Unidad Didáctica

Funciones: Gráficas, Dominio y Codominio

Carlos Eduardo Bernal
matematicascb@hotmail.com

Junio, 2020

1. INTRODUCCIÓN

Hablar del tema de funciones en nuestro contexto, es hablar de un contenido relacionado con el último grado de bachillerato y el primero de universidad. Es un curso limítrofe entre el colegio y la universidad que causa opiniones encontradas entre los profesores de colegio, aludiendo de que no se cuenta con el tiempo necesario para profundizarlo y profesores universitarios, que manifiestan que los estudiantes de primer ingreso, carecen de competencias básicas.

Pero mientras nuestro sistema y currículo siguen evolucionando, es pertinente mejorar desde nuestra condición actual, nuestras propuestas educativas.

La intención de esta UD es inducir la innovación en el curso de precálculo en el 12° grado. Se facilitan actividades que pretenden construir el concepto de función, determinar tanto el dominio como el codominio desde el plano gráfico y visualizar la correspondencia entre el gráfico-ecuación, en una manera secuencial-amigable para nuestros estudiantes.

2. PROBLEMÁTICA

Las dificultades que presenta el curso de precálculo, específicamente el subtema de funciones, trascienden el nivel medio de educación y el contexto nacional. Lo que evidencia que la enseñanza del objeto matemático, es un genuino tema de investigación dentro de la Educación Matemática, confirmado por autores como:

Cuevas y Delgado (2016): Las funciones no hablan, pero los profesores sí lo hacen. De ahí que en The National Council of Teachers of Mathematics de Estados Unidos, se remarcara la importancia del concepto de función. Queda patente que se trata de un "concepto unificador en Matemáticas" y que "el lenguaje del cambio y la causalidad es expresado por el simbolismo de las funciones" (NCTM 1989). (p. 109)

Quintero y Cadavid (2009): El concepto de función, fundamental en el desarrollo de las matemáticas y de otras ciencias, ha presentado diversas dificultades en los procesos de aprendizaje y de enseñanza, dada su complejidad, lo cual ha sido identificado en la investigación matemática escolar. (p.1)

Parte de las conclusiones de García et al. (2004) en un contexto universitario, fue el siguiente:

Se ha documentado a través de un test aplicado a estudiantes de ingeniería que las mayores dificultades de aprendizaje del concepto de función están asociadas a tareas de transferencia entre registros semióticos. Específicamente, son las tareas de pasaje del registro gráfico al algebraico las que presentan el mayor reto para los estudiantes. (p.33)

Con relación a la problemática en el contexto dominicano, Terrero y Pérez (2010) comparten:

…la experiencia de este autor y la opinión de más del 70 % de los docentes encuestados coincide en que la gran mayoría de los escolares no dominan los gráficos de las funciones elementales, que no pueden realizar el trazado del gráfico de una función y que justifica el hecho de que en las tareas que se les encomiendan existen dificultades cuando tratan de representarlas o de analizar sus propiedades, a pesar de que estos contenidos son abordados en función del desarrollo de estas habilidades en el Colegio APEC Minetta Roques. (p.94)

Por su parte Díaz (2013) determinó:

La variedad de concepciones erróneas y dificultades que se reportan en la literatura revelan las siguientes cuatro grandes áreas de problemas esenciales en el aprendizaje de las funciones:

- No considerar el dominio y el rango de las funciones
- Una tendencia por la regularidad
- Un enfoque puntual (en las gráficas); y
- Una separación entre el contexto gráfico y el algebraico. (p. 20)

3. Contextualización

Laboro en el Instituto Profesional y Técnico de Azuero (IPTA), ubicado en el Distrito de Los Santos, Provincia de Los Santos. Es uno de los colegios del país que brinda una formación académica, técnica e industrial. La motivación principal de sus estudiantes de forma general se concentra en conocer el funcionamiento de los sistemas mecánicos de los motores, aparatos eléctricos, la chapistería, la construcción, la informática, etc.

Un estudio de campo, basado en los resultados de una encuesta, aplicada a tres profesores del departamento de matemática, arrojó lo siguiente:

- Los estudiantes no cuentan con los conocimientos previos para el curso.

  "*En lugar de dar inicio al tema de funciones, hay que tomar horas de clase para recordar temas como plano cartesiano, variable,…"*

  "Deficiencia en las operaciones básicas en la aritmética (cuando se evalúa la función)"

- El tema no despierta el interés debido, por su grado de complejidad.

  "El mayor obstáculo es el desinterés por aprender temas que requieren su atención y empeño"

Situación confirmada por investigadores como Gascón (como se citó en Farfán, 2013) que: Toma como problemática didáctica, una ampliación limitada de la problemática espontánea del profesor. Menciona como ejemplos de esto, los conocimientos previos de los alumnos, el problema de la motivación de los alumnos para el aprendizaje, los instrumentos tecnológicos de la enseñanza, la diversidad, cómo enseñar a resolver problemas, cómo evaluar, etc. (p.15)

El cálculo dentro del contexto educativo panameño, es un tema fundamental en los primeros años de carreras técnicas a nivel universitario y en el nivel medio de bachillerato, se facilita en el 12° grado por sugerencia del currículo nacional de educación estatal.

CONTENIDOS			INDICADORES DE LOGRO	ACTIVIDADES SUGERIDAS DE EVALUACIÓN
CONCEPTUALES	PROCEDIMENTALES	ACTITUDINALES		
1. **FUNCIONES REALES** • Concepto • Dominio y codominio • Clases de funciones y sus gráficas. • Funciones algebraicas - Constante - Idéntica - Lineal - Cuadrática - Racionales - Irracionales - Trazos - Gráficas - Aplicaciones • **Trascendentes**	• Clasificación de las funciones algebraicas y trascendentes según su definición y representación gráfica. • Construcción de la gráfica de las funciones algebraicas y trascendentes. • Determinación del dominio y codominio, según la característica de la función • Resolución de las operaciones fundamentales con funciones reales y determinación del dominio de la función resultante. • Determinación de la compuesta de funciones reales y el dominio de la	• Valoración de la utilidad de las funciones reales en situaciones de su entorno. • Seguridad al identificar los distintos tipos de funciones y establecer su dominio y codominio. • Iniciativa y creatividad para la construcción de la gráfica de los diferentes tipos de funciones.	• Determina si una curva en el plano cartesiano corresponde a una función o no, aplicando adecuadamente la definición y el criterio de la recta vertical. • Realiza con precisión y creatividad la gráfica de una función determinando el dominio y codominio. • Resuelve situaciones del contexto aplicando los procesos de las funciones reales, correctamente. • Demuestra seguridad	• Participa en un conversatorio sobre función y establece diferencia y semejanza con una relación. • Presenta situaciones del entorno donde se ejemplifiquen relaciones o funciones. • Realiza prácticas grupales sobre funciones para graficar y determinar su dominio y codominio. • Resuelve ejercicios de operaciones con funciones y la compuesta para desarrollar destrezas y

Nota. Recuperado de *"PROGRAMA CURRICULAR DE MATEMÁTICA 12° GRADO",* MEDUCA, 2014, p. 34.
http://www.educapanama.edu.pa/sites/default/files/documentos/Prog-Educ-MEDIA-matematica-12-2014.pdf

A partir de esta realidad, el problema consiste en facilitar un curso de precálculo de calidad y accesible para todos los estudiantes de 12° del IPTA.

4. Justificación

Como mencioné anteriormente, varios estudiantes del centro, no presentan la mejor actitud ante las matemáticas por su inclinación natural a la formación técnica que reciben. Es por ello que es más que necesario, la utilización de los recursos gráficos para la enseñanza del objeto matemático. Existe una cantidad considerable se autores que concuerdan que tanto las representaciones semióticas como la visualización son importantes para la comprensión de los objetos matemáticos, entre ellos el de función.

La visualización ha estado generalmente considerada sólo como un soporte que ayuda a la intuición y formación del concepto en el aprendizaje matemático, pero desde hace pocos años, muchos matemáticos han reconocido la importancia del razonamiento visual no solo en el descubrimiento, sino también en la descripción y justificación de resultados. (Fabra y Deulofeu, 2000, p. 209)

Por su parte Farfán (2013) nos comparte: En nuestras experiencias con profesores y estudiantes hemos constatado que si logran incorporar elementos visuales como parte de su actividad matemática al enfrentar problemas, no sólo manejan la función como objeto sino que además transitan entre los contextos algebraico, geométrico y numérico versátilmente, es decir, si se tiene dominio del contexto geométrico/visual tanto en la algoritmia y la intuición como en la argumentación es posible el tránsito entre las diversas representaciones. (p. 26)

Duval (como se citó en Prada *et al*, 2017) sostiene: "Las diferentes representaciones semióticas de un objeto matemático son absolutamente necesarias, ya que los objetos matemáticos no son directamente accesibles por la percepción o por una experiencia intuitiva inmediata como lo son los objetos comúnmente llamados físicos" (p. 16).

Entiéndase por representaciones semióticas "todas aquellas construcciones de sistemas de expresión y representación que pueden incluir diferentes sistemas de escritura, como números, notaciones simbólicas, representaciones tridimensionales, gráficas, redes, diagramas, esquemas, etc. Cumplen funciones de comunicación, expresión, objetivación y tratamiento" (Tamayo,2006, p.41).

Según Delgado (2015)**:** Cuando un docente trata de enseñar el concepto de función debe clarificar a sus estudiantes el conjunto de signos, la sintaxis empleada con esos signos y la semántica relativa a dicha sintaxis. Ahora bien, hacerlo desde una perspectiva de lenguaje formal, sin hacer uso de algún tipo de representación visual, podría acarrear en la necesidad de un sobreesfuerzo del discente para lograr adquirir el conocimiento. (p. 3)

Desde mi experiencia he verificado que, a partir de los recursos gráficos, los estudiantes reflejan mejores actitudes, confianza y una expectativa positiva ante el concepto presentado. Los profesores en matemáticas debemos reconocer las representaciones semióticas como equivalencias de los signos matemáticos y procurar facilitar estas equivalencias de forma efectiva a la hora de enseñar. Existe una relación directa entre el equivalente gráfico y la accesibilidad de la clase. Mientras más equivalencias graficas facilitemos, mayor será la accesibilidad de la clase. En definitiva ¿Cómo no aprovechar los recursos gráficos al contar con un estudiantado que necesita ser motivado en matemáticas?

Desde el plano gráfico, aplicando el criterio de la recta vertical, se puede verificar si una curva o recta en el plano cartesiano corresponde a una función o no. También, desde su representación gráfica, se pude determinar tanto el dominio como el codomino de una función. La aplicabilidad de estos métodos por parte del estudiantado, se verificó en las investigaciones realizadas por Prada *et al* (2017): En las gráficas en el plano cartesiano se observa la masiva utilización del criterio de la recta vertical paralela al eje de las ordenadas. Al proporcionarles funciones en diversos registros de representación, se observa buenos resultados para identificar sus características (dominio, rango, intervalos de crecimiento, asíntotas, entre otros), ofreciendo mejores resultados a partir del registro gráfico. (p. 21)

De las ideas pedagógicas de Díaz (2013) consecuentes al estudio del concepto de función, a partir de su historia e investigaciones, confirman la relevancia de **tres métodos aplicados en nuestra propuesta didáctica,** cuando expone lo siguiente: En la literatura revisada existe un consenso general en relación sobre qué aspectos son cruciales para una profunda comprensión del concepto de función. Las áreas identificadas incluyen:

• Interpretación de funciones representadas por gráficas.
• Análisis de los efectos de cambio en los parámetros de las gráficas de las funciones.
• Aplicación de la tecnología para representar las funciones. (p. 20)

A parte de esto se aplican actividades mencionadas en Leinhardt et al., (1990) como:

- Interpretación: "Dependiendo de lo que representa el gráfico, el significado adquirido por la interpretación puede residir dentro del espacio simbólico del gráfico, o puede cambiar a un espacio diferente (el espacio de situación o el espacio algebraico)" (p. 8).
- Construcción de ecuaciones a partir de gráficas: Trazar puntos de una tabla de pares ordenados, una vez que se configuran los ejes y las escalas, es bastante sencillo. La construcción de una ecuación que representa un gráfico dado, puede ser muy difícil, principalmente porque no es obvio el procedimiento para determinar la ecuación. (p. 13)
- Traslación: "Por traslación nos referimos principalmente a el acto de reconocer la misma función en diferentes formas de representaciones" (p. 16).

5. Fases de la Unidad Didáctica

Expuesto esto, facilito las 5 fases en que se compone la propuesta didáctica:

Fase 1: Aplicación de actividades para construcción del concepto de función, adaptados de:

- Libro: *El lenguaje de funciones y gráficas*. Traducido y adaptado por Alayo (1990)
- Libro: *Aprender a enseñar matemáticas en la educación secundaria.* Calvo et al. (2016)

Fase 2: Determinar si una gráfica corresponde o no, a una función. Determinar a partir de la gráfica de una función el dominio y el codominio.

Adaptados del sitio web Khan Academy:

- Determinar si una gráfica representa una función o no. https://es.khanacademy.org/math/algebra/x2f8bb11595b61c86:functions/x2f8bb11595b61c86:recognizing-functions/e/recog-func-2
- Determinar el dominio y codominio a partir de la gráfica. https://es.khanacademy.org/math/algebra/x2f8bb11595b61c86:functions/x2f8bb11595b61c86:introduction-to-the-domain-and-range-of-a-function/e/domain_and_range_0.5

Fase 3: La función lineal desde su forma algebraica $y = mx + b$, siendo m la pendiente y b la ordenada en el origen.

Actividades:

- Graficar manualmente, una función lineal con $m = 1$ sin efectuar cálculos.
- Graficar manualmente, una función lineal con $m \neq 1$ determinando solo el corte en el eje de las abscisas x.

Fase 4: La función cuadrática desde su forma general $y = ax^2 + bx + c$, y su forma canónica $y = a(x - h)^2 + k$.

Actividades:

- Verificación de la correspondencia algebraica–gráfica al variar los parámetros de la función (Anchura, concavidad, ordenada en el origen, traslación vertical y horizontal)

  Ejercicios adaptados del blog MatematicasCercanas.com

  https://matematicascercanas.com/2017/05/26/funcion-cuadratica-parabola/

  y verificados con la aplicación GeoGebra https://www.geogebra.org/m/tnfMxTqV.

