DOI: 10.13140 / RG.2.2.31187.40480

PRIMER CONGRESO PROVINCIAL DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Instituto Superior de Formación Docente "Cecilia Braslavsky"

Taller:

Análisis de la potencialidad del Software de Geometría Dinámica en la enseñanza de la matemática

Prof. Manuel Alejandro Verón

Destinatarios: profesores de matemática del nivel secundario.

Objetivos Generales:

- Adquirir habilidades en el manejo de las herramientas del software GeoGebra.
- Analizar la potencialidad del GeoGebra en la actividad matemática.
- Discutir sobre el diseño de actividades que permitan favorecer el aprendizaje significativo.

Objetivos Específicos:

- Construir triángulos que cumplan con determinadas condiciones.
- Analizar posibles procedimientos de resolución.
- Analizar la equivalencia entre áreas de triángulos.

Propuesta de Trabajo

Se pretende plantear una situación problemática para trabajarla con GeoGebra y realizar un análisis didáctico para reflexionar sobre la enseñanza de la matemática con el software.

La situación está conformada por

Actividad 1:

Abrir el archivo triángulo.ggb y construir un triángulo que tenga el doble de área que ABC.

Puesta en común.

Socialización de los procedimientos realizados. Análisis y discusión de algunas conjeturas

Conjetura 1*: "Si se duplican las longitudes de los lados del triángulo, se obtiene el doble del área"*

Pregunta para analizar:

¿Existe un único triángulo que tenga el doble del área del ABC?

Actividad 2:

Construir un nuevo triángulo que tenga:

a) La mitad del área del ABC.

b) La $\frac{2}{3}$ partes del área del ABC.

Puesta en común.

Socialización de los procedimientos realizados.

Preguntas para la discusión:

1) ¿Qué conocimientos son necesarios para resolver la actividad?
2) ¿Cuáles son las modificaciones en la consigna que llevan a producir un cambio estrategia en la resolución del problema?
3) ¿Cuáles son los elementos o herramientas que ofrece la actividad parar validar sus afirmaciones?
4) ¿Qué aprendizajes considera que permite construir la resolución de la actividad?

Variables didácticas:

Valor del área del nuevo triángulo

En la primera parte de la consigna al solicitar que el nuevo triángulo tenga el doble del área del original, el alumno puede recurrir a duplicar la longitud de un lado del triángulo o bien la longitud de una de las alturas; este mismo razonamiento es válido para construir un nuevo triángulo que tenga la mitad del área del ABC. También podrían surgir nuevos procedimientos como por ejemplo la utilización de la propiedad de la mediana de un triángulo.

Luego al pedir que construyan un triángulo que tenga la dos terceras partes del área del ABC, los procedimientos anteriores son insuficientes para responder a la consigna, por lo tanto, el alumno se ve obligado a emprender la búsqueda de una nueva estrategia que le permita resolver la situación y para ello es necesario que utilice la división de un segmento en partes congruentes para poder dividir un lado del triángulo o una de las alturas.

Validación:

El alumno puede realizar validaciones del tipo pragmática calculando mediante las herramientas del programa el área de los triángulos y las longitudes de los segmentos.

Además se puede validar los procedimientos mediante la búsqueda de argumentaciones que permitan justificar las afirmaciones realizadas.

¿Qué conocimientos son necesarios para resolver la actividad?

Fórmula para calcular el área de un triángulo. Elementos de un triángulo (lados y altura correspondiente a cada lado). Circunferencia. Simetría. Mediana. División de un segmento en partes congruentes.

¿Qué aprendizajes considera que permite construir la resolución de la actividad?

- Al duplicar la longitud de uno de los lados del triángulo ABC se duplica el área.
- Al duplicar la longitud de una de las alturas del triángulo ABC se duplica el área.
- Al duplicar todos las longitudes de los lados del triángulo ABC se cuatriplica el área.
- Existen infinitos triángulos que tienen el doble del área del triángulo ABC.
- Al considerar la mitad de uno de los lados del triángulo ABC se obtiene la mitad del área.
- Al considerar la mitad de una de las alturas del triángulo ABC se obtiene la mitad del área.
- Existen infinitos triángulos que tienen la mitad del área del triángulo ABC.
- División de un segmento en partes congruentes.
- El área de la figura no está asociada a la forma.

La implementación del GeoGebra en la resolución de la actividad, ¿fue productiva o no?, ¿por qué?

La implementación del GeoGebra para la resolución de la actividad favoreció los siguientes aspectos:

- Construcción de los triángulos con las condiciones solicitadas.
- Constatación o verificación de las longitudes de los lados.
- Construcción de las alturas del triángulo.
- Cálculo del área.
- Equivalencias entre áreas.
- Analizar la relación entre la forma y el área.
- División de un segmento en partes congruentes.

Actividad Alternativa

Actividad para resolverla en lápiz y papel.

