

 Universidad de los Andes  
Colombia

Facultad de Educación



## Comunicaciones de innovación curricular en Educación Matemática

---

<http://ued.uniandes.edu.co>  
@uedUniandes

1

 Universidad de los Andes  
Colombia

Facultad de Educación



## Construcción de nociones geométricas en estudiantes por medio de demostraciones visuales.

Karen Tatiana Barreiro Másmela

Colegio Columbus American School, Rivera (Huila)

Martes 6 de abril del 2021

2

## CONTENIDO

1. Presentación.
2. Objetivos.
3. Metodología
4. Actividades y resultados
5. Conclusiones.

3

## OBJETIVO GENERAL:

Favorecer, por medio de demostraciones visuales, la construcción de las nociones de los objetos geométricos presentados en el Libro I de los *Elementos* de Euclides, que propicien el desarrollo del pensamiento geométrico en los estudiantes de ocho a diez años.

4

## OBJETIVOS ESPECIFICOS

Diseñar actividades, que hagan que los estudiantes de ocho a diez años construyan la noción de objetos geométricos a través de demostraciones visuales.

Analizar las soluciones de las actividades planteadas y a través de éstas, caracterizar el pensamiento geométrico de los estudiantes de ocho a diez años involucrado en la construcción de demostraciones visuales.

Analizar y sustentar una posición crítica con el fin de establecer si los planteamientos de Gila Hanna(2001) son justificables o no, frente al pensamiento geométrico cuyo desarrollo se observa en la construcción de demostraciones visuales.

5

## METODOLOGÍA BASADA EN EL DISEÑO



6



7

### ACTIVIDADES

**ACTIVIDAD 1:** construcción de triángulo equilátero con regla y compás  
**OBJETIVO:** representa diferentes tipos de triángulos haciendo uso de regla y compás, los clasifica según sus lados.

**ACTIVIDAD 2:** construcción de triángulo isósceles con regla y compás  
**OBJETIVO:** representa diferentes tipos de triángulos haciendo uso de regla y compás; y los clasifica según sus lados.

**ACTIVIDAD 3:** construcción de rectas perpendiculares, triángulo rectángulo y triángulo escaleno.  
**OBJETIVO:** representa diferentes tipos de triángulos haciendo uso de regla y compás, los clasifica según sus lados.

8

**ACTIVIDAD 4:** construcción ángulos, rectas paralelas y cuadrado con regla y compás.

**OBJETIVO:** construir los siguientes objetos matemáticos: ángulos, rectas perpendiculares y cuadrado.

**ACTIVIDAD 5:** construcción de rectas paralelas y cuadrado con regla y compás.

**OBJETIVO:** construir los siguientes objetos matemáticos: rectas paralelas y cuadrado.

**ACTIVIDAD 6:** actividad de hallar el área.

**Objetivo:** Comenzar a construir el concepto de área.

**ACTIVIDAD 7 y 8:** actividad con rompecabezas (Proposición 35)

**Objetivo:** iniciar a demostrar a través de manipulables.

**ACTIVIDAD FINAL:** actividad con rompecabezas (Proposición 47)

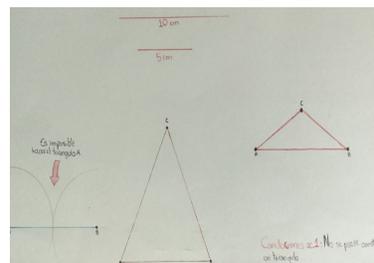
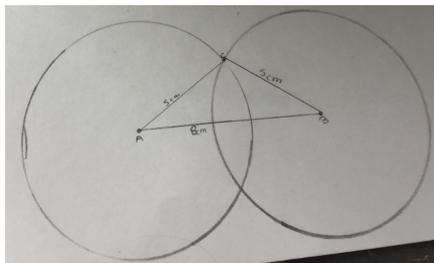
**Objetivo:** Demostración visual del teorema de Pitágoras.