- A partir gráficas impresas de rectas y parábolas, determinar la ecuación de la función.

Fase 5: Ejercicios de argumentación, a partir de informaciones gráficas.

Adaptado del sitio web ¿Which One Doesn't Belong? http://wodb.ca/graphs.html

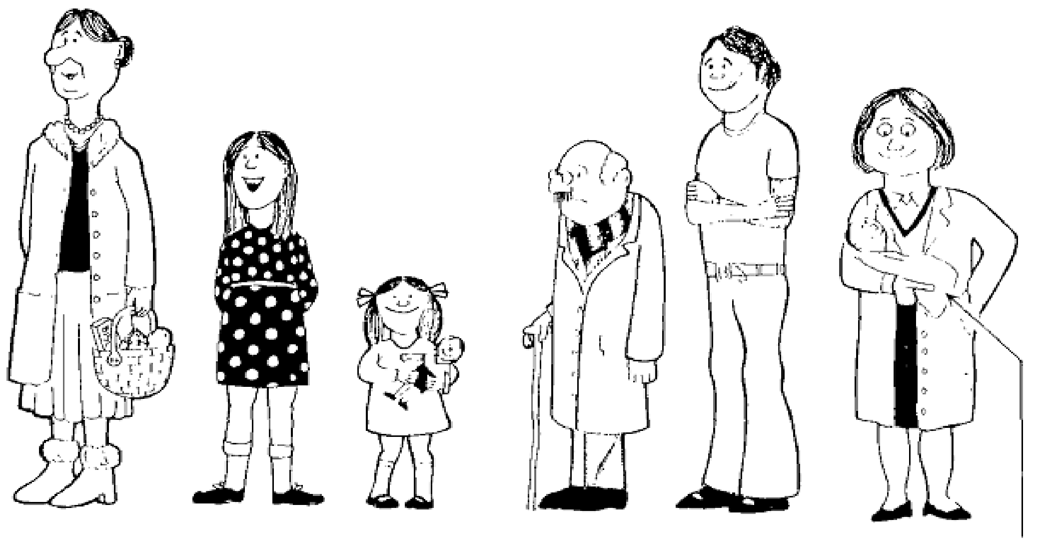
4. Innovación aplicada

4.1 Construcción del objeto matemático – Fase 1

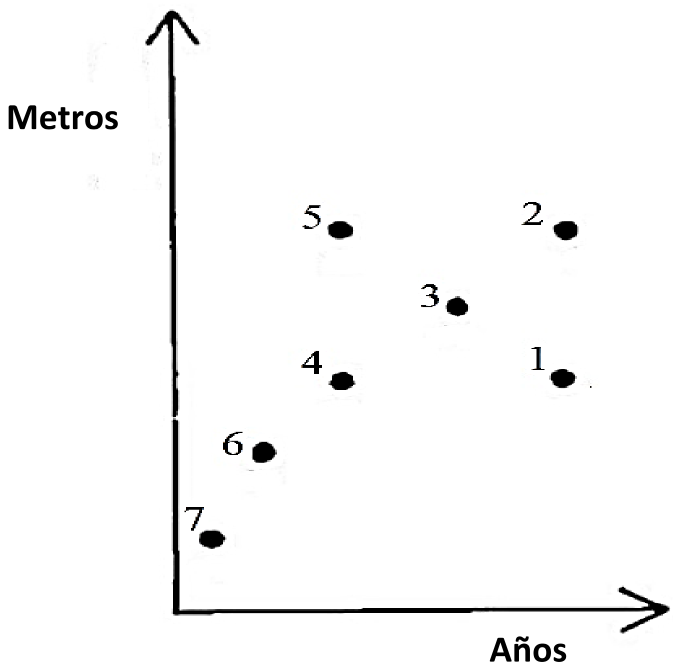
Por lo general existe una desconexión entre lo cotidiano y el concepto de función, a la hora de definir dicho concepto. Es pertinente valerse de situaciones del contorno que ilustren la correspondencia entre dos conjuntos o magnitudes, para inducir una definición más contextual desde la perspectiva discente. De esta manera, aceptarán con naturalidad, que las funciones son herramientas matemáticas que sirven para resolver e interpretar diversas situaciones.

Duración: 8 días	
Objetivo	Observaciones
• Diferenciar y reconocer tanto la variable independiente como dependiente de una función. • Reconocer el concepto de función.	Recomiendo: • Que las tres primeras actividades sean desarrolladas por el profesor, valiéndose de la indagación, como método para generar el razonamiento lógico y la comprensión. • Que las actividades subsiguientes, se desarrollen en grupo de 2 o 3 estudiantes, como estrategia para fomentar la construcción del conocimiento entre estudiantes. • De existir la necesidad de obtener una calificación, considérese de apreciación.

1. La siguiente imagen, representa la cola de una parada de autobús y el diagrama de la parte inferior, se relaciona con cada una de las personas que presenta la imagen.



Alicia Marta Pili Daniel Carlos Lola Javi



A partir de esta información, responde lo siguiente:

- De las unidades que presentan los ejes vertical y horizontal ¿Qué aspectos de las personas, crees que se están relacionando? ______________________________
- Cada punto esta enumerado. Por lo tanto, determina a quien representa cada uno:

Punto 7: ______________________ Punto 6:_____________________

Punto 4: ______________________ Punto 3:_____________________

Punto 1: ______________________ Punto 2:_____________________

Punto 5: ______________________

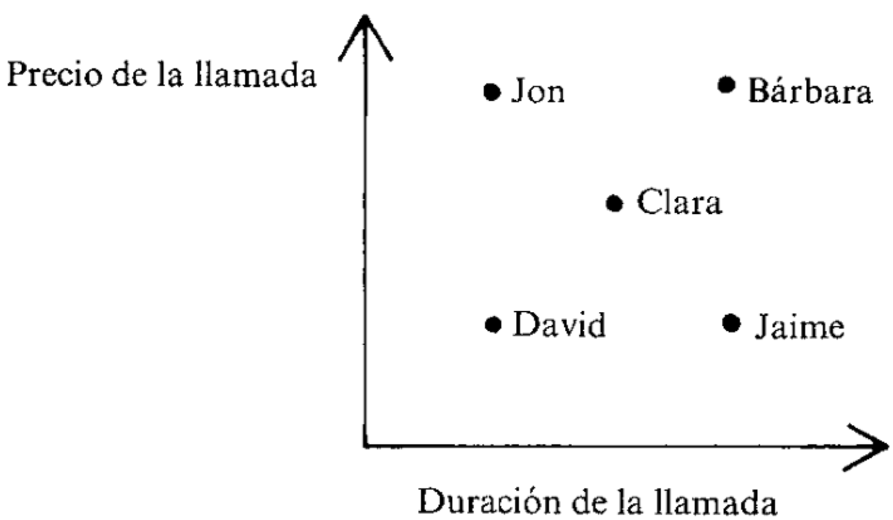
- ¿Qué otros aspectos podríamos relacionar en este grupo de persona?

  ____

  ____

2. Llamadas telefónicas

Un fin de semana. Cinco personas hicieron llamadas telefónicas a varias partes del país. Anotaron el precio de sus llamadas y el tiempo que estuvieron en el teléfono en la siguiente gráfica:



- ¿Quién realizó la llamada de mayor distancia? Explica con cuidado tu razonamiento.
- ¿Quién realizó una llamada de menor distancia? Explícalo.
- ¿Quiénes hicieron llamadas a la misma distancia aproximadamente? Explícalo de nuevo.

3. Observa la siguiente gráfica. Cada uno de los puntos corresponde a un ticket de parking distinto.

- ¿Cuál de los tickets corresponde a la estancia en el parking más larga? ¿Cuál corresponde al coste más elevado?
- ¿Todos los tickets corresponden a un mismo parking y con una misma tarifa? ¿Cuáles sí y cuáles no?
- Explica la información que se puede obtener al interpretar la gráfica.

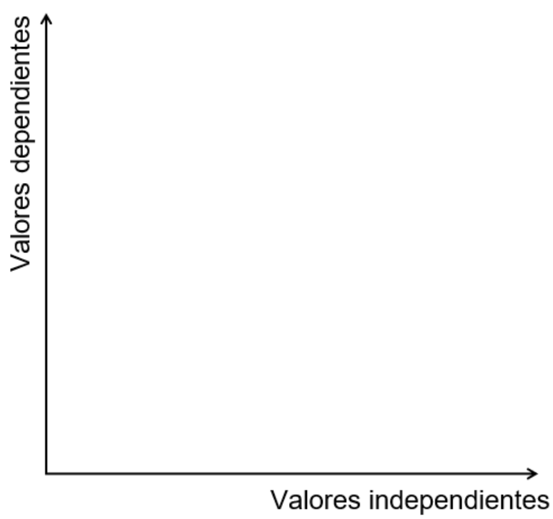
4. En una estación de combustible de la localidad, el litro de gasolina tiene un precio de B/. 0.74. A partir de esta información, determine los valores de las siguientes compras:

Litros de gasolina	Valor de la compra
2	
5,5	
9	
7,5	
6	

Como observas, existe una correspondencia entre dos conjuntos, el del litro de gasolina y el del valor de la compra. ¿Cuál conjunto es dependiente del otro? ¿El del litro de gasolina del valor de la compra, o viceversa?

Localiza los puntos que corresponda a cada pareja de valores, en un sistema de ejes como los mostrados en las actividades anteriores.

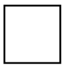
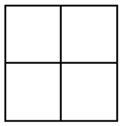
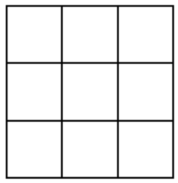
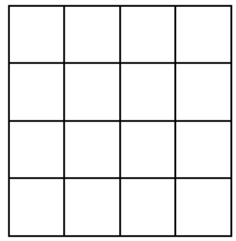
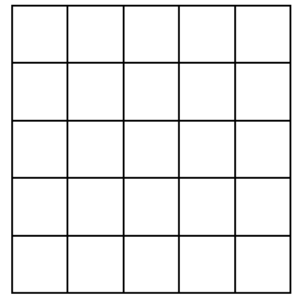
Utiliza el eje horizontal para los valores del conjunto independiente y el eje vertical para los del dependiente.



¿Qué relación encuentras entre los puntos localizados?

5. Relación entre la longitud del lado de un cuadrado y su área.

Observa las figuras y completa la tabla:

a.  ***b.***  ***c.***  ***d.***  ***e.*** 

.

Número de unidades en el lado	Área del cuadrado
1	
2	
3	
4	
5	

Una vez completada la tabla, localiza los puntos y únelos a través de una línea utilizando tu pulso. Recuerda colocar los valores dependientes e independientes en los ejes recomendados.

¿Al unir los puntos, que forma obtiene la gráfica? Explica su significado.

6. Con la contratación de 15 obreros, se construyó un pequeño edificio en 20 meses. ¿Cuántos obreros tenían que haberse contratado, para construir el edificio en 15, 10, 5 y 4 meses, respectivamente?

Número de obreros	Número de meses
15	20
	15
	10
	5
	4

Una vez completada la tabla, localiza los puntos y únelos a través de una línea utilizando tu pulso. Recuerda colocar los valores dependientes e independientes en los ejes recomendados.

¿Qué forma tiene la gráfica? Explica su significado.

7. Tenemos cuatro situaciones expresadas verbalmente y cuatro gráficas. Relaciona cada frase con una gráfica, explicando el porqué de tu elección.

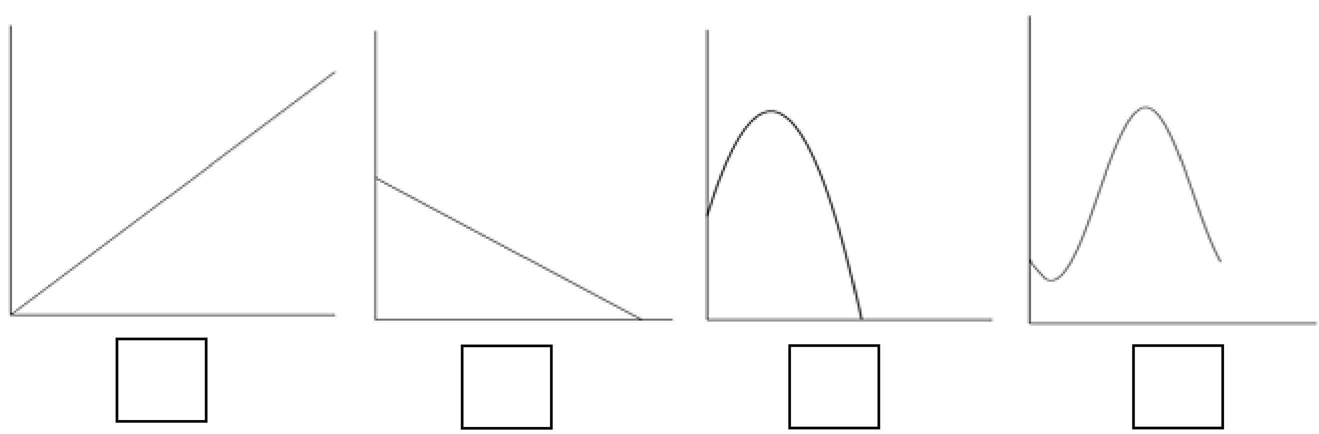
A. ¿Cómo varía la altura de una pelota desde que la lanzamos al aire verticalmente hasta que llega al suelo?