Consigna: Primera parte

Dado el triángulo ABC construir un nuevo triángulo que tenga el doble de área que ABC.

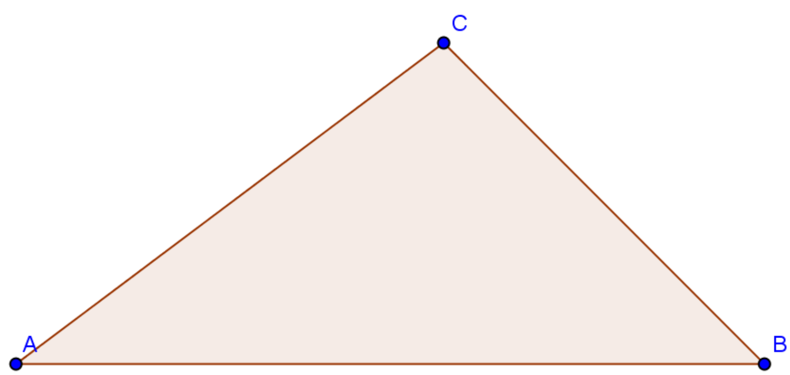
Consigna: Segunda parte

Construir un nuevo triángulo que tenga: a) La mitad del área del ABC. b) La $\frac{2}{3}$ partes del área del ABC.

Posibles procedimientos

Consigna: primera parte

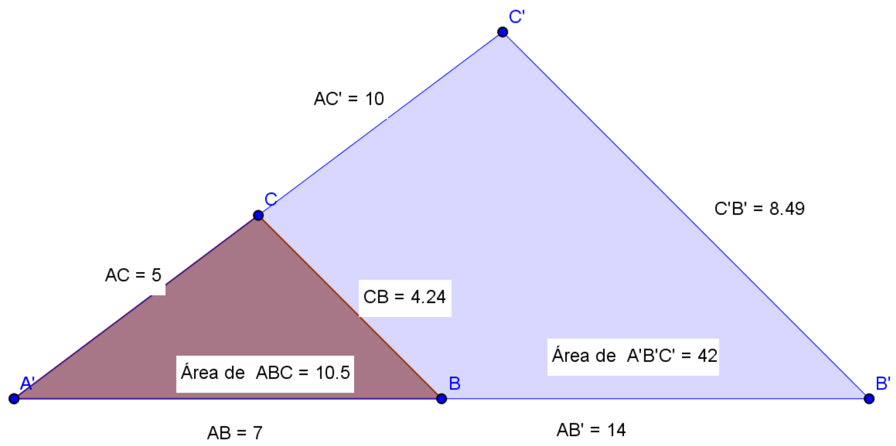
Abrir el archivo triángulo.ggb y construir un triángulo que tenga el doble de área que ABC.



Posibles procedimientos:

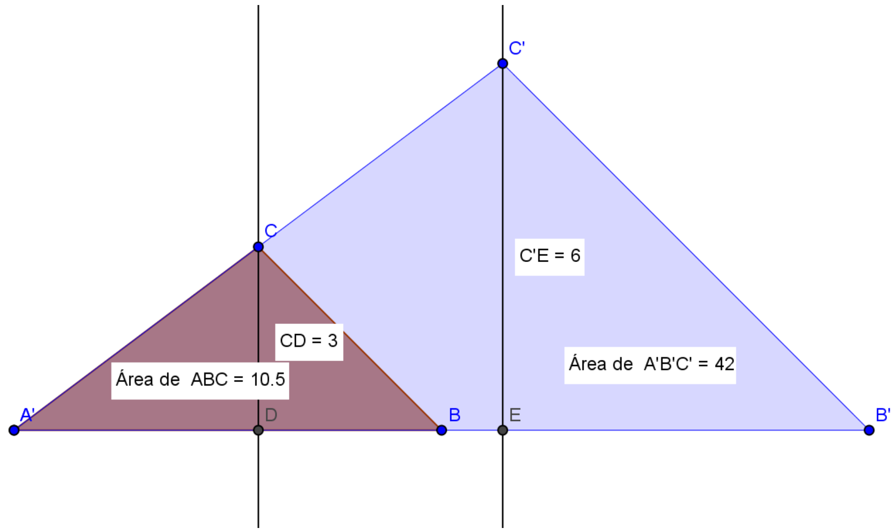
1. Procedimiento erróneo.