9

## ACTIVIDADES DE PENSAMIENTO INDEPENDIENTE

**ACTIVIDAD 1:** ¿Cuál era el triángulo equilátero más grande que podían construir en un octavo de cartulina?

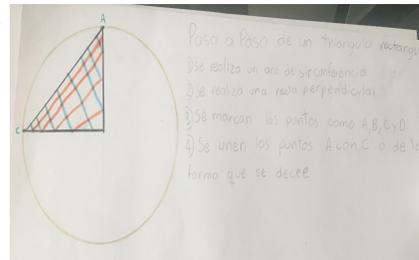
**ACTIVIDAD 2:** ¿Puedes construir un triángulo isósceles con longitud de la base igual a 8cm y cuyos otros dos lados miden 4 cm? ¿Puedes construir un triángulo isósceles con longitud de la base igual a 8cm y cuyos otros dos lados miden 5 cm?



10

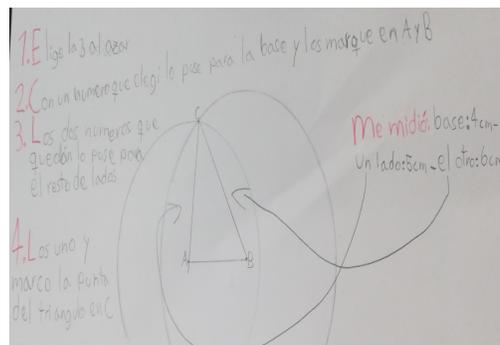
**ACTIVIDAD 3:** proponer un paso a paso para la construcción de un triángulo rectángulo y un triángulo escaleno:

Se realiza un arco de circunferencia, se realiza una recta perpendicular, se marcan puntos como A, B, C y D, se unen los puntos A con C de la forma que se desee.



11

“Elige 3 medidas al azar, con un número que elegí lo puse para la base y los marque en A y B. Los dos números que quedan los puse para el resto de los lados. Los uno y marco la punta del triángulo en C.”



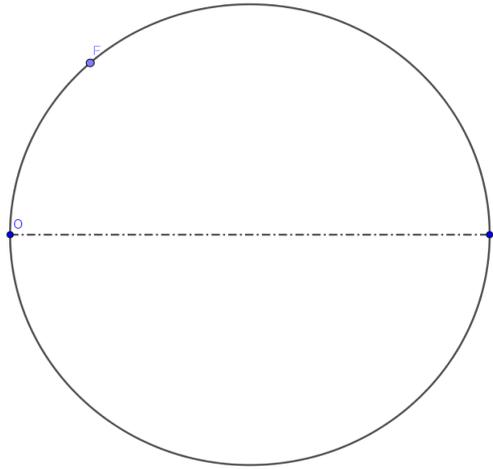
12

**ACTIVIDAD 4:** ¿Cuántos puntos X puedes

encontrar tales que el ángulo OFX sea agudo?

¿Cuántos puntos Y puedes encontrar tales que el

ángulo OFY sea obtuso?



13

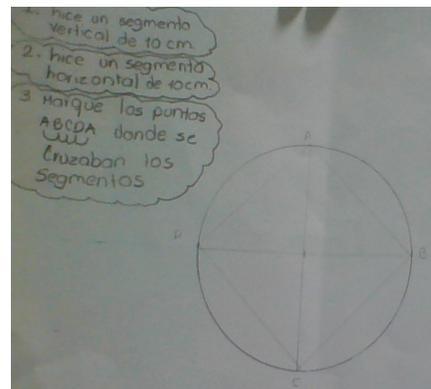
**ACTIVIDAD 5:** ¿Cuántas rectas paralelas a

la recta AB puedes trazar con regla y

compás?. Escribir un paso a paso para

construir un cuadrado con regla y compás.

1. Hice un segmento vertical de 10 cm
2. Hice un segmento horizontal de 10 cm
3. Marque los puntos ABCB donde se cruzaban los segmentos.



