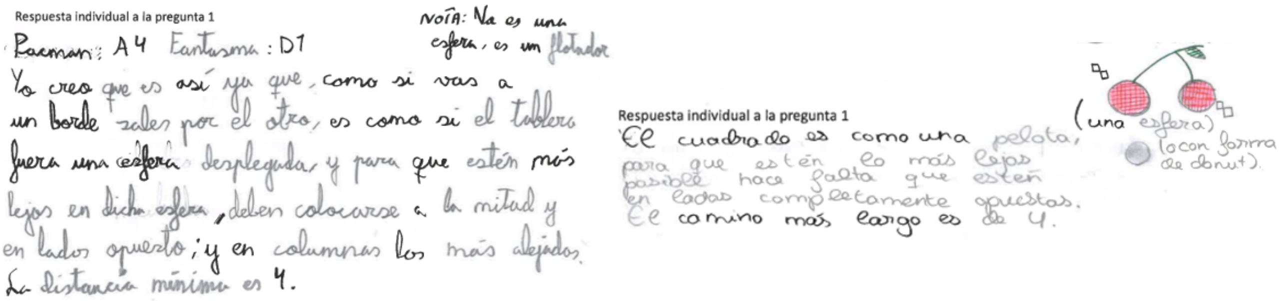

Figura 7. Manifestaciones sobre la topología inducida en la retícula.

Un último detalle destacable en cuanto al desarrollo de las estrategias es el uso de notación propia por parte de algunos estudiantes. Todos los estudiantes describieron sus estrategias de forma verbal y, además, cuatro de ellos introdujeron notación propia. Dos de ellos utilizaron un sistema de coordenadas análogo al del tablero de ajedrez para describir posiciones sobre la retícula (Figura 6b), mientras que otros dos participantes usaron notación simbólica "dmax" para referirse a la distancia máxima que se solicitaba en el problema (Figura 6b).

Búsqueda de soluciones generales

El análisis del contenido de los registros escritos puso de manifiesto que seis de los estudiantes buscaron de forma espontánea una generalización de los resultados, y todos vinculan la distancia máxima con las dimensiones de la retícula (Figura 8).