Conjetura: "Si duplico las longitudes de los lados, obtengo el doble del área"



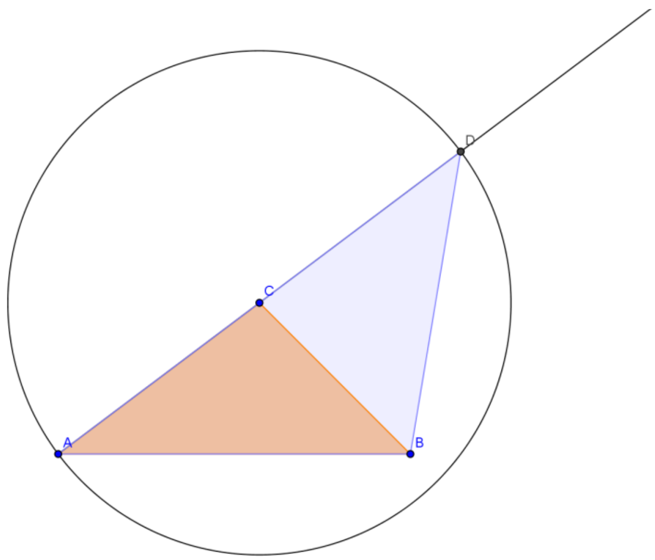
Al duplicar las longitudes de cada uno de los lados, se estaría obteniendo un triángulo A'B'C' que tiene el cuádruple del área del triángulo ABC, esto se debe a que si pensamos en la fórmula para calcular el área del triángulo A=(b.h)/2, Si consideramos a un lado como base, podemos observar que se ha duplicado, y como consecuencia de la construcción también se ha duplicado a la altura del triángulo, es por ello que se cuatriplicado el área del triángulo.

$$A_{A'B'C'} = \frac{2b\,.\,2h}{2} = \frac{2\,.\,2\,.\;b.h}{2} = 4.\frac{b.h}{2} = 4.A_{ABC}$$



Entonces de esta forma no se estaría obteniendo un triángulo que tenga el doble del área del triángulo ABC.

2. Fórmula del área: duplicamos la longitud de un lado.



Partiendo de que para obtener el doble del área del triángulo ABC, se necesita duplicar la longitud de uno de los lados del triángulo o la altura correspondiente a un lado, esto se debe a que si consideramos la fórmula del área del triángulo $A = \frac{b.h}{2}$, si multiplicamos a ambos miembros de la ecuación por 2 y por la propiedad asociativa de la multiplicación, podemos observar lo siguiente:

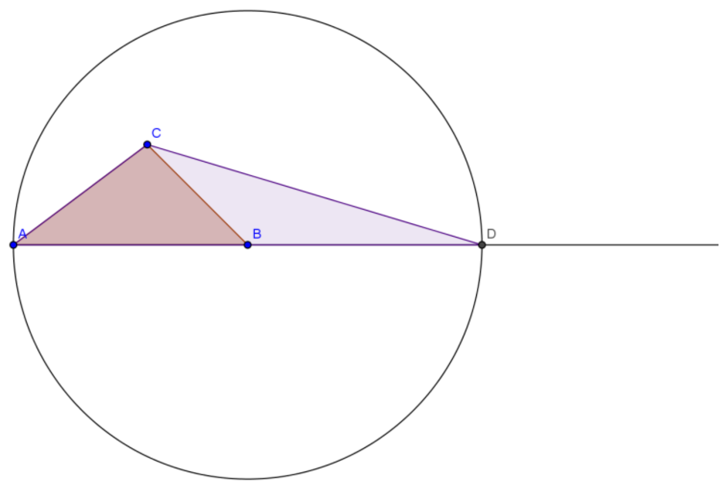
$$2A = 2\frac{b.h}{2} = \frac{(2b).h}{2} = \frac{b.(2h)}{2}$$

que para obtener el doble del área del triángulo ABC, se puede duplicar la longitud de un lado o la altura correspondiente a un lado.

Para duplicar la longitud de uno de los lados del triángulo, podemos trazar una circunferencia con centro en el vértice C y que pase por el vértice A con la opción de circunferencia (centro, punto), luego dibujamos la semirrecta con origen en A que pase por C de tal manera que se intersecte con la circunferencia en el punto D, siendo así el segmento AD diámetro de la circunferencia. A partir de esta construcción tenemos que

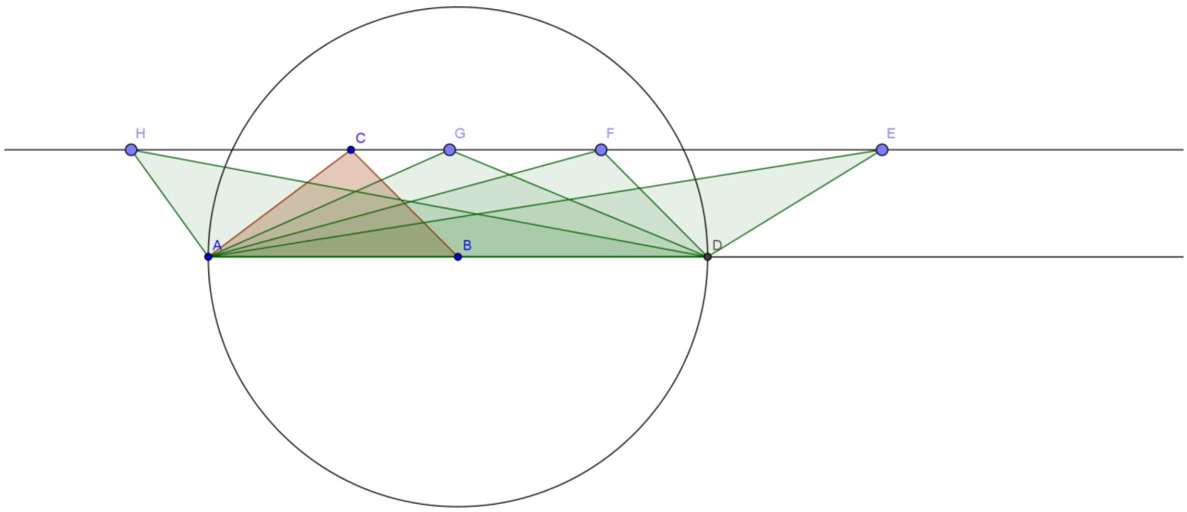
AC=CD y entonces dibujamos el triángulo ADB que tendrá el doble del área del triángulo ABC.