14

## ACTIVIDAD NÚMERO 7

**Objetivo:** iniciar a demostrar a través de manipulables.

**Metodología:**

Para esta actividad, se propusieron tres tipos de rompecabezas.

Se inició recordando a los estudiantes los tipos de paralelogramos.

Cada estudiante tenía un rompecabezas de 6 piezas y una base en cartón.

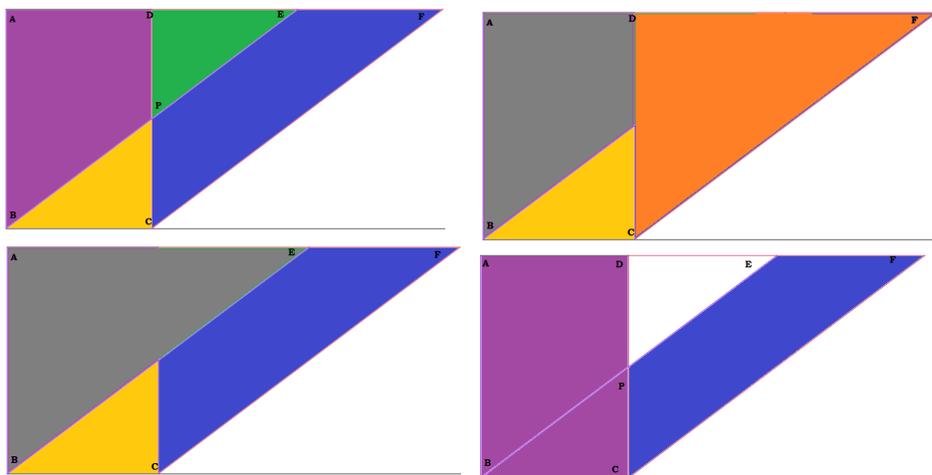
Las piezas eran las siguientes:

*ADPB (figura morada), DEP (Triángulo verde), BPC (triángulo amarillo),*

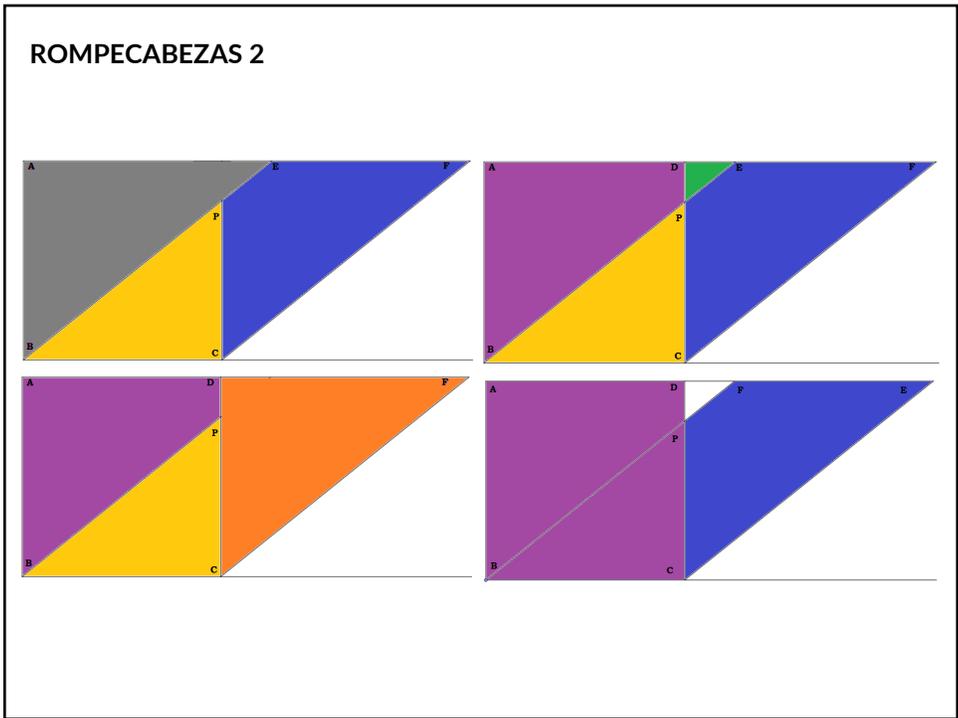
*EFCP (figura azul), AEB (triángulo gris) y DFC (triángulo naranja).*