B. ¿Cómo varía la temperatura durante un día en la cima de una montaña, empezando a las 12 de la noche?

C. ¿Cómo varía el coste de la gasolina según la cantidad de litros que ponemos?

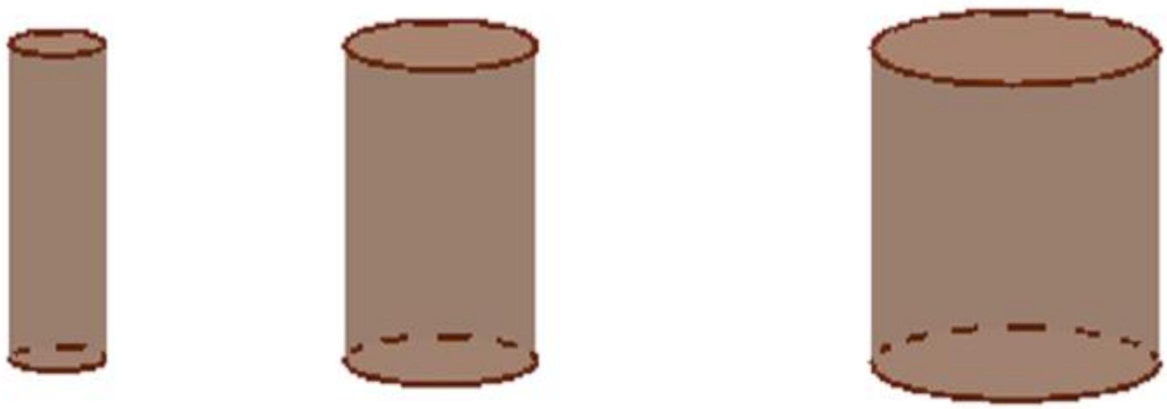
D. ¿Cómo varía la altura de una vela a medida que va consumiéndose?

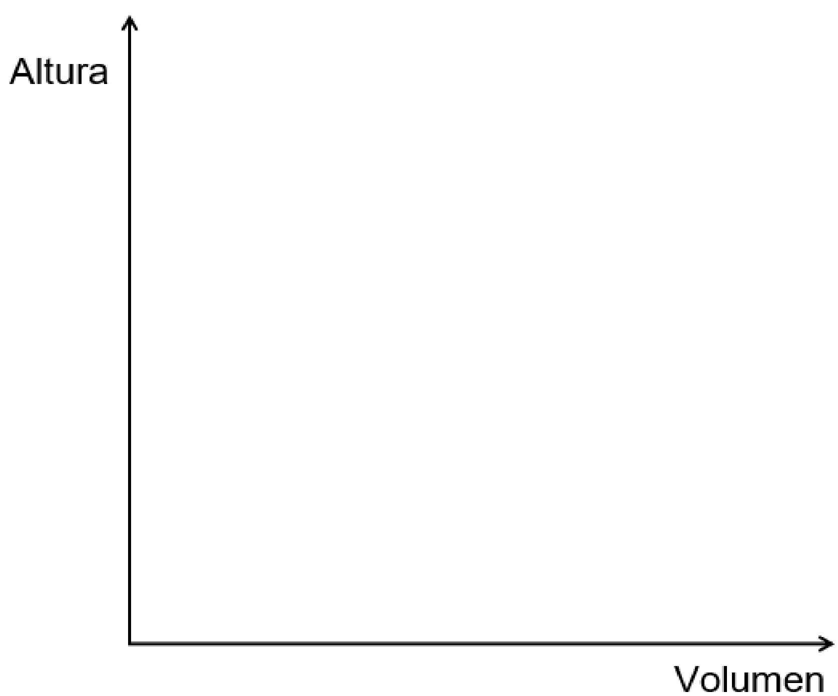
Coloca en el recuadro debajo de cada gráfica, la letra que corresponda a cada situación:



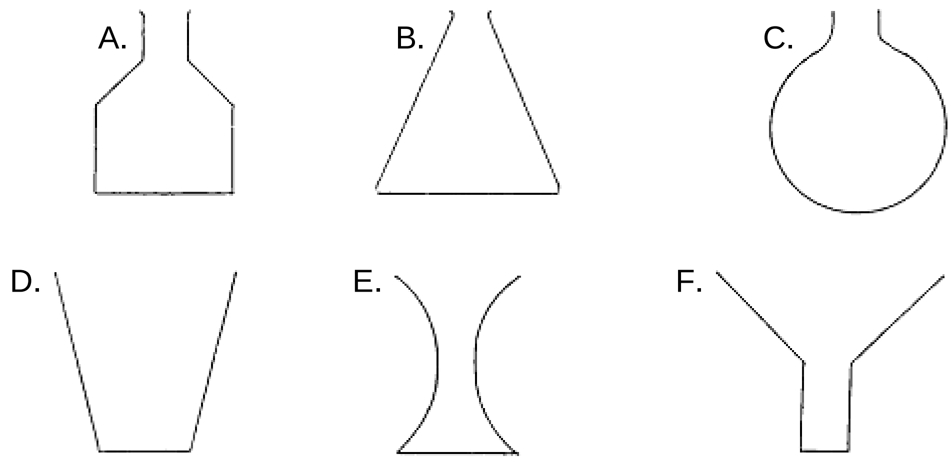
8. Llenando botellas.

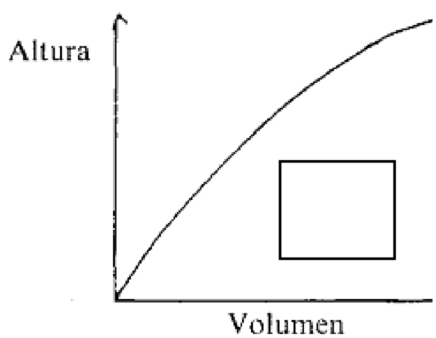
A. Tenemos tres botellas de forma cilíndrica, todas con la misma altura pero distinta base. Empezamos a llenar las botellas con agua y queremos representar en un mismo gráfico la variación de la altura de acuerdo con la cantidad de agua (volumen) introducido en cada una de las botellas. Dibuja en unos mismos ejes de coordenadas el gráfico que corresponde a cada botella.

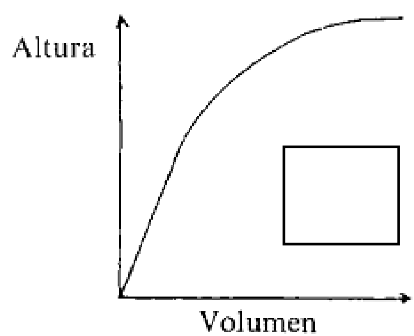


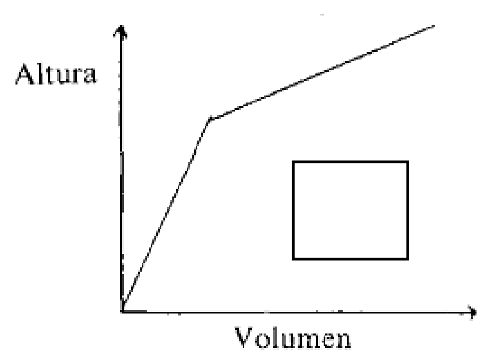


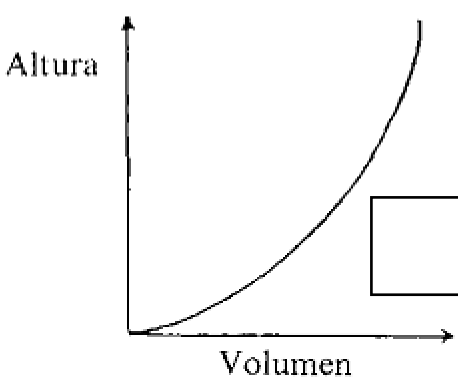
B. Aquí hay 6 frascos y 9 gráficas. Elige la gráfica correcta para cada frasco, escribiendo en el recuadro la letra correspondiente. Dibuja cómo deberían se los frascos que corresponden a las tres gráficas sobrantes.

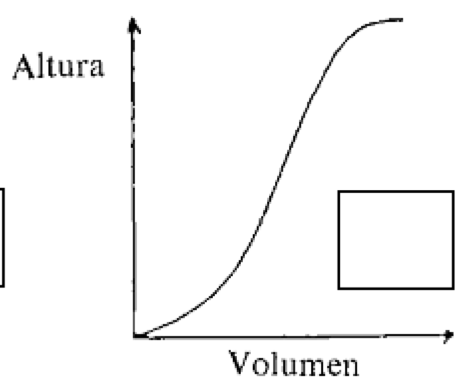


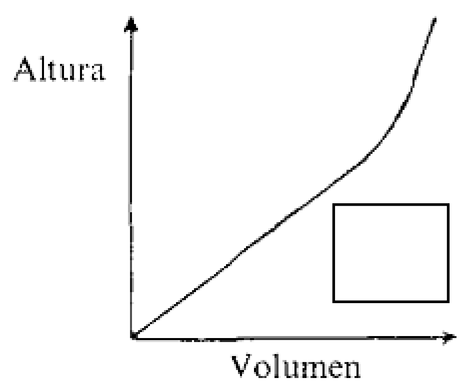


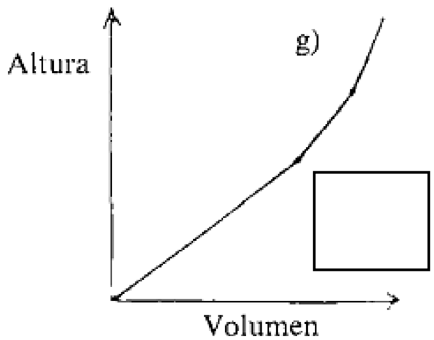


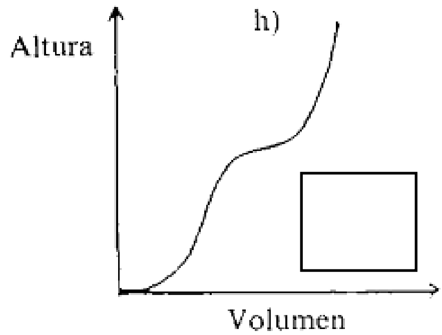


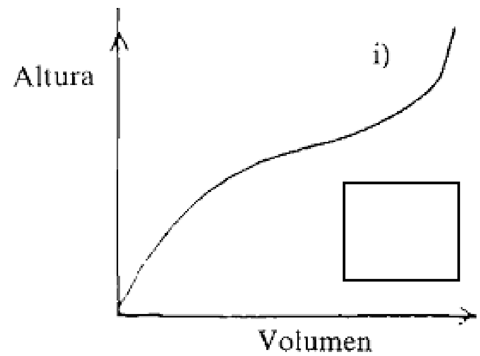












Como haz visto, las relaciones entre dos conjuntos son variadas y generan diversas representaciones gráficas. Líneas rectas, curvas y demás formas.

Estas relaciones también generan modelos matemáticos (Ecuaciones) y dieron origen, a uno de los conceptos y herramienta más fundamentales, el cual tiene aplicación en diferentes contextos, como el científico y el comercial. Este concepto se conoce como ***Función.***

En los siguientes apartados, conocerás sobre los modelos matemáticos, la definición formal de este concepto-herramienta llamada función, otras formas gráficas y demás aspectos que se generan de estas relaciones.

6.1 Modelos matemáticos

Determinemos el modelo matemático de algunas de las actividades que hemos desarrollado:

A) La venta y compra de gasolina en una determinada estación.

El valor de la compra depende de los litros de gasolina. Lo que implicó que le correspondiera el **eje vertical** a los valores de **compra** y al **eje horizontal** a los **litros** de gasolina.

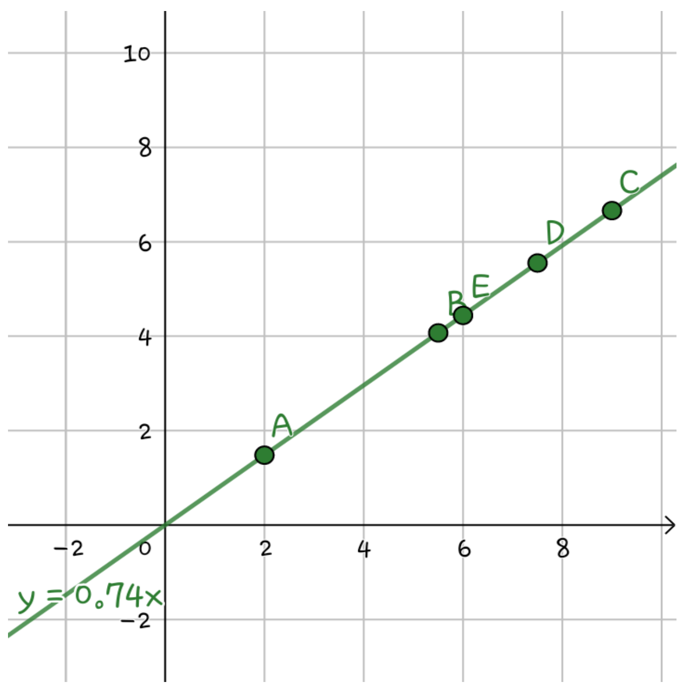
Consecuente con esto, designemos por la letra $y \leftrightarrow$ Los valores de compra

$X \leftrightarrow$ Los litros de gasolina

Lo siguiente es escribir en forma algebraica la operación pertinente para obtener el valor de la compra. Compra = 0,74 · Litros

Sustituyendo $y = 0{,}74\ x$

Si utilizamos la aplicación GeoGerba, para localizar los puntos y graficar la ecuación, obtendremos una representación como esta:



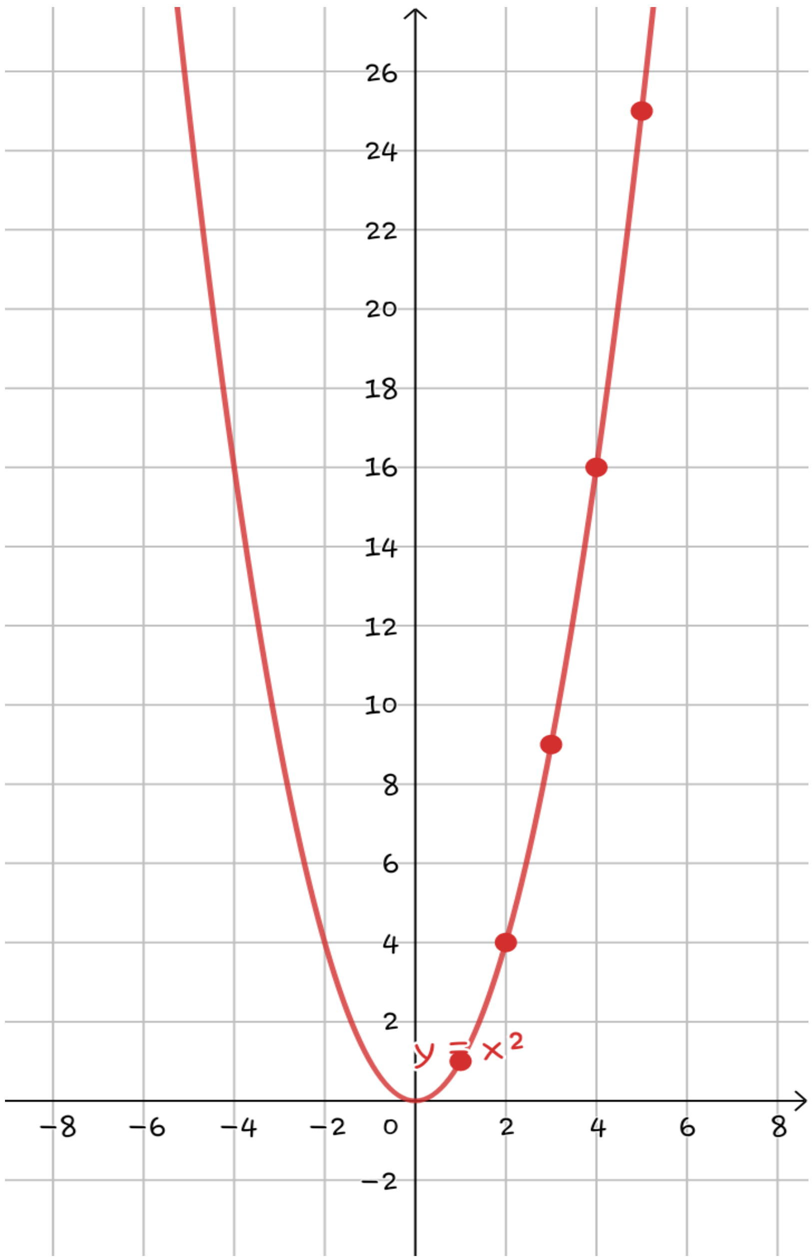
De esta manera, verificamos que los puntos pertenecen a la gráfica de la ecuación.