También es posible realizar el mismo procedimiento pero considerando otro lado del triángulo ABC, como se muestra en la siguiente figura.



3. Infinitos triángulos que tienen el doble del área de ABC.

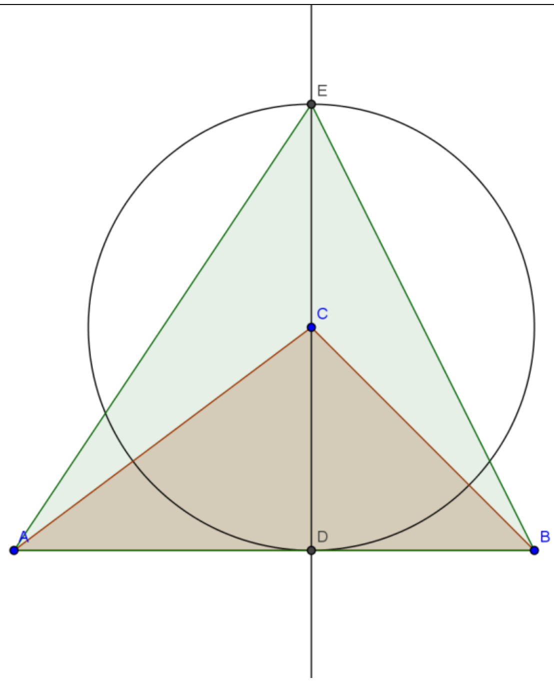
Partiendo de la construcción anterior considerando el lado AB para duplicar su longitud, podemos trazar una recta paralela a este lado que pase por el vértice C para considerar que cualquier punto que se encuentre sobre la recta paralela permite construir el triángulo solicitado junto con los puntos A y D, obteniendo así infinitos triángulos con el doble del área de ABC, por ejemplo los triángulos: AHD, AGD, AFD, AED, etc.



Esta afirmación es cierta ya que todos los triángulos (verdes) tienen un lado en común AD, que representa el doble del lado AB, y la altura de todos los triángulos al lado AB o AD, según corresponda, es la misma ya que se fijó por el trazado de la recta paralela, es por ello que todos los triángulos verdes tienen el doble del área del ABC.

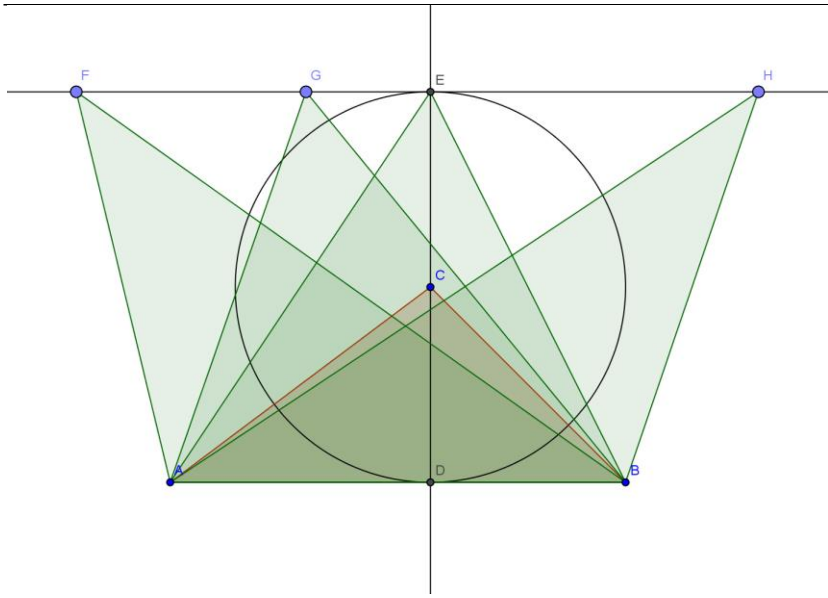
4. Duplicamos la longitud de la altura correspondiente a un lado del triángulo ABC.