15

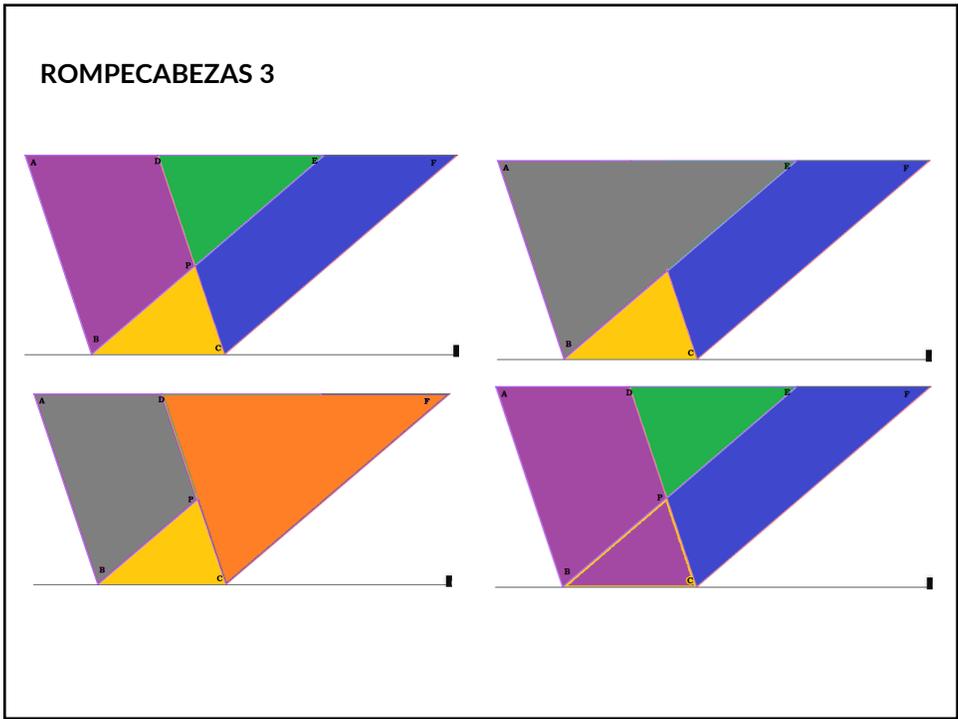
## ROMPECABEZAS 1



16



17



18

Los estudiantes identificaron las piezas del rompecabezas sin ningún inconveniente.

Se desarrollarán las siguientes actividades con el material:

**Identifica en tu cartulina base los paralelogramos:** Los estudiantes tuvieron dificultad en identificar los paralelogramos de la base de cartón, la docente presentó los tres tipos de rompecabezas y guió a los estudiantes a encontrar los paralelogramos a través del concepto de rectas paralelas.

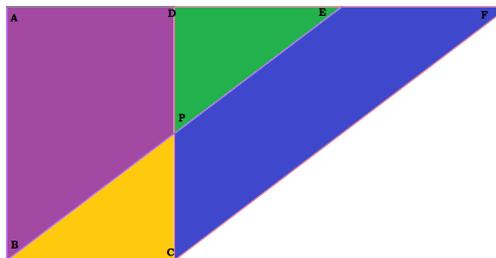
19

Finalmente los estudiantes señalaron con su dedo los dos paralelogramos que se encontraban en su base de cartón.