B) La relación entre el área de un cuadrado y la longitud de su lado

La fórmula de área para un cuadrado es $A = l^2$.

El área depende de la longitud del lado. Por lo tanto, el modelo matemático en términos de *x* e *y* es:

$$y = x^2$$



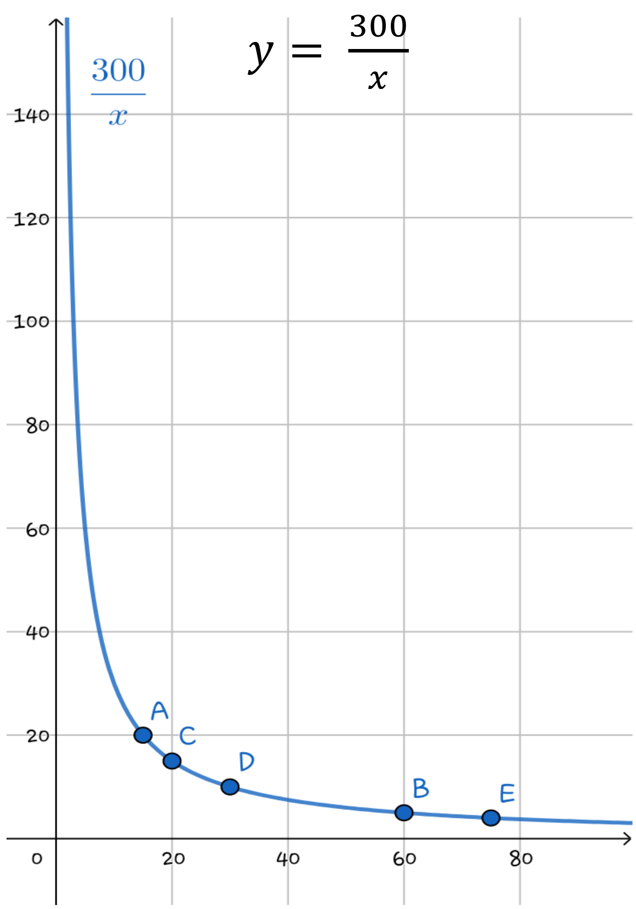
C) La relación en el tiempo de construcción y el número de obreros.

Número de obreros	Número de meses
15	20
20	15
30	10
60	5
75	4

Como se observa, existe una relación inversamente proporcional entre el tiempo de construcción y el número de obreros.

La constante de proporcionalidad es 300 y se obtiene multiplicando cualquiera de las parejas de números.

El tiempo de construcción depende del número de obreros y por presentarse una relación inversa el modelo matemático es:

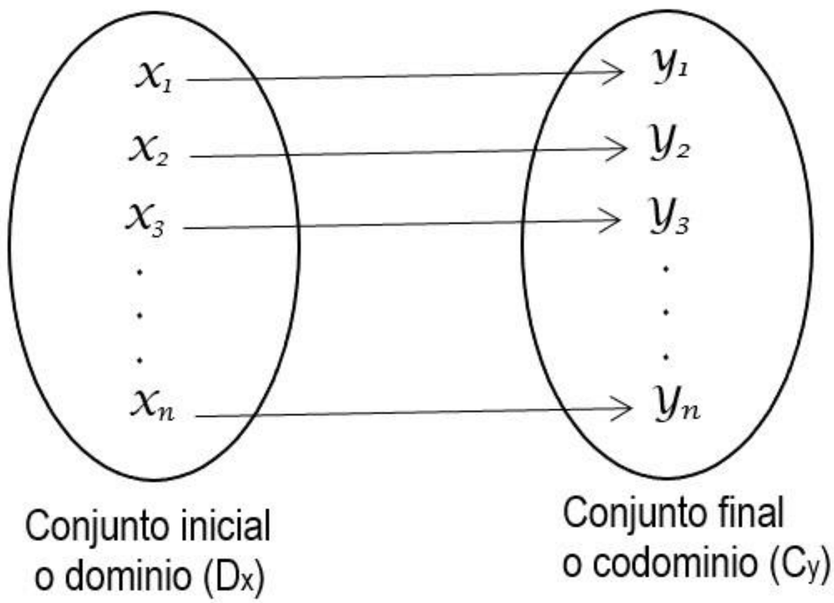


De lo que haz observado hasta hora.

¿Qué entiendes por función?

6.2 Definición

Una función $y = f(x)$, es una relación entre dos conjuntos de forma que a cada elemento del conjunto inicial (variable independiente x) le corresponda un **único** elemento del conjunto final (variable dependiente y).



7. Dominio y codominio a partir de la gráfica

Toda función consta de un dominio y un codominio, cuyos elementos se generan del modelo matemático, que representa la relación entre las variables independiente y dependiente. La determinación tanto del dominio como el codominio, puede considerarse como una competencia básica en cualquier curso de precálculo. Por lo tanto, determinarlos desde el plano gráfico, convierte el curso más accesible y amigable para nuestros estudiantes, produciendo mejores experiencias de aprendizaje.

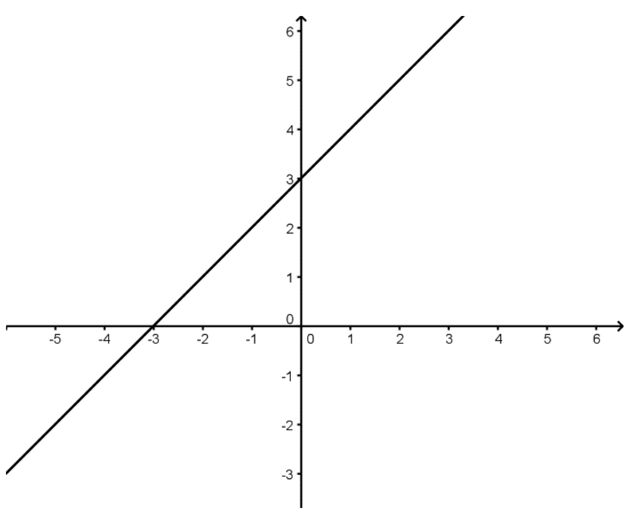
Duración: 5 días	
Objetivo	Observaciones
• Determina si una gráfica corresponde o no, a una función. • Determina a partir de la gráfica de una función el dominio y el codominio.	Para determinar si una gráfica corresponde a una función o no, aplicamos el criterio de la recta vertical.

Representación gráfica

Tomando los valores x como abscisas y los correspondientes valores y como ordenadas se obtienen una serie de puntos en el plano cartesiano. El conjunto formado por todos estos puntos originará una línea recta o curva, que recibe el nombre de gráfica de la función.

¿Cómo determinamos el dominio y codominio de una función a partir de su gráfica?

Ejemplo 1: Una función f(x) es graficada y se obtiene la siguiente representación:



¿Cómo determinar el dominio y codominio a partir de la gráfica?

Tracemos segmentos perpendiculares del eje x a un punto de la gráfica como se observa en la Fig. 3.

¿Cuántos valores del eje **x** guardan relación con la gráfica?

La gráfica corresponde a una recta y las rectas se extienden hacia el infinito en ambos sentidos.

Por lo tanto, $D_x = \mathbb{R}$.

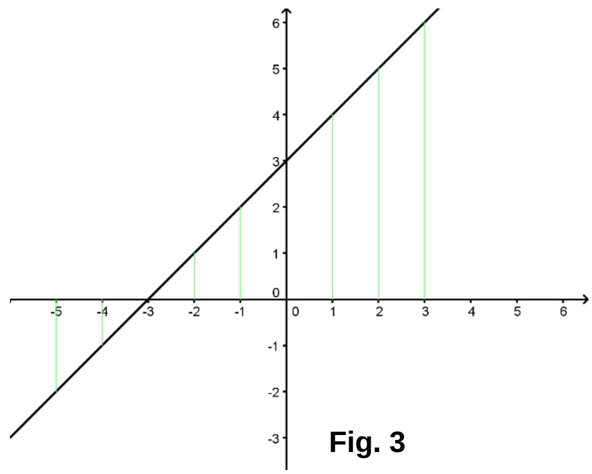
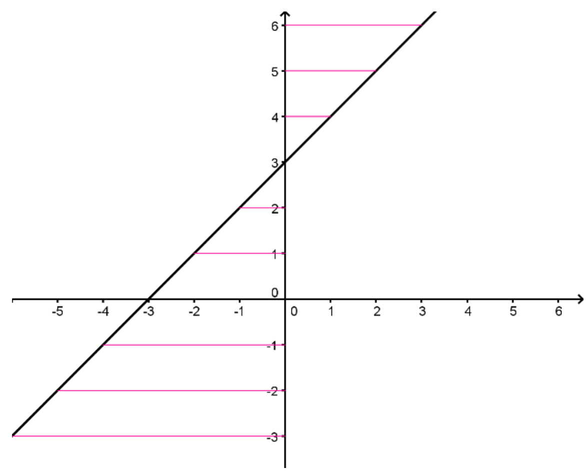


Fig. 3

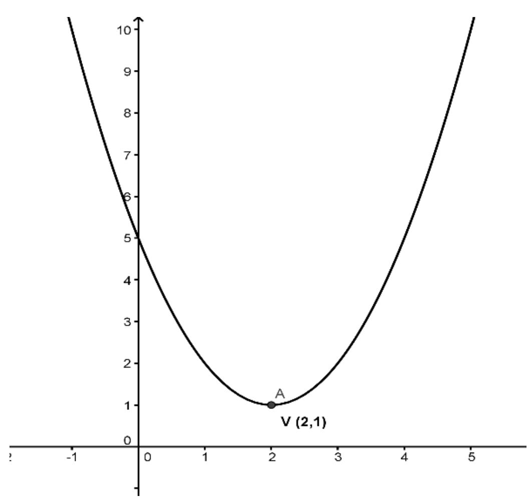
De igual forma apliquemos la misma técnica para determinar el codominio.

¿Cuántos valores del eje **y** guardan relación con la gráfica?

Nuevamente podemos observar que todos sus valores. Por lo tanto, $C_y = \mathbb{R}$.

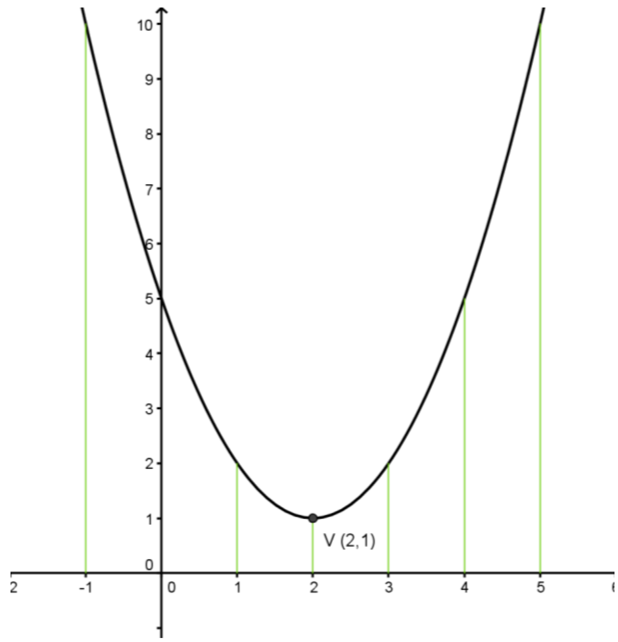


Ejemplo 2: Una función f(x) es graficada y se obtiene la siguiente representación:



La gráfica en este caso resulta una parábola con vértice (2, 1). Aplicando la técnica anterior tenemos lo siguiente:

Como toda parábola se abre hacia el infinito, todos los valores de eje x se relacionan con la gráfica. Por lo tanto, $D_x = \mathbb{R}$.



Como podemos observar en la Fig. 7, los valores del eje y que se relacionan con la gráfica, van de 1 hacia arriba. Por lo tanto, $C_y = [1,\ \infty)$.

Lo otro que se observa, es que los valores del eje y > 1 se relacionan con dos puntos de la gráfica, lo que implica que a los y > 1 les corresponden dos valores del eje x, relación que cumple con la definición de función.