El procedimiento es análogo al presentado anteriormente para duplicar la longitud de uno de los lados del triángulo.



5. Infinitos triángulos que tienen el doble del área de ABC.

Este procedimiento es análogo al presentado anteriormente pero consideramos como lado en común de los triángulos al lado AB y duplicamos la altura correspondiente a este lado por medio de la circunferencia y trazamos una paralela al lado AB que pase por el punto E como se puede observar en la siguiente figura, de esta forma obtenemos infinitos triángulos que cumplan con la condición solicitada.



Segunda parte de la consigna

Construir un nuevo triángulo que tenga:

a) La mitad del área del ABC.

b) La $\frac{2}{3}$ partes del área del ABC.

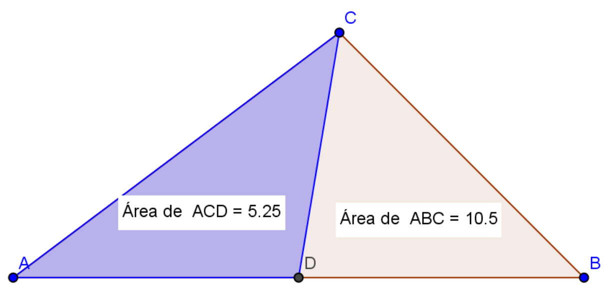
Procedimientos para el punto a.

6. Punto medio de un lado

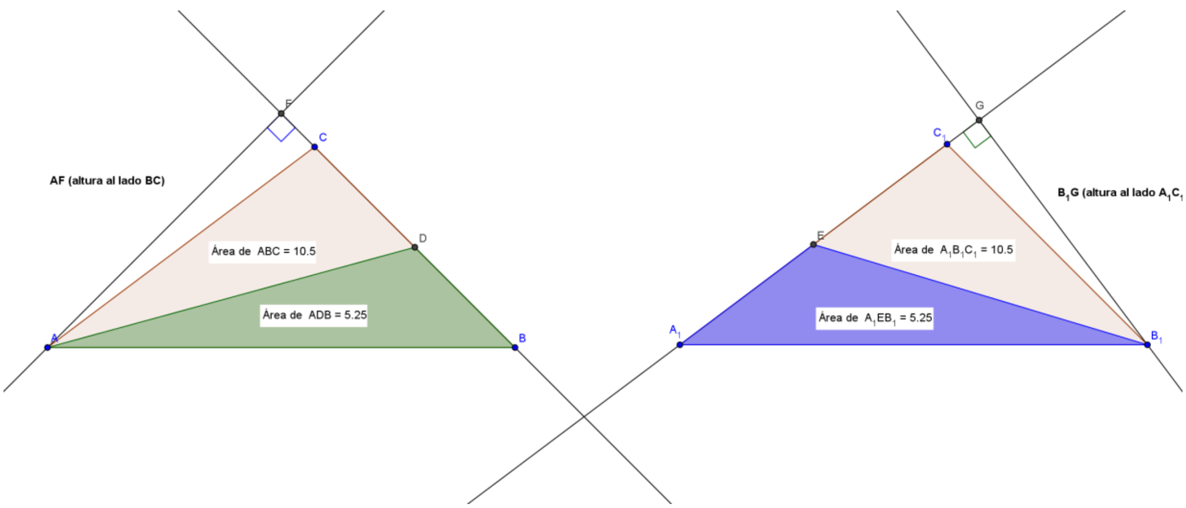
Siguiendo el razonamiento presentado anteriormente el cual consistía en que para obtener el doble del área del triángulo ABC teníamos que duplicar una lado o la longitud de una de las alturas del triángulos, podemos pensar de forma análoga para obtener la mitad del área del ABC.

Entonces para obtener la mitad del área del triángulo ABC marcamos el punto medio del lado AB con el punto D y armamos el triángulo ACD. Este triángulo ACD tiene la mitad del área del ABC porque tiene la misma altura al lado AB pero consideramos la mitad de la longitud de este segmento como base. Si observamos en la fórmula tenemos que:

$$\frac{1}{2}A = \frac{1}{2}.\frac{b.h}{2} = \frac{b}{2}.\frac{h}{2}$$



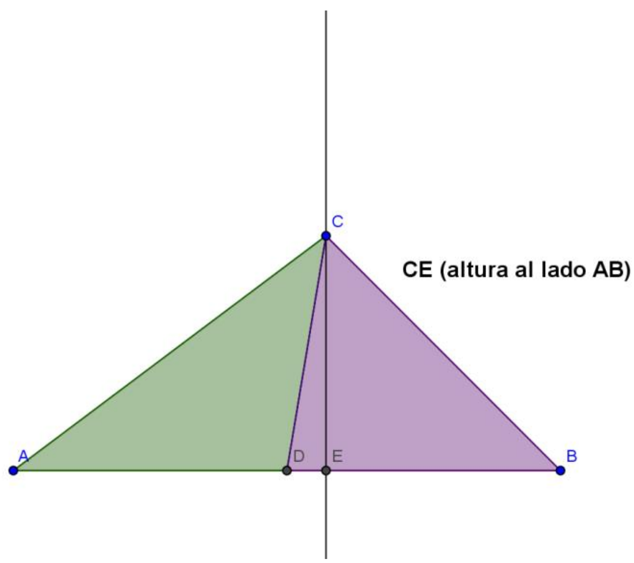
También es posible realizar el mismo procedimiento para obtener la mitad del área del triángulo ABC, marcando el punto medio sobre los otros lados del triángulo.