Busca en tus piezas recortadas un triángulo  $AEB$ , ahora, ubícalo de tal manera que encaje en tu cartulina base:

Ahora, busca en tus piezas recortadas el triángulo  $DFC$  y ubícalo en tal manera que encaje en tu cartulina base.

Ubica, el triángulo  $AEB$  sobre el triángulo  $DFC$ , ¿Cómo son estos triángulos?



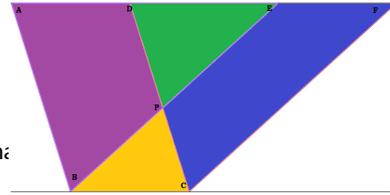
20

Toma las piezas ADPB y DEP, ubícalas en tu cartulina base, ¿Qué triángulo formas con estas dos piezas?

Toma las piezas DEP y EFCP, ubícalas en tu cartulina base, ¿Qué triángulo formas con estas dos piezas?

Ubica las piezas ADPB, DEP y EFCP en tu cartulina base, ¿Cómo son las áreas de los triángulos AEB y DFC?

Quitar la pieza triangular DEP. ¿Qué sabes de las áreas ADPB y EFCP?



21

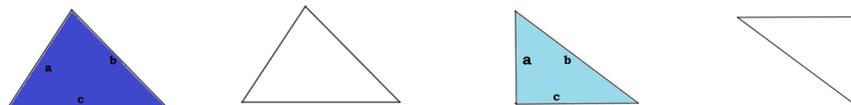
## ACTIVIDAD NÚMERO 9

**Objetivo:** demostración visual del teorema de Pitágoras.

**Metodología:**

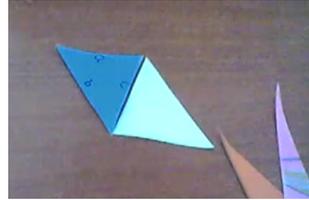
Para la actividad final, se propusieron dos actividades.

**Primera actividad:** Cada estudiante tendrá cuatro tipos de triángulos, uno de color azul oscuro, uno de azul claro y los otros dos triángulos son de color blanco, como los siguientes y se desarrollaran las siguientes preguntas:

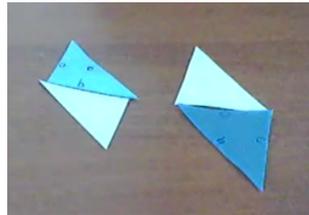


22

¿Qué tipo de figura forma el triángulo azul oscuro junto con el triángulo blanco con el lado a, lado b y lado c?



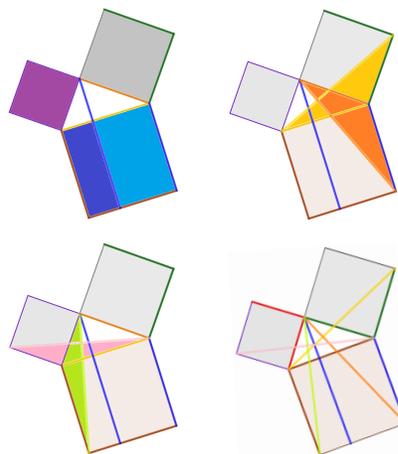
¿Qué tipo de figura forma el triángulo azul claro junto con el triángulo blanco con el lado a, lado b y lado c?



23

**ACTIVIDAD 2:** Cada estudiante tendrá un rompecabezas de 9 piezas y una base en cartón.

Las piezas son las siguientes: cinco paralelogramos (morado, azul claro, azul oscuro, mitad azul claro, mitad azul oscuro y gris), cuatro triángulos (amarillo, naranja, rosado y verde) y un triángulo rectángulo.



24

¿Cómo son los segmentos de color azul?

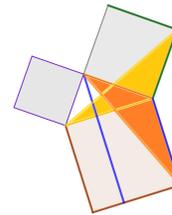
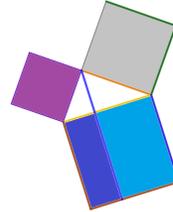
¿Cómo son los ángulos del paralelogramo azul y el paralelogramo gris?