¿Por qué 

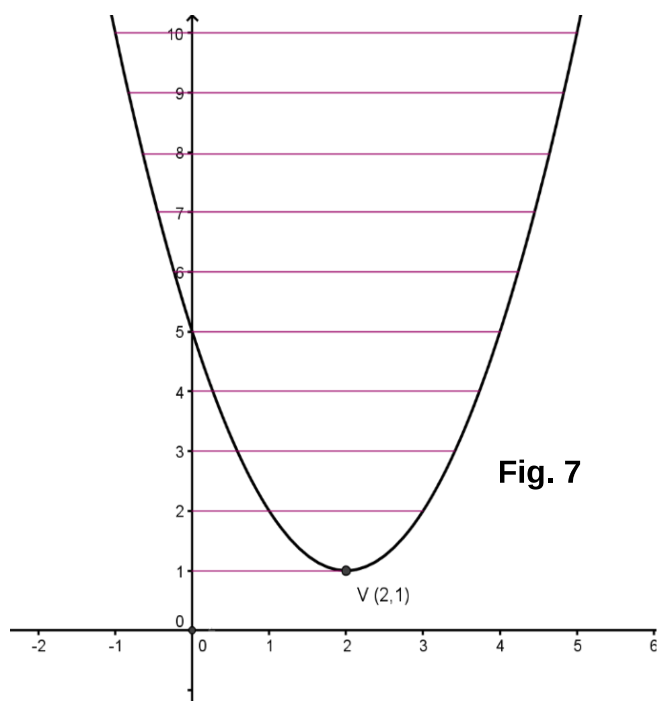
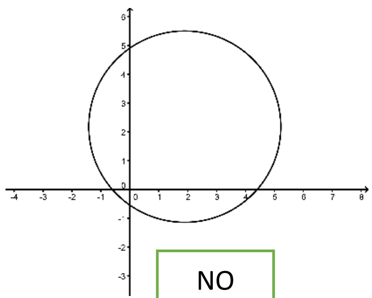


Fig. 7

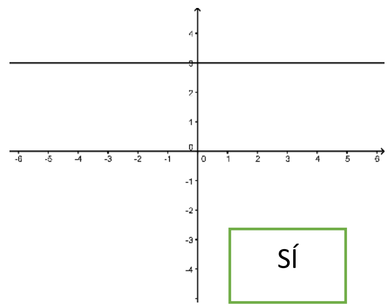
Observación: La finalidad de compartir esta técnica, no es para que se aplique de igual forma, sino más bien es una orientación para determinar tanto el dominio como el codominio a través de la visualización.

Ejercicios resueltos

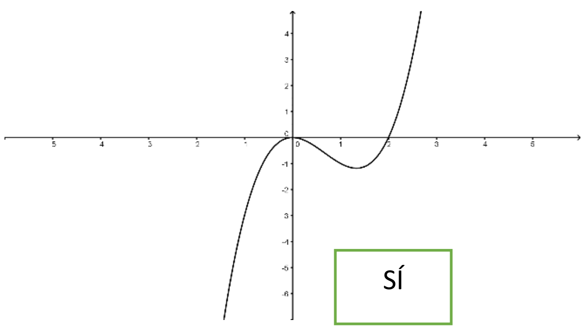
A. Identifica cuales de las siguientes gráficas corresponden a una función. Escribe sí o no en el respectivo recuadro:



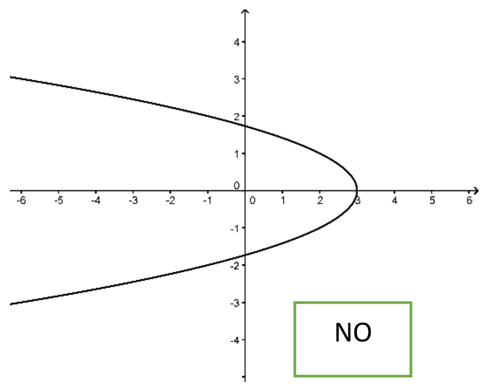
NO



SÍ

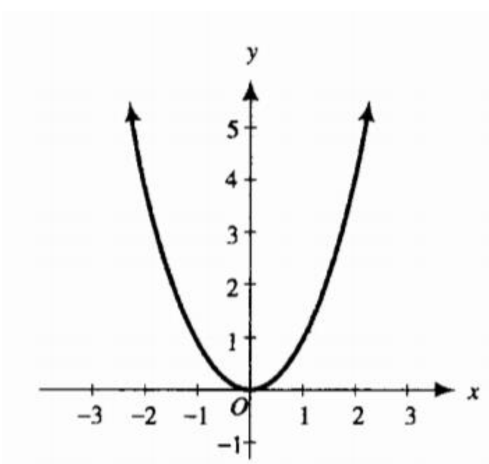


SÍ



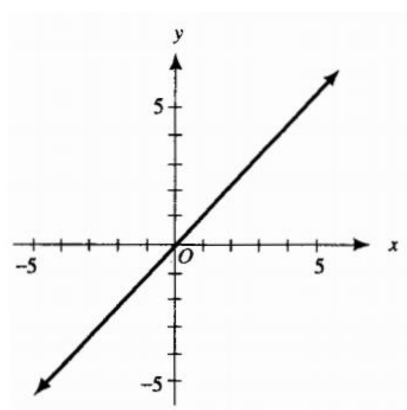
NO

B. Determina el dominio y el codominio a partir de la información gráfica:



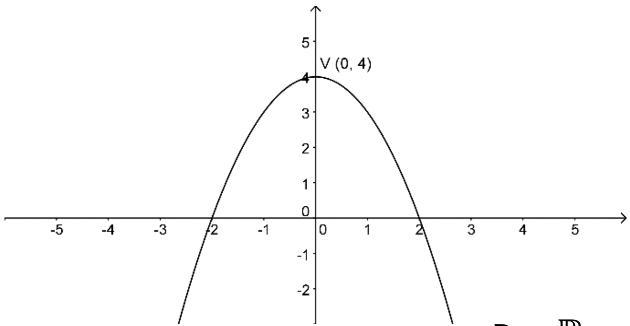
$D_x = \mathbb{R}$

$C_y = [0, \infty)$



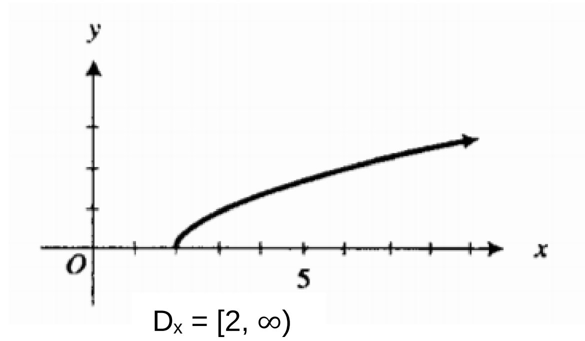
$D_x = \mathbb{R}$

$C_y = \mathbb{R}$



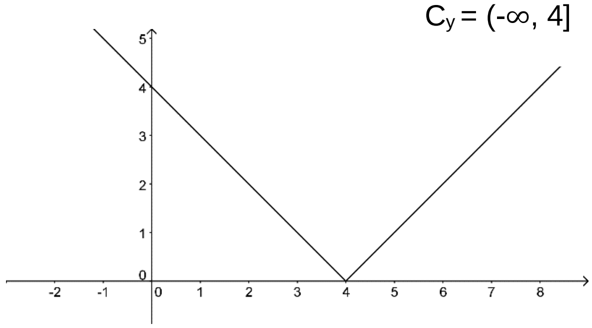
$D_x = \mathbb{R}$

$C_y = (-\infty, 4]$



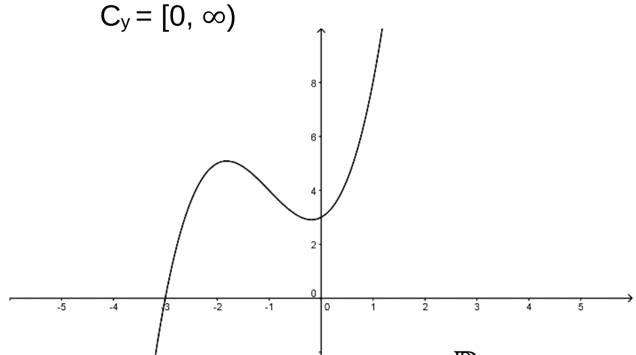
$D_x = [2, \infty)$

$C_y = [0, \infty)$



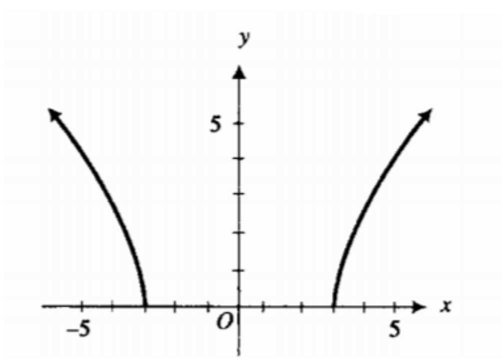
$D_x = \mathbb{R}$

$C_y = [0, \infty)$



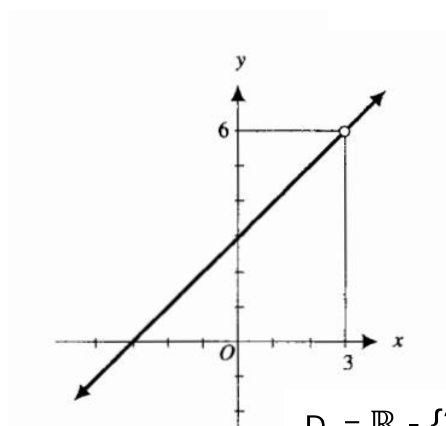
$D_x = \mathbb{R}$

$C_y = \mathbb{R}$



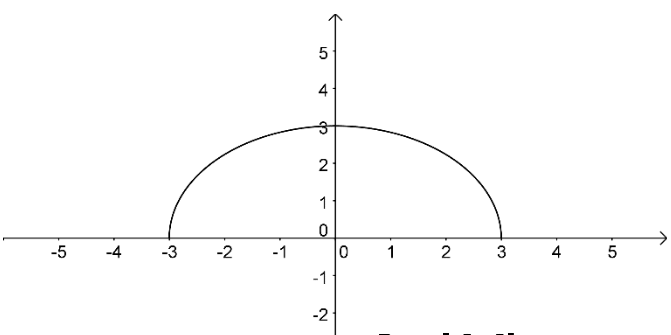
$D_x = (-\infty, -3] \cup [3, \infty)$

$C_y = [0, \infty)$



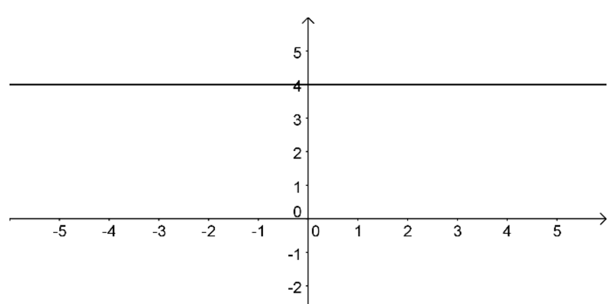
$D_x = \mathbb{R} - \{3\}$

$C_y = \mathbb{R} - \{6\}$



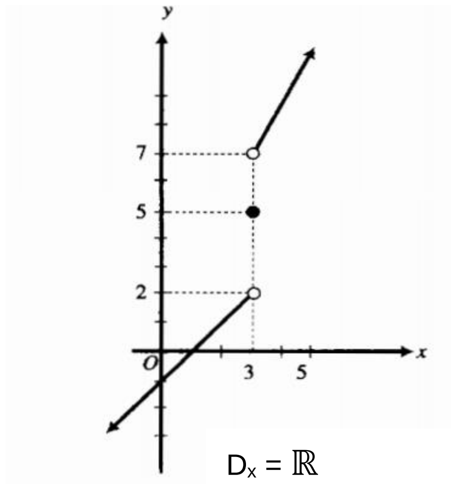
$D_x = [-3, 3]$

$C_y = [0, 3]$



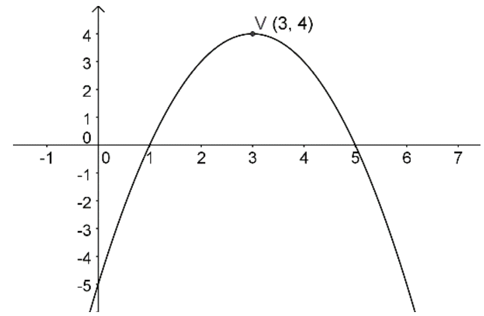
$D_x = \mathbb{R}$

$C_y = \{4\}$



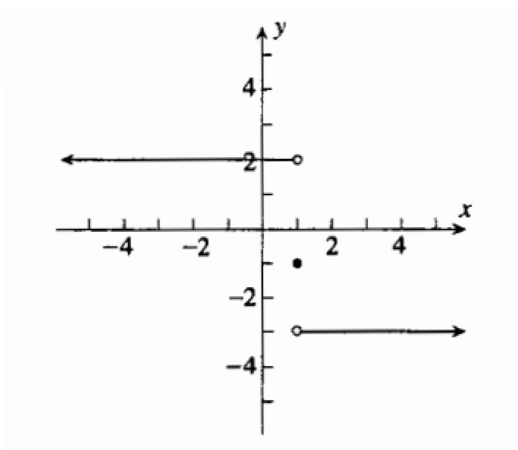
$D_x = \mathbb{R}$

$C_y = (-\infty, 2) \cup \{5\} \cup (7, \infty)$



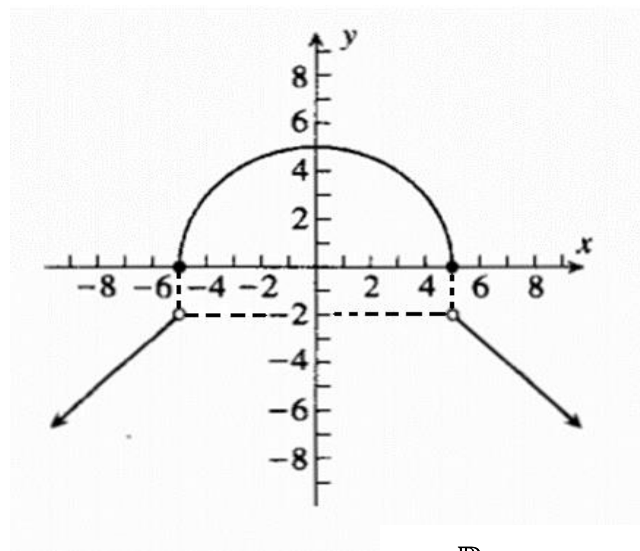
$D_x = \mathbb{R}$

$C_y = (-\infty, 4]$



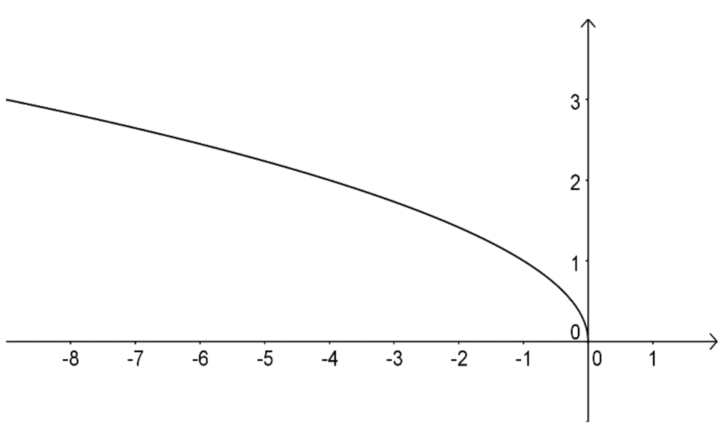
$D_x = \mathbb{R}$

$C_y = \{-3, -1, 2\}$



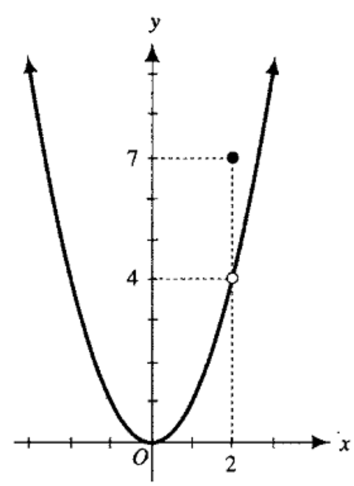
$D_x = \mathbb{R}$

$C_y = (-\infty, -2) \cup [0, 5]$



$D_x = (-\infty, 0]$

$C_y = [0, \infty)$

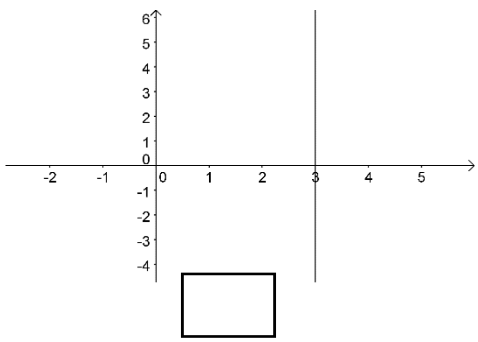
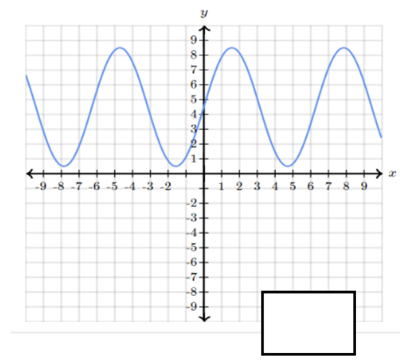
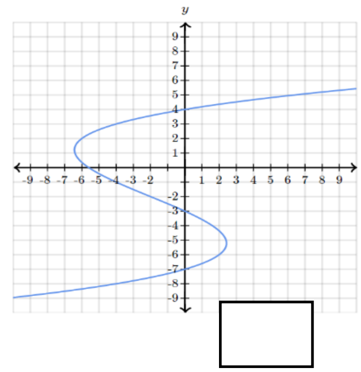
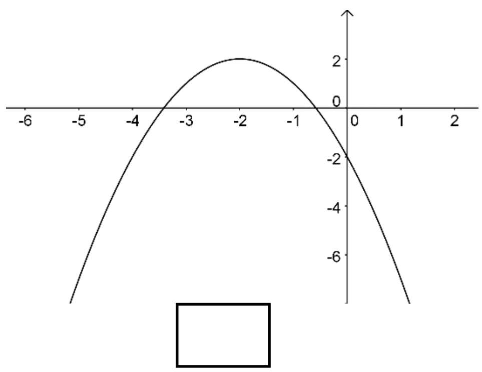
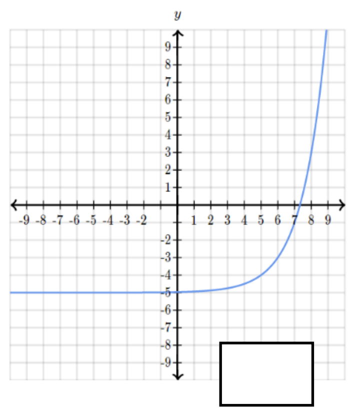
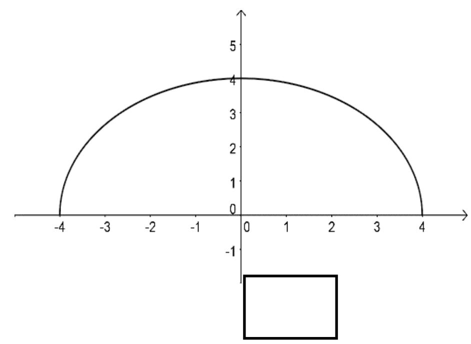


$D_x = \mathbb{R}$

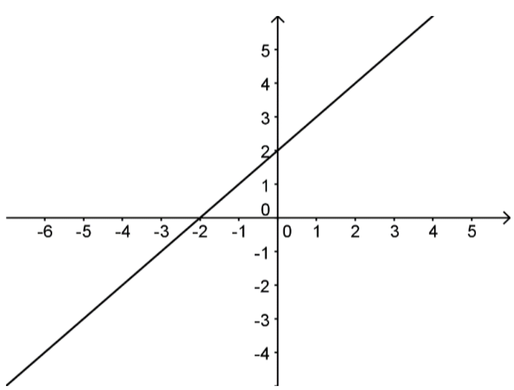
$C_y = \mathbb{R}^+ = [0,\infty)$

Actividad de afianzamiento_1

A. Identifica cuales de las siguientes gráficas corresponden a una función.   Escribe sí o
   no en el respectivo recuadro:

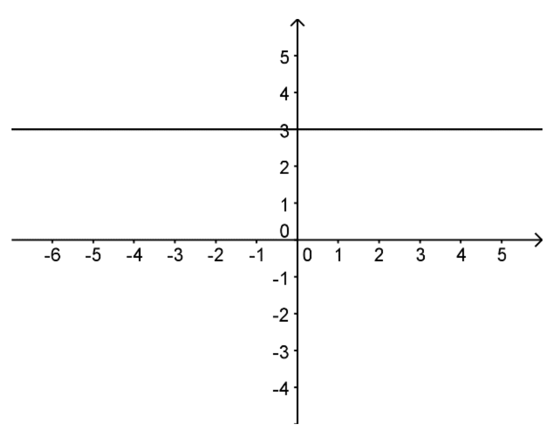







B. Determina el dominio y el codominio a partir de la información gráfica:



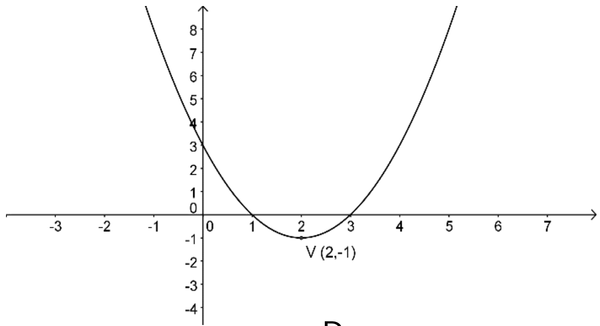
D_x =

C_y =



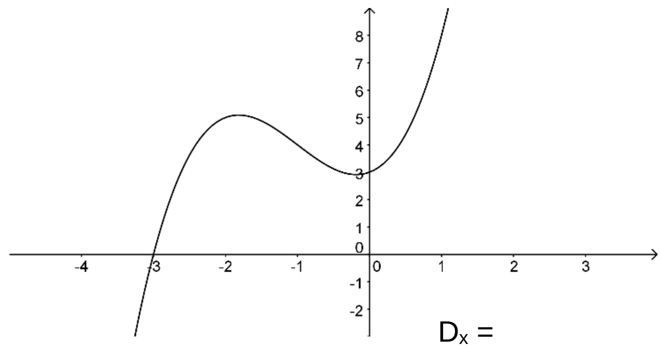
D_x =

C_y =



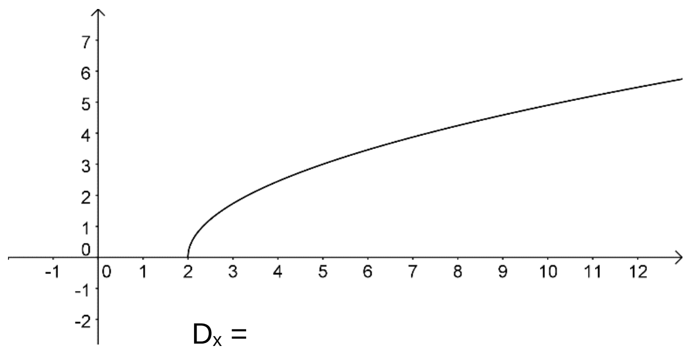
$D_x =$

$C_y =$



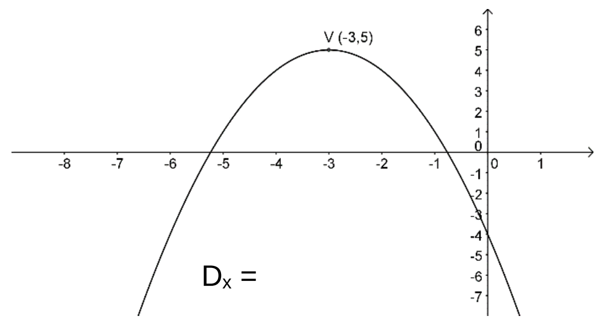
$D_x =$

$C_y =$



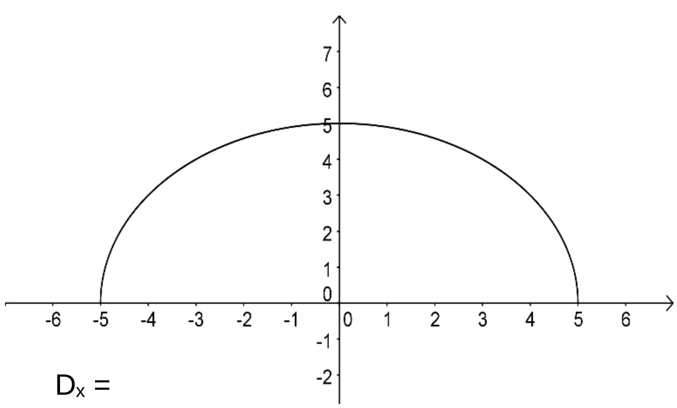
$D_x =$

$C_y =$



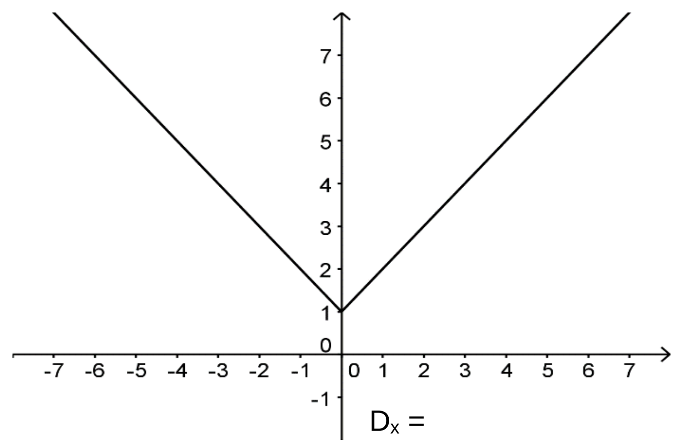
$D_x =$

$C_y =$



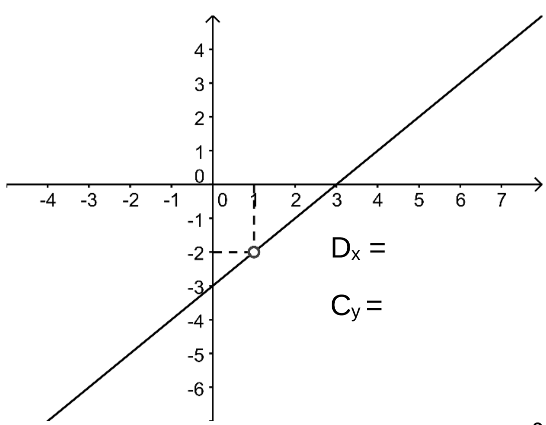
$D_x =$

$C_y =$



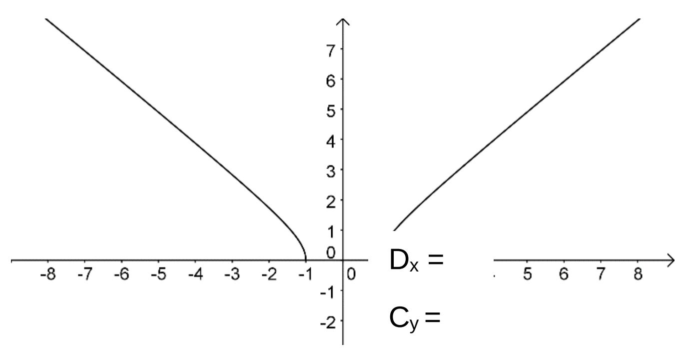
$D_x =$

$C_y =$



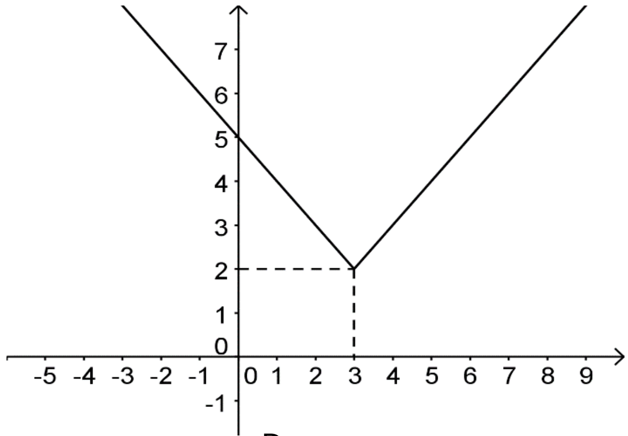
$D_x =$

$C_y =$



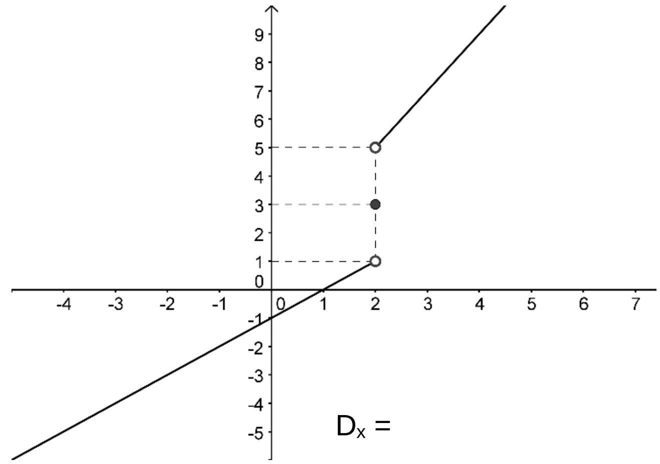
$D_x =$

$C_y =$



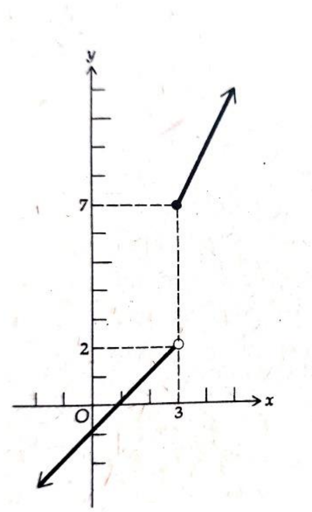
$D_x =$

$C_y =$



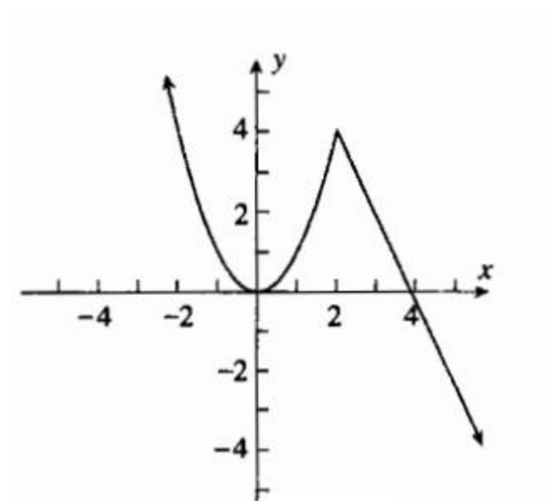
$D_x =$

$C_y =$



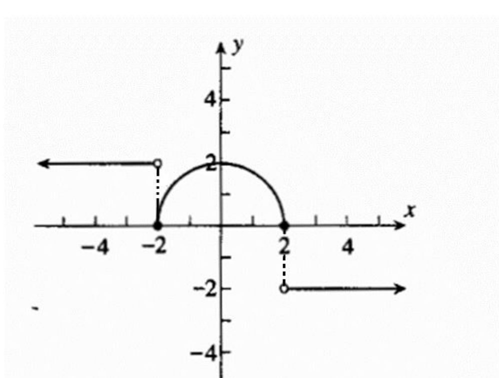
$D_x =$

$C_y =$



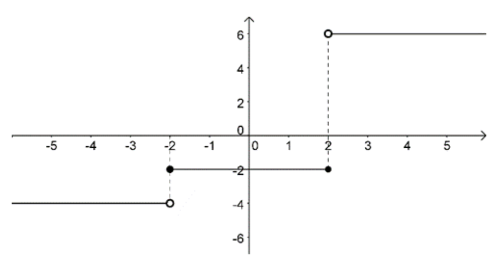
$D_x =$

$C_y =$



$D_x =$

$C_y =$



$D_x =$

$C_y =$

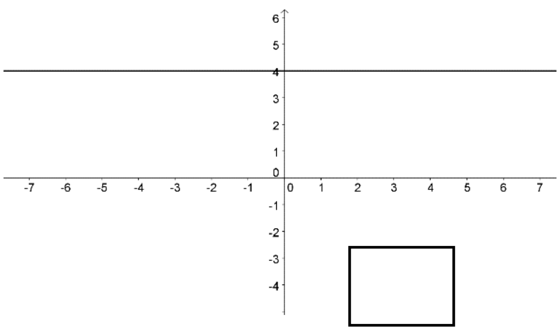
Parcial 1

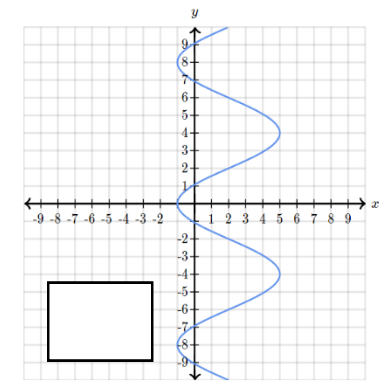
Fecha:____________________

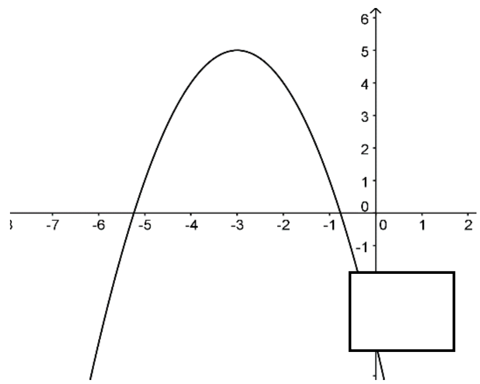
12°___ Total de puntos: 36

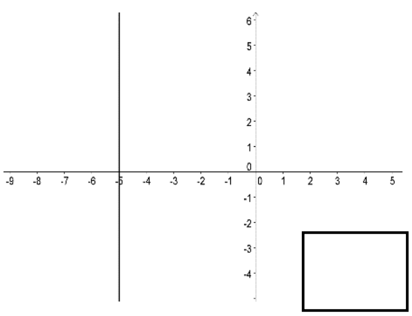
Estudiante:___________________ Puntos obtenidos:_____

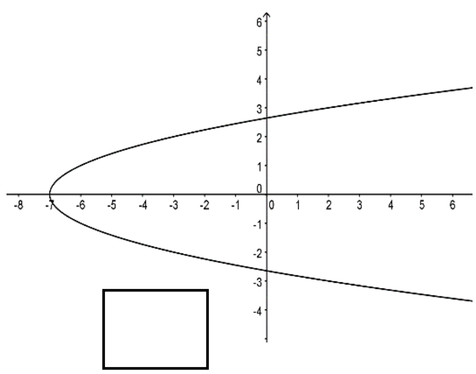
I_ Identifica cuales de las siguientes gráficas corresponden a una función. Escribe sí o no en el respectivo recuadro: (12 ptos.)

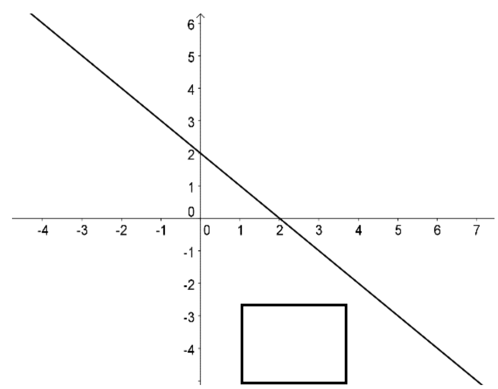




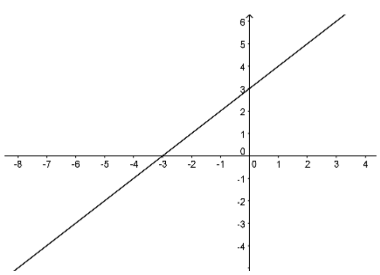






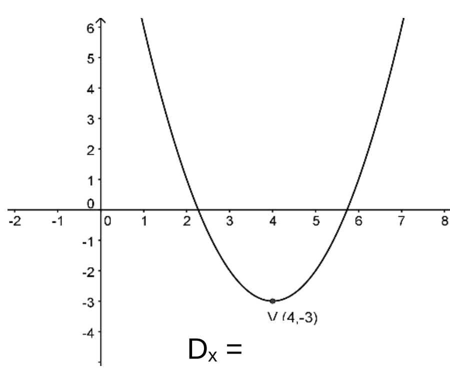


II_Determina el dominio y el codominio a partir de la información gráfica:
(24 ptos.)