7. Mediana

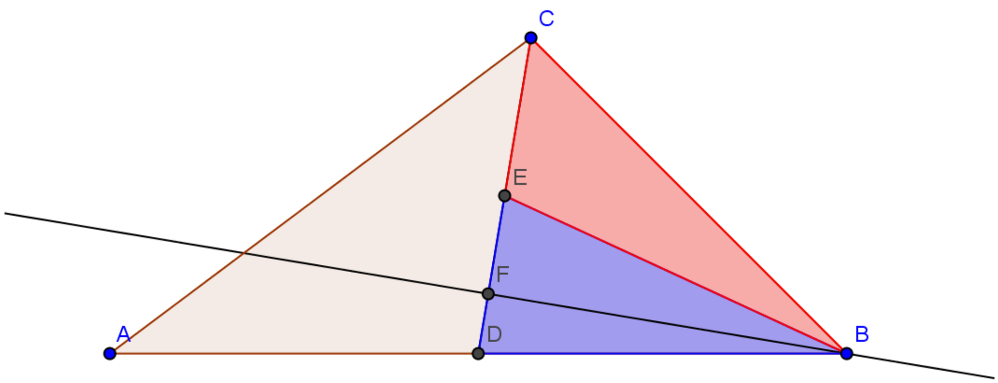
Es posible obtener un triángulo que tenga la mitad del área del triángulo ABC por medio de la construcción de la mediana a uno de los lados del triángulo y considerando la propiedad de la misma que plantea que: "Cada mediana divide al triángulo en dos triángulos, de los cuales es un lado común; dichos triángulos, en general, no son congruentes, pero sí de igual área".

Para demostrar que esta afirmación es verdadera, podemos trazar la mediana al lado AB, obteniendo así el segmento DC que es la mediana porque une el punto medio del lado AB y su vértice opuesto. Si consideramos los triángulos ADC y BDC, podemos observar que como D es punto medio del lado AB, entonces AD=DB. Luego trazamos la altura correspondiente al lado AB que contiene a los lados AD y DB, por lo que las alturas de los triángulos son iguales. A partir de la fórmula del cálculo del área de un triángulo, podemos decir que tienen un lado congruente y la misma altura ambos triángulos ADC y BDC, es por ello que tienen la misma área. Sabiendo esto, es suficiente para responder a la consigna considerando uno de los triángulos ya que se dividió al triángulo ABC en dos diferentes pero de igual área.