Identifica un ángulo obtuso en el triángulo amarillo y otro ángulo obtuso en el triángulo naranja.

¿Cómo son los lados *de color verde*?

¿Cómo son los triángulos *naranja* y *amarillo*?

Observa el paralelogramo gris y el triángulo amarillo. ¿Puedes ver que están entre las mismas rectas paralelas? ¿Cuántas veces cabe el triángulo amarillo en el paralelogramo gris?



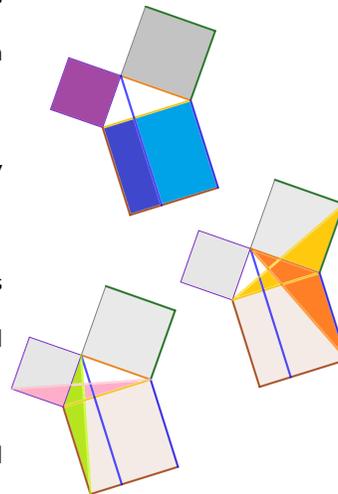
25

Observa el paralelogramo azul claro y el triángulo naranja. ¿Puedes ver que están entre las mismas rectas paralelas? ¿Cuántas veces cabe el triángulo naranja en el paralelogramo azul claro?

Cómo son los paralelogramos (cuadrado) gris y (rectángulo) azul claro? ¿Cómo puedes verificar esto?

Observa los triángulos rosado y verde. ¿Cuántas veces cabe el triángulo verde en el paralelogramo azul oscuro?

¿Cuántas veces cabe el triángulo rosado en el paralelogramo (cuadrado) morado?

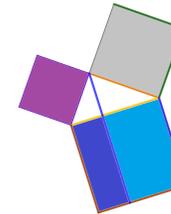
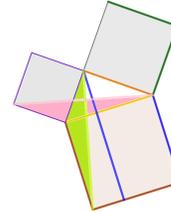


26

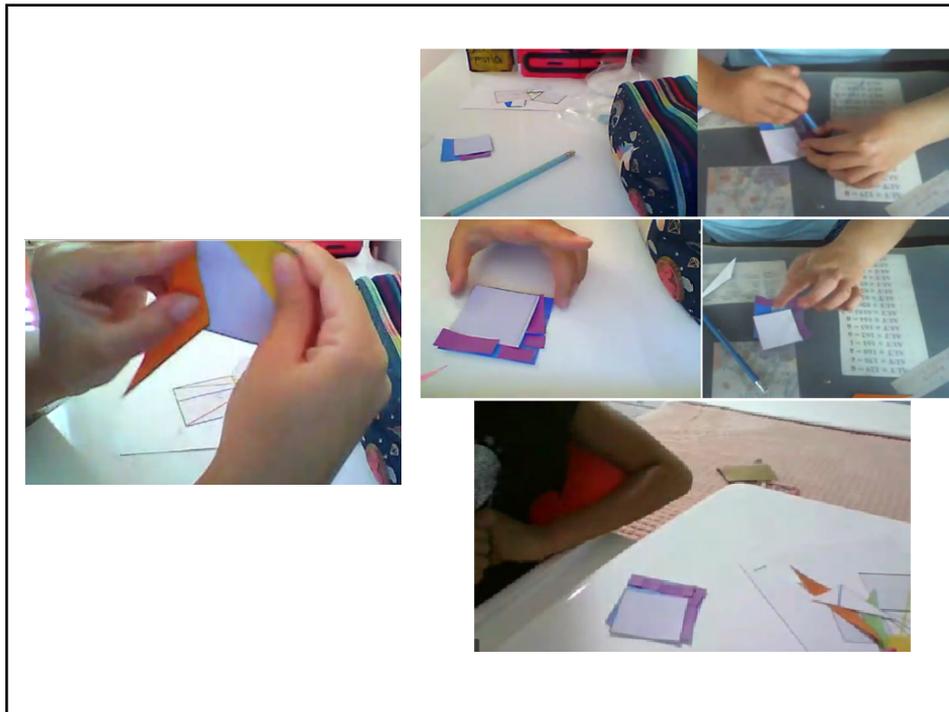
¿Cuántas veces cabe el triángulo rosado en el paralelogramo (cuadrado) morado?