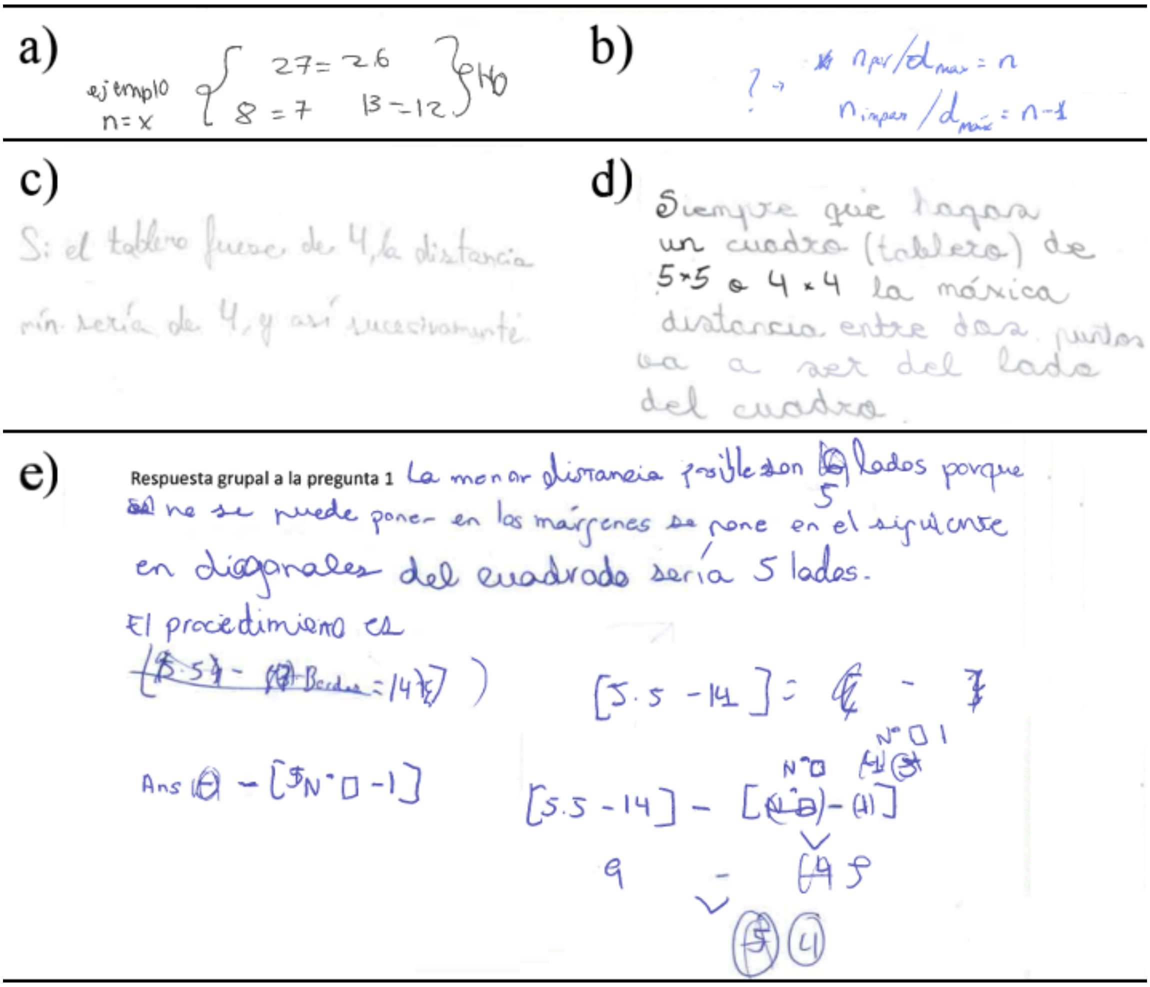

Figura 8. Evidencias de búsqueda espontánea de soluciones generales y notación propia empleada.

Dos de ellos son quienes introdujeron notación simbólica para expresar la distancia máxima buscada. El primero (Figura 8a) buscó inducir una regla general a partir de la observación de los resultados de una estrategia de la primera categoría señalada. El segundo aplicó la estrategia descrita en la Figura 6c, de carácter más general, y describió formalmente los resultados obtenidos (Figura 8b). Los demás participantes expresaron la estrategia general de forma verbal (Figura 8c y 8d), salvo uno que buscó una fórmula algebraica a partir de sus respuestas a los casos particulares (Figura 8e).

La observación durante la sesión sugirió que los estudiantes buscaron la generalidad de forma espontánea solo cuando encontraban un patrón distinguible entre sus casos particulares. Dos alumnas, al resolver el caso 5x5 y obtener la respuesta 5 aseguraron que: "*Si es de 3x3* [la distancia máxima] *va a ser de 3. Si es de 2x2 va a ser de 2*". Otro grupo, una vez discutido en el grupo que la solución al caso 5x5 era 4 y ellas tenían que la solución en 6x6 era 5, señalaron que "*y ya se puede: 7x7 es 6, 6x6 es 5. Uno menos: lo ideal es que sea uno menos*". Estas mismas alumnas, sin embargo, cuando vieron que en 5x5 la distancia era también 4, mostraron dificultades para comprender cuál era la respuesta al caso N. La interpretación sobre el contenido de dicha respuesta supuso también obstáculo para algunos participantes, que preguntaron: *"¿Tenemos que dar una cifra o una explicación?*". Finalmente, uno de los estudiantes (Figura 8b) puntualizó la necesidad de distinguir en función de la paridad de N para abordar este caso.