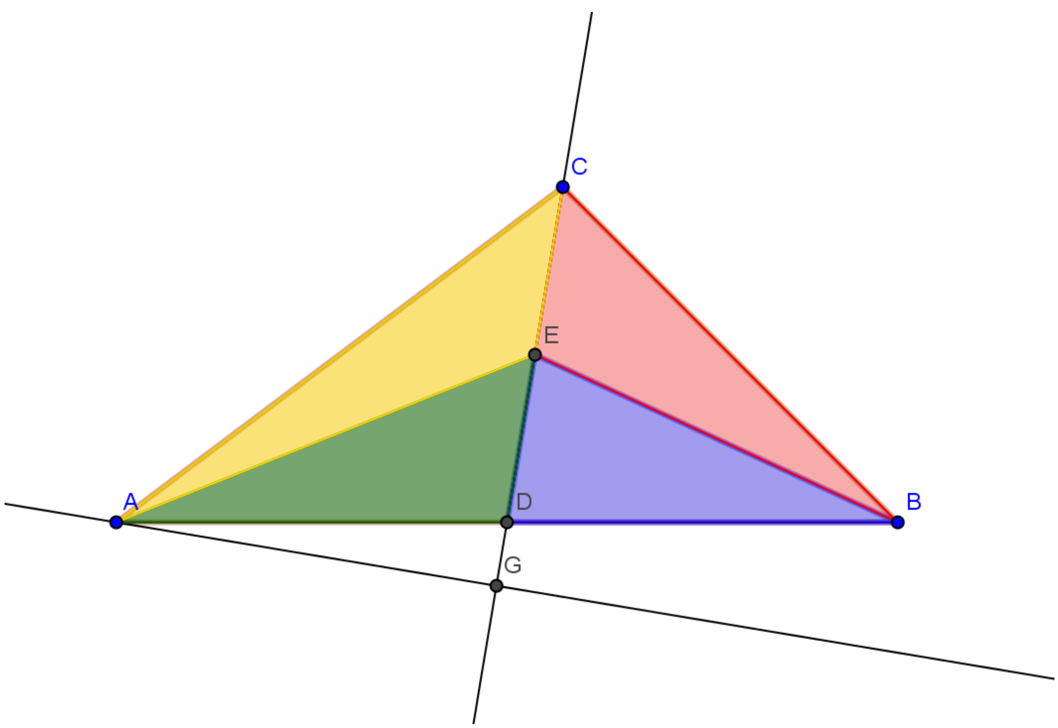


También es posible realizar el mismo procedimiento considerando los otros lados del triángulo.

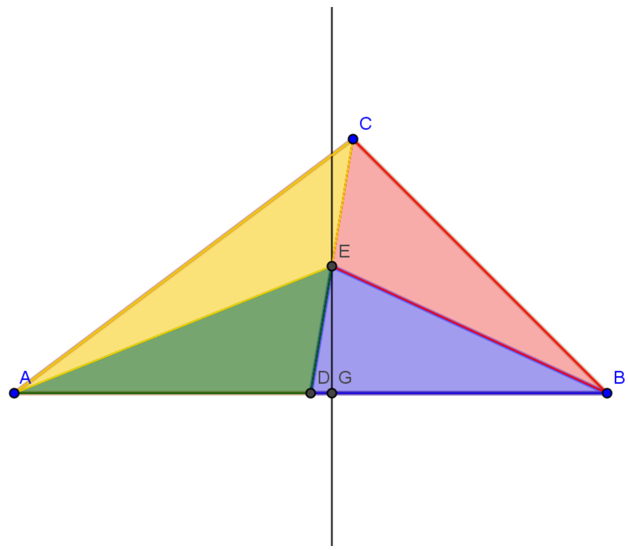
Para probar afirmación podemos realizar lo siguiente: Primero trazamos la mediana CD y marcamos su punto medio E, si consideramos los triángulos BDE y BEC, podemos observar que CE=ED porque E es punto medio de CD, y la altura del triángulo BDC al lado CD es la misma para los triángulos involucrados, por lo tanto tienen la misma área.



Realizando un análisis análogo para los triángulos AED y ACE, podemos notar que DE=EC porque E es punto medio de DC y la altura (AG) correspondientes a los lados involucrados son iguales, por lo tanto los triángulos AED y ACE tienen igual área.



Luego podemos demostrar que el triángulo AED tiene igual área que el triángulo BED porque AD=BD porque D es punto medio del lado AB, y ambos triángulo tienen la misma altura a los lados en cuestión, por lo tanto tienen igual área.



Sabiendo esto podemos escribir lo siguiente:

Los triángulos BDE y BEC tienen igual área.

Los triángulos ADE y ACE tienen igual área.

Los triángulos ADE y BDE tienen igual área.

Por lo tanto todos los triángulos BDE, BEC, ADE y ACE tienen igual área.

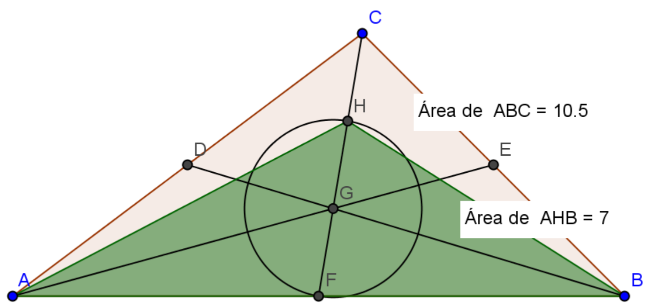
Esto quiere decir que considerando los triángulos AEB, ACD y BDC tienen la mitad del área del triángulo ABC.

9. Propiedad del baricentro

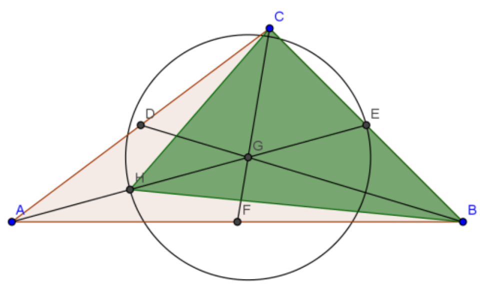
Para obtener las dos terceras partes del área del triángulo ABC, el alumno puede recurrir a la propiedad del baricentro que dice: "El baricentro (G) es la intersección de las medianas del triángulo. Las medianas se dividen mutuamente en la misma proporción:1/3 de la mediana desde G al lado y 2/3 desde el vértice a G".