¿Cómo son los paralelogramos morado y azul oscuro? ¿Cómo puedes verificar esto?

¿Cómo son los paralelogramos (cuadrados) morados y gris, con respecto al paralelogramo (cuadrado) que está pintado de dos colores azul? ¿Cómo puedes verificar esto?



27



28

## CONCLUSIONES GENERALES

Las actividades 1, 2, 3, 4 y 5, en las cuales se buscaba diseñar y desarrollar tareas que hicieran que los estudiantes de ocho a diez años analizaran, identificaran y probaran propiedades de objetos geométricos a través de demostraciones visuales. Esto da cumplimiento a lo dicho por Piaget cuando afirma que el pensamiento geométrico percibe el concepto que encierra la representación gráfica o dibujo.

Las actividades 7, 8 y 9, permitieron analizar y sustentar una posición crítica teniendo en cuenta los planteamientos de Gila Hanna (2001) basados en el desarrollo del pensamiento geométrico y la construcción de demostraciones visuales y hasta táctiles, a través del trabajo de comparación, descomposición y composición de figuras distinguidas por colores y con manipulables (rompecabezas).

Adicionalmente, vale la pena enfatizar en dos puntos importantes. El primero, está relacionado con la insistencia por parte de los estudiantes en que hay que “verificar” lo cual, es equivalente en algún modo a demostrar. El segundo punto, y no menos importante, está relacionado en la forma como los estudiantes lo hicieron, es decir, en la forma en que los niños “verificaban” (recortando y haciendo coincidir diferentes piezas del rompecabezas). Cabe resaltar que esto no estaba previsto en el diseño de las actividades; se pretendía llegar a que basaran sus conclusiones en tres proposiciones euclidianas: la primera, que paralelogramos entre las mismas paralelas y sobre la misma base tienen igual área; la segunda, que paralelogramos entre las mismas paralelas y sobre bases iguales tienen igual área; y la tercera, que el área de un triángulo es igual a la mitad del área de un paralelogramo sobre la misma base que el triángulo y entre las mismas paralelas.

29

Otro punto a destacar en esta investigación es que nunca se preparó a los estudiantes que probarían la igualdad de áreas (de un cuadrado y un rectángulo lo cual se hace dos veces en la demostración del teorema de Pitágoras) de dos figuras recortando una de las figuras y rearmando los pedazos de modo que coincidieran con la otra figura. Tampoco se pensó en otras muy buenas demostraciones visuales del teorema de Pitágoras que se conocen, sino que se siguió la línea de razonamiento del mismo Euclides

Para desarrollar este tipo de actividades de manera virtual, se recomienda hacerlo en grupos aún más pequeños, (máximo tres estudiantes), para que el trabajo pueda ser más guiado y así obtener mejores resultados.

Con esta investigación se motiva a los docentes de básica primaria a desarrollar actividades, que les permita a los estudiantes pensar y desarrollar pensamiento matemático y a incluir en sus actividades de aula representaciones visuales.