CONCLUSIONES

A partir de los resultados obtenidos en este primer análisis de la prueba piloto, consideramos que la tarea diseñada requiere una demanda cognitiva adecuada para atender e investigar con estudiantes de talento matemático (Gutiérrez, 2017). De manera intuitiva, estos han aludido a ideas topológicas a partir de identificaciones en figuras planas y han desarrollado estrategias diferentes a las esperadas. El problema propuesto, como tarea de enriquecimiento, permitió "reposar" (Ramírez y Flores, 2016) el significado de distancia planteando situaciones novedosas para que los estudiantes profundizaran en el significado de distancia en el plano. Las estrategias empleadas partieron de las intuiciones sobre la distancia euclídea, y aproximadamente la mitad adaptaron su estrategia de acuerdo a la distancia del problema. Las diferencias encontradas en el rendimiento en los apartados de casos particulares y generales aportan información de cómo la estructuración de la tarea en partes sucesivas ha influido en la dificultad encontrada en la tarea (Burkhardt y Swan, 2013). En este sentido, consideramos relevante el papel del profesor como moderador de las respuestas y motivar a los estudiantes a que argumenten y contrasten sus razonamientos con los expuestos por los compañeros, tanto en el trabajo en pequeño grupo como en el grupo completo.

Seis de dieciséis buscaron de forma intuitiva la generalización, todos ellos la vincularon a la dimensión del tablero y uno fue capaz de encontrar la distinción de casos par-impar. En este sentido, pensamos que la tarea permite identificar características del talento asociadas a la generalización, especialmente para establecer razonamientos deductivos trabajando de forma abstracta y ver las relaciones más allá de los ejemplos concretos (Miller, 1990). Como prueba piloto, somos conscientes de otras variables que no se han considerado en este primer análisis como pueden ser las diferentes edades de los estudiantes, los criterios seguidos por el programa de enriquecimiento en la selección, el rendimiento en tareas diferentes, o el contraste con un grupo control. Pero estos primeros resultados permitirán reformular la tarea y la gestión de la misma para futuras investigaciones.

Referencias

Becker, J. P., & Shimada, S. (Eds.). (1997). *The open-ended approach: A new proposal for teaching mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Benavides, M. (2008). *Caracterización de sujetos con talento en resolución de problemas de estructura multiplicativa.* Tesis doctoral sin publicar. Universidad de Granada, España.

Blanco, R., Ríos, C. y Benavides, M. (2004). Respuesta educativa para los niños con talento. En M. Benavides, A. Maz, E. Castro y R. Blanco (Eds.), *La Educación de niños con talento en Iberoamérica* (pp. 49-60). Santiago (Chile): OREALC-Unesco.

Burkhart, H., y Swan, M. (2013). Task design for systemic improvement: Principles and frameworks. In C Margolinas (Ed) *Task Design in Mathematics Education (The 22st ICME study conference)* (pp. 433- 432).Oxford: ICME.

Castro, E., Ruiz-Hidalgo, J.F. y Castro-Rodríguez, E. (2015). Retos, profesores y alumnos con talento matemático. *Aula, 21*, 85-104.

Ellerton, N. (1986).Children´s made-up mathematics problems – A new perspective on talented mathematicians.*Educational Studies in Mathematics, 17* (3), 261-271.

Espinoza, J., Lupiáñez, J. L., & Segovia, I. (2016). La invención de problemas aritméticos por estudiantes con talento matemático. *Electronic journal of research in educational psychology*, *14*(2), 368-392.

Fernández-Plaza, J. A. (2016).Análisis de contenido. En L. Rico y A. Moreno (Eds.). *Elementos de didáctica de la Matemática para el profesor de secundaria* (pp. 103-118). Madrid: Pirámide.

Flewelling, G. y William, H. (2001).*A handbook on rich learning tasks*. Kingston, Canada: Centre for Mathematics. Science, and Technology Education, Queen' s University.

Freiman, V. (2006). Problems to discover and to boost mathematical talent in early grades: A Challenging Situations Approach. *The Montana MathematicsEnthusiast, 3* (1), 51-75.

Greenes, C. (1981). IdentifyingtheGiftedStudent in Mathematics. *ArithmeticTeacher*, *28* (8), 14-17.

Gutiérrez, A. (2017). *Enseñanza de la geometría a estudiantes con talento matemático: teoría y práctica*. Conferencia Plenaria en el Encuentro de investigación en Educación Matemática (EIEM, 17), Lisboa, Portugal. Recuperado el 3 de Abril dehttps://www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/Gut17.pdf

Heinze, A. (2005). Differences in problem solving strategies of mathematically gifted and non-gifted elementary students.*International EducationJournal, 6* (2), 175-183.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2017).Investigación sobre estudiantes con alta capacidad matemática. En J. M. Muñoz, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. Callejo, y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 71-89). Zaragoza, España: SEIEM.

Johnsen, S. K. (2004).*Definitions, models, and characteristics of gifted students. Identifying gifted students: A practical guide*. Waco, TX: Prufrock Press.

Kaufman, S. B. y Sternberg, R. J. (2010).Conceptions of giftedness. En S. Pfeiffer (Ed.), *Handbook of giftedness in children: Psycho-educational theory, research and best practices* (pp. 71-91). Nueva York: Springer.

Krause, E. (1986).*Taxicab geometry: An adventure in non-euclidean geometry* (reprinted from 1975). NY: Dover.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. Chicago: University of Chicago Press.

Marland, S. P. (1972*). Education of thegiftedtalented. Vol. 1. ReporttotheCongress of theUnitedStatesbythe U.S. Commissioner of education*. Washington, DC: UnitedStatesGovernmentPrinting Office.

Mason, J. (2008). Making use of children's powers to produce algebraic thinking. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum/Taylor & Francis Group & National Council of Teachers of Mathematics.

Miller, R. C. (1990). *Discovering mathematical talent*. *ERIC Digest E482*. Washington, D.C.: Office of Educational Research and Improvement.

Polya, G. (1945). *How to solve it.*Princeton, NJ: Princeton University Press.

Ramírez-Uclés, R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático.*Tesis doctoral sin publicar. Universidad de Granada, España.

Ramírez, R. y Flores, P. (2016). Planificar el enriquecimiento para alumnos de alta capacidad matemática: reposo curricular. *Suma*, *83*, 33-41.

Ramírez, R., Ribera, J.M., Beltrán, M. J., Jaime, A., & Gutiérrez, A. (2017). Design of problems for research purposes with mathematically talented students. En D. Pitta-Pantazzi (Ed*.) Proceedings of the 10th International Mathematical Creativity and Giftedness* (pp. 165-166).Nicosia, Chipre: Universidad de Chipre.

Rico, L. (2016). Matemáticas y análisis didáctico. En L. Rico y A. Moreno (Eds.). *Elementos de didáctica de la Matemática para el profesor de secundaria* (pp. 85-100). Madrid: Pirámide.

Segovia, I. y Castro, E. (2004). La educación de los niños con talento en España. En M. Benavides, A. Maz, E. Castro y R. Blanco (Eds.), *La Educación de niños con talento en Iberoamérica* (pp. 115-126). Santiago (Chile): OREALC-Unesco.

Sriraman, B. (2004). Gifted Ninth Graders' Notions of Proof: Investigating Parallels in Approaches of Mathematically Gifted Students and Professional Mathematicians. *Journal for the Education of the Gifted, 27*(4), 267–292.

Stein, M., Smith, M., Henningsen, M., & Silver, E. (2000).*Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development*. New York: Teacher College.

Yuan, X. y Sriraman, B. (2011). An exploratory study of relationships between students´ creativity and mathematical problem-posing abilities.En B. Sriraman y K. H. Lee (Eds.), *The elements of Creativity and Giftedness in Mathematics* (pp. 5-28). Rotterdam/Boston/Taipei: Sense Publishers.