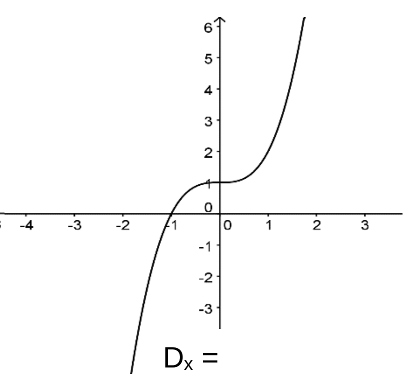
$D_x =$

$C_y =$



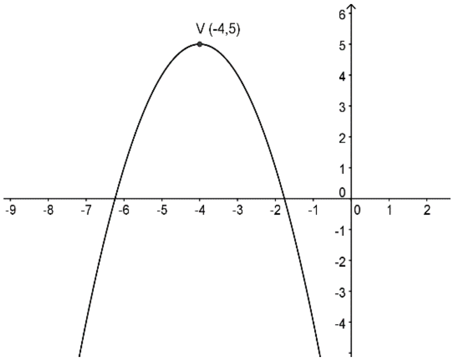
$D_x =$

$C_y =$



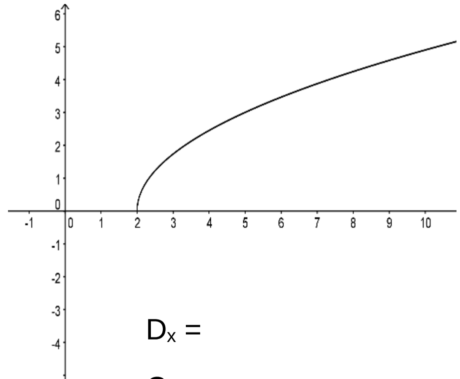
$D_x =$

$C_y =$



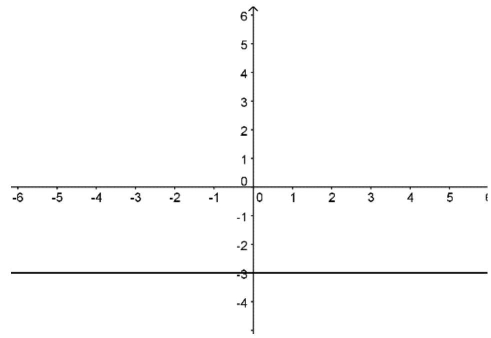
$D_x =$

$C_y =$



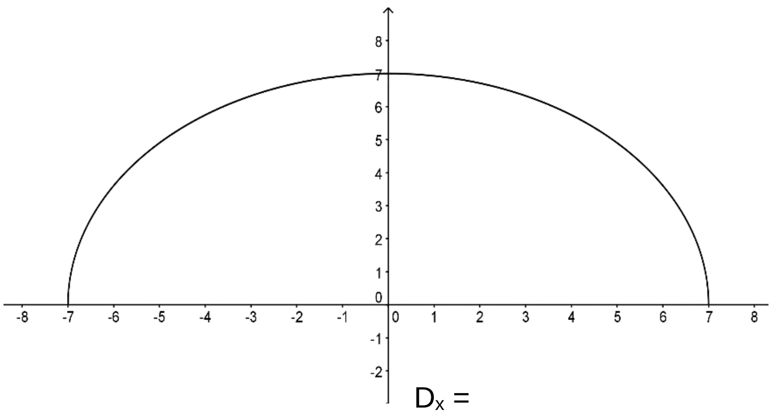
$D_x =$

$C_y =$



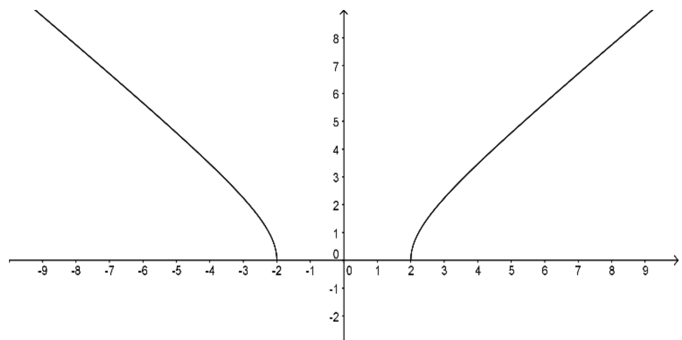
$D_x =$

$C_y =$



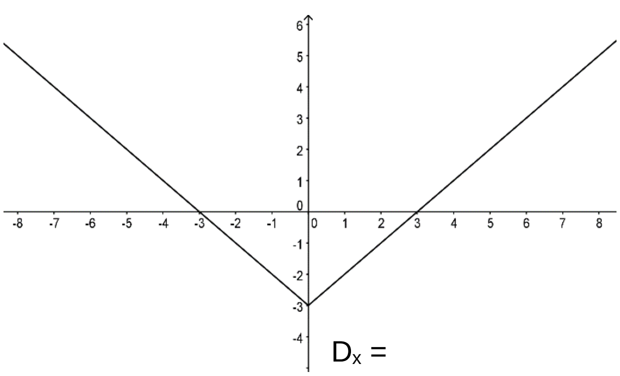
$D_x =$

$C_y =$



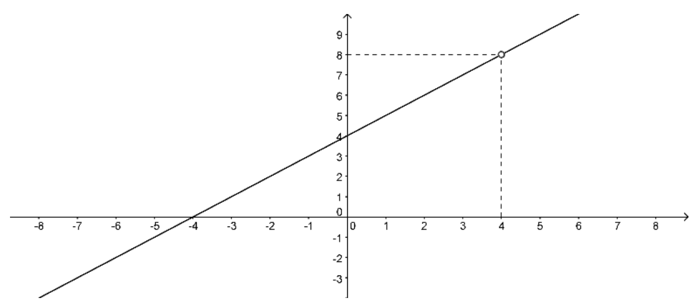
$D_x =$

$C_y =$



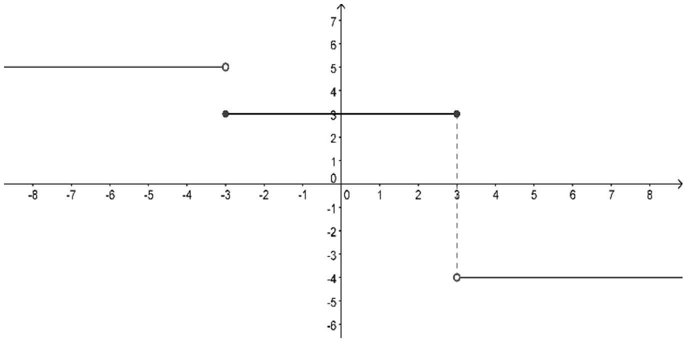
$D_x =$

$C_y =$



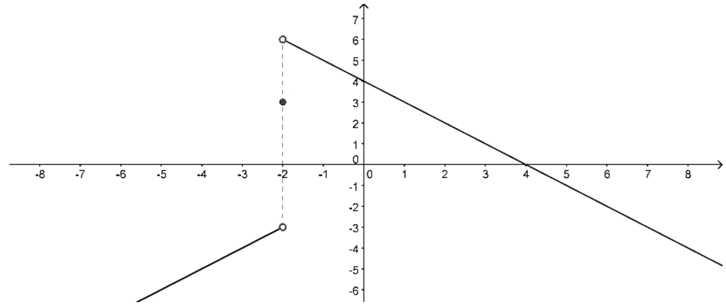
$D_x =$

$C_y =$



$D_x =$

$C_y =$



$D_x =$

$C_y =$

8. Función Lineal

Duración: 5 días	
Objetivo	Observaciones
• Grafica de forma manual y rápida, una función lineal $y = mx + b$, con $m = 1 \wedge b \neq 0$, sin efectuar cálculos. • Grafica de forma manual y rápida, una función lineal $y = mx + b$, con $m \neq 1$, $m \neq 0 \wedge b \neq 0$, determinando solo el corte en el eje de las abscisas x. • Reconoce que toda función lineal $y = mx + b$, con $m \neq 0$ implica un $D_x = C_y = \mathbb{R}$. • Reconoce que toda función lineal $y = mx + b$, con $m = 0 \wedge b \neq 0$ implica un $D_x = \mathbb{R}$, y un $C_y = b$.	Aunque los objetivos explicitan graficar sin o con un mínimo de cálculos previos, se debe enseñar y permitir la construcción de tablas de valores, de existir la necesidad por algún estudiante.

Las funciones lineales se representan gráficamente mediante rectas.

En la siguiente figura se representan gráficamente dos funciones lineales:

$$y = x + 1, \quad y = x + 3.$$

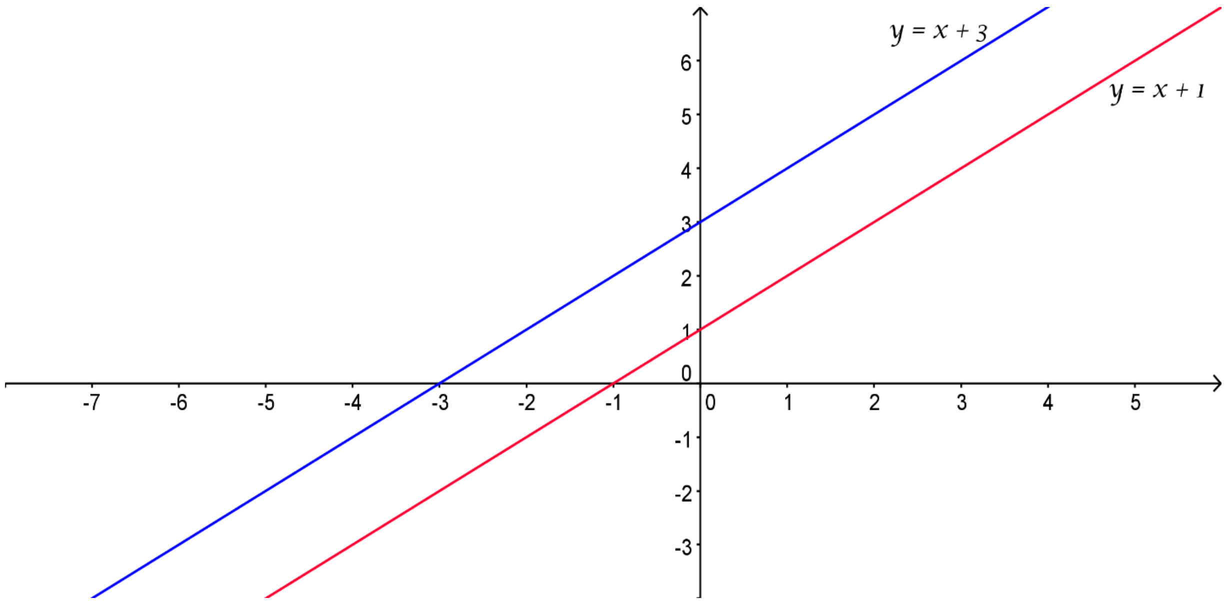


Fig. 1

Observa los detalles de la figura y responde lo siguiente:

¿Dónde corta $y = x + 1$ al eje y? ________

¿Dónde corta $y = x + 1$ al eje x? ________

¿Dónde corta $y = x + 3$ al eje y? ________

¿Dónde corta $y = x + 3$ al eje x? ________

A partir de estos datos, ¿Dónde crees que cortaría $y = x + 2$, ambos ejes?

Eje y en _____

Eje x en _____

Completa la figura de arriba y traza $y = x + 2$, $y = x + 4$, $y = x + 5$.

Observa las siguientes representaciones gráficas:

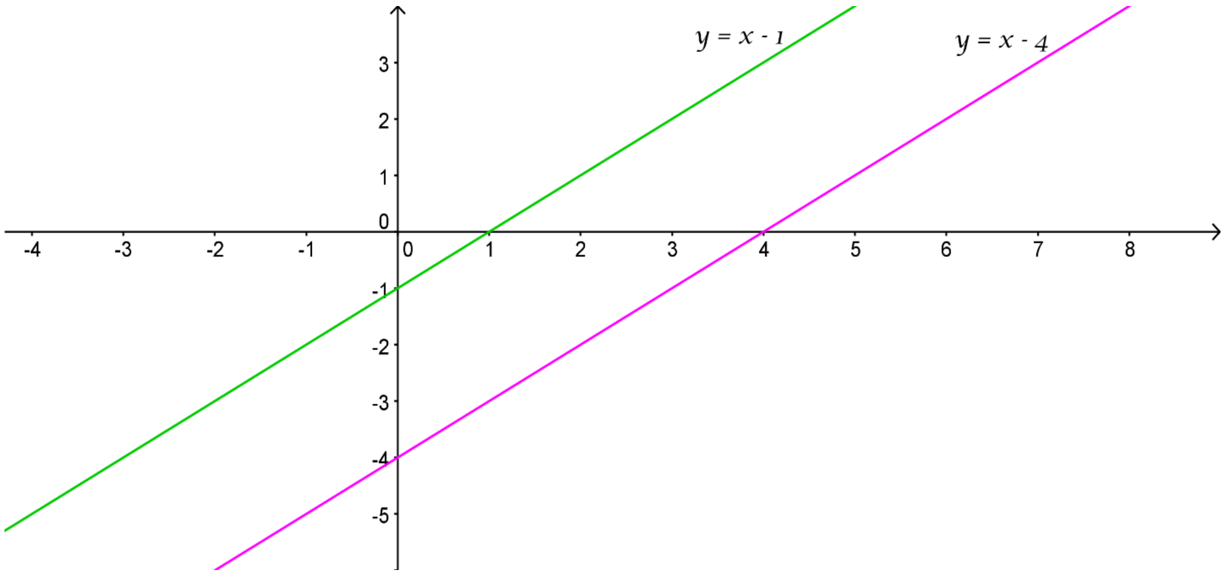
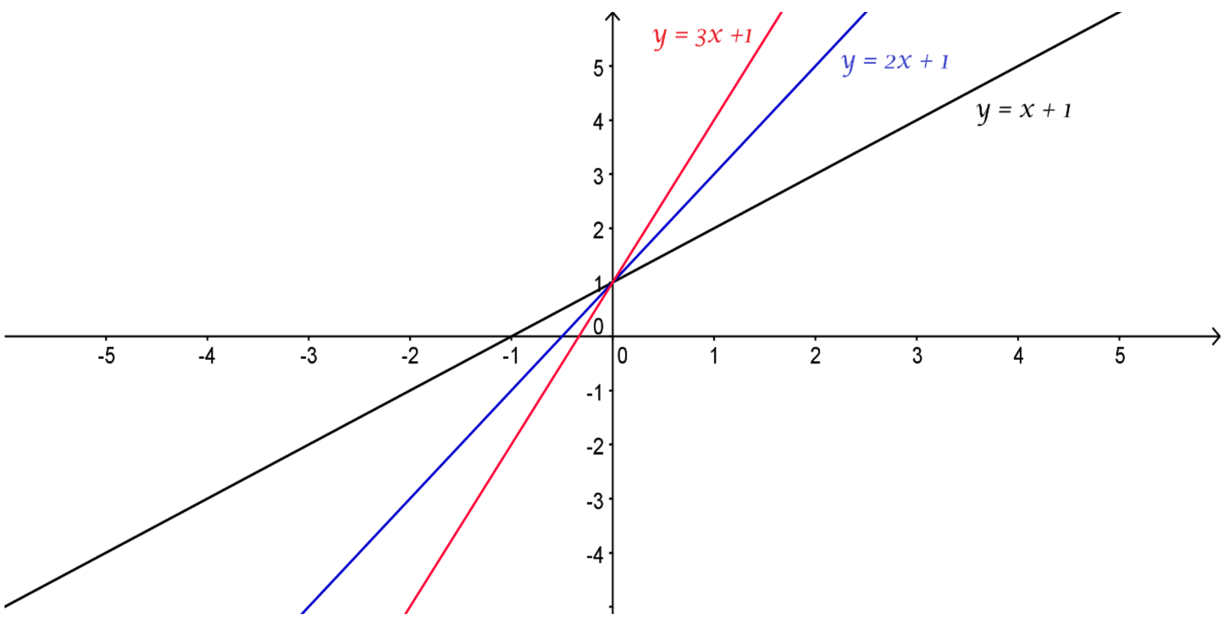


Fig. 2

Nuevamente determina donde cada una de las siguientes funciones, corta a los ejes, y traza en la misma figura. $y = x - 2,\quad y = x - 3,\quad y = x - 5$.

Observa la relación entre las siguientes rectas:

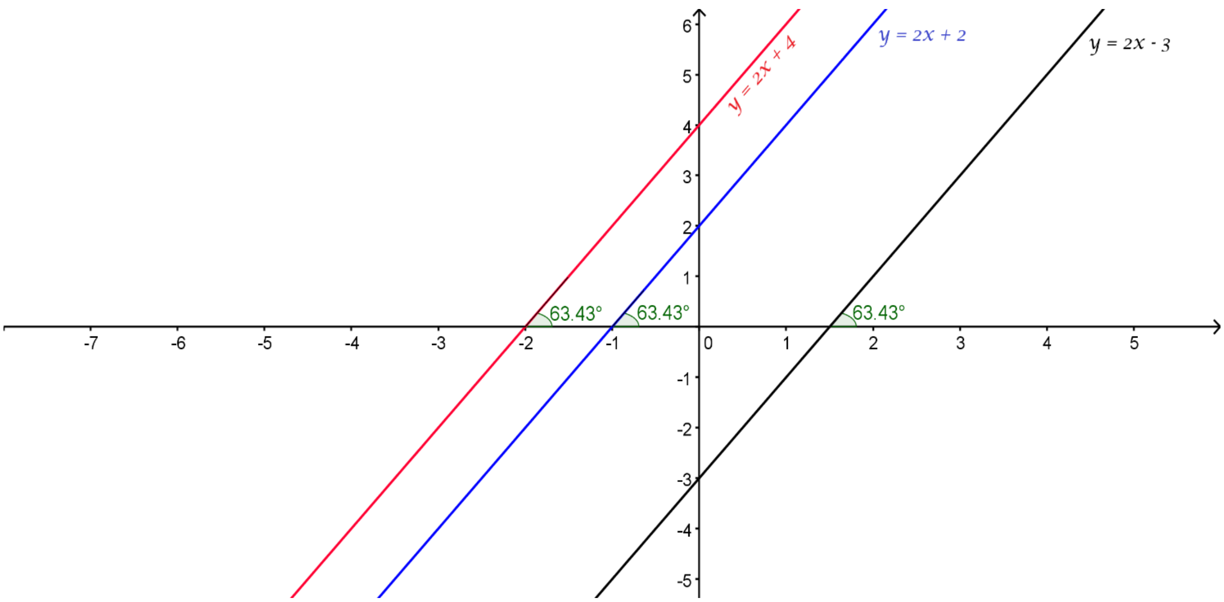


¿Qué tienen en común?

¿Qué sucede cuando el coeficiente de la variable independiente x aumenta?

Esta inclinación que se observa a medida que aumenta el coeficiente de la variable independiente x, se denomina pendiente de la recta y el valor independiente (en este caso 1) es el punto donde la recta interseca al eje y. Por lo tanto, la forma general de la función lineal es $y = mx + b$ ó $f(x) = mx + b$. Donde m es la pendiente y b el punto donde la recta interseca el eje y, conocido también como ordenada en el origen.

Observa el siguiente grupo de rectas:



¿Qué tienen en común?

¿Esta condición en qué las convierte?

En rectas pa-______-las.

Recapitulando, a partir de lo observado podemos determinar que una función $y = mx + b$, con $m = 1 \wedge b \neq 0$, interseca al eje y en b e interseca al eje x en -b, como se observa en las figuras 1 y 2.

Una función $y = mx + b$, con $m \neq 0$, $m \neq 1 \wedge b \neq 0$, interseca al eje y en b.
¿En qué punto intersecará al eje x?
Sencillo.

¿Cuál