30

## REFERENCIAS

- Balacheff, N. (22 de Septiembre de 2000). Procesos de prueba en los estudiantes de matemáticas. . Bogotá, Colombia: Una empresa docente.
- Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. Italia.
- Byrne, O. (2013). *The first six books of the elements of euclid*. TASCHEN.
- Camargo Uribe, L. (Junio de 2010). Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria. Valencia, España.
- Cecilia R. Crespo, C. C. (2016). Las Funciones de la Demostración en el Aula de Matemática. *Acta latinoamericana de Matemática Educativa*.
- Christine Knipping, D. A. (2019). Argumentation Analysis for Early Career Researchers. *ICMI 13*.
- Cristian Alfaro, P. F. (2019). La demostración matemática: significado, tipos, funciones atribuidas y relevancia en el conocimiento profesional de los profesores de matemáticas. *UNA*, 21.
- Cristina Bolívar, M. A. (2010). La actividad demostrativa en básica secundaria un ejemplo de análisis. *Encuentro colombiano de matemática educativa*, 327-335.
- Cristine Knipping, D. A. (2019). Argumentation Analysis for Early career Researchers. *ICMI 13*.
- de Villiers, M., & Hanna, G. (2011). *Proof and Proving in Mathematics Education. The 19th ICMI Study*. Dordrecht: Springer.

31

- Diana Marcela Lourido, C. M. (2011). La enseñanza inicial de la demostración: un manual para docentes. . Brasil : CIAEM .
- Escobar, F. A. (Octubre de 2014). La demostración en Geometría: una mirada en la educación primaria . Bogotá, Colombia.
- Escobar, R. D. (2013). Teoremas en el aula de clase: una propuesta para la formulación didáctica de la enseñanza de las matemáticas a nivel de escuela secundaria. Manizales , Colombia.
- Ferdinando Arzarello, C. S. (2019). Approaching Proof in the Classroom Through the Logic of Inquiry. *ICME 13*.
- Florez, C. S. (2019). Saber suficiente no es suficiente: comportamientos cognitivos al resolver problemas de demostración con el apoyo de la geometría dinámica. . *TED*, 121-142.
- Gutiérrez, S. E. (2011). El pensamiento geométrico en los estudiantes de primer grado de secundaria. . 82-90.
- Hanna, G. (2001). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics*, 5-23.
- Jorge Fiallo, L. C. (2013). Acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en matemáticas. . *Integración*, 181-205.
- Kieran, C. (2019). Task Desing Frameworks in Mathematics Education Research: An Example of a Domain-Specific Frame for Algebra with Technological Tools. *ICME-13 Monographs* (págs. 265-287). Hamburg : Springer Open.

32

- López, N. R. (2010). Medios y recursos para al enseñanza de la geometría en la educación obligatoria. . *Revista electrónica de didácticas específicas*.
- Maricela Soto, M. R. (2012). Las situaciones (didácticas) de formación matemática o las competencias del saber enseñando . *S.A.E.M Thales* , 4-6.
- Osorio, V. M. (2 de Agosto de 2003). Si no demuestro...¿enseño matemática? *Educación matemática*, 163-178.
- Pereda, P. M. (24 de 06 de 2016). material lúdico-manipulativo para el aprendizaje de la geometría en cuarto grado de educación primaria. Bilbao, España.
- Pérez, D. C. (2011). Diseño, aplicación y evaluación de un sistema de actividades para la construcción del significado del concepto de área, en una comunidad de práctica para grado sexto . Bogotá, Colombia.
- Perry, P. (2000). Una propuesta para abordar el teorema de Pitágoras en clase . *EMA* , 152-169.
- Silvia, M. N.-C. (2019). La enseñanza de la matemática en el nivel medio. . *REDINE*, 1-11.
- Solano, E. M. (2015). Convención didáctica sobre la demostración geométrica. México.
- Stylianides, A. J. (2007). Proof and Proving in School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education* , 289-321.
- Torrejon, A. L. (s.f.). Material Manipulativo en geometría . Vallalodid, España .
- Vargas, G. V. (2013 ). La enseñanza del teorema de Pitágoras: una experiencia en el aula con el uso de geogebra, según el modelo de Van Hiele. . *Uniencia* , 95-118.
- Wenger, E. (1998). *Communities of prctice: Learning, meaning and identity* .

33



Universidad de  
**los Andes**  
Colombia

Facultad  
de Educación



## Comunicaciones de innovación curricular en Educación Matemática

---

<http://ued.uniandes.edu.co>

@uedUniandes

34