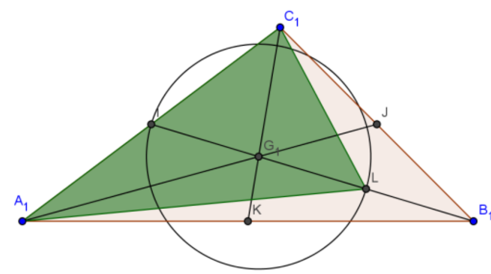
A partir de esta propiedad se puede considerar las dos terceras partes de la mediana para poder construir el triángulo solicitado. Para ello el alumno parte de obtener el baricentro mediante la intersección de las medianas mediante el punto G.

Luego teniendo en cuenta la propiedad del baricentro, mediante la opción de circunferencia y centro, dibuja una circunferencia con centro en el punto G y que pase por el punto F (punto medio del lado AB), para marcar la intersección de la mediana FC con la circunferencia con el punto H. De esta forma dividió a la mediana en tres segmentos congruentes FG=GH=HC, de modo que al considerar el triángulo AHB tendrá el área requerida.



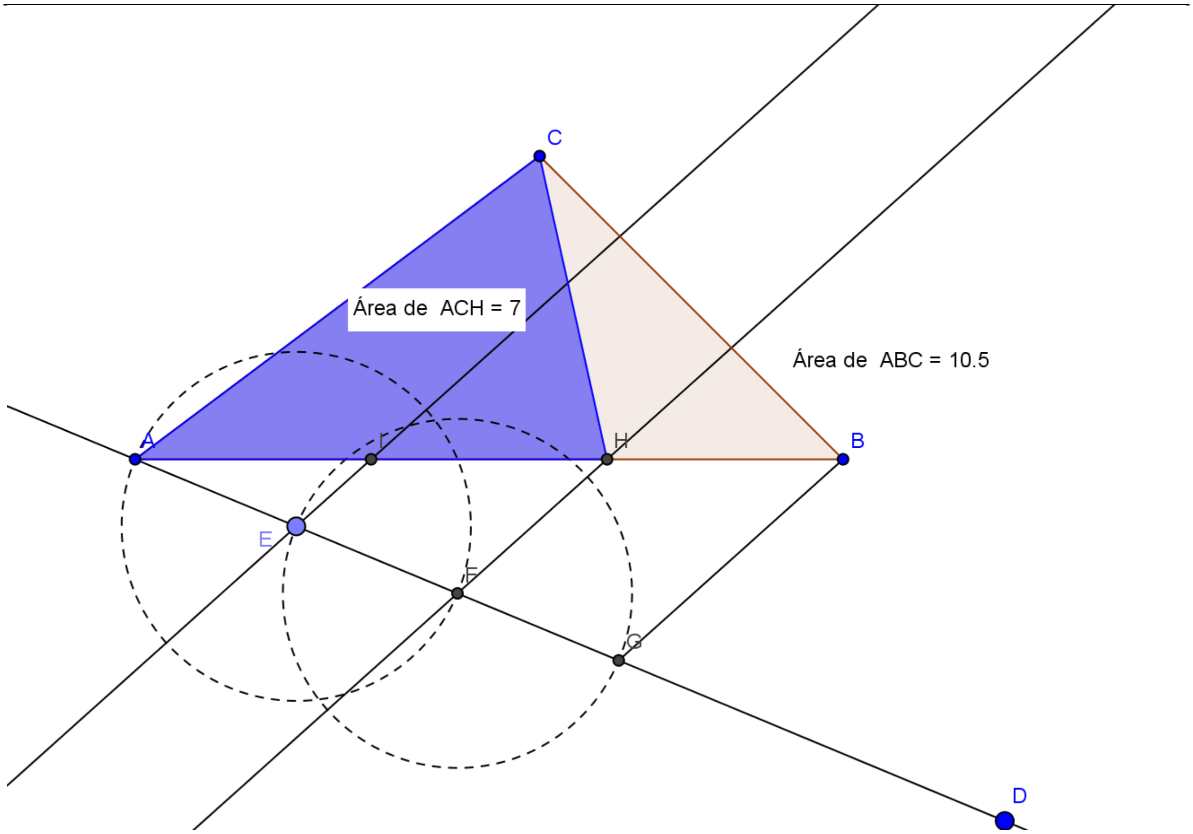
También es posible realizar el mismo procedimiento considerando las otras medianas del triángulo.





10. División de un segmento en partes congruentes.

Para poder dividir el lado AB en tres partes congruentes, trazamos una recta auxiliar que pase por el punto A y un punto exterior D. Luego marcamos con circunferencias tres puntos E, F y G de tal manera que los segmentos que determinan son congruentes AE=EF=FG. Unimos el punto G con el punto B, determinando el segmento GB, luego trazamos rectas paralelas que pasen por los puntos F y E de tal manera que determine sobre el lado AB, los puntos I y H, con lo que se obtiene los segmentos AI, IH y HB que son congruentes.


C
Área de ACH = 7
Área de ABC = 10.5
A
I
H
B
E
F
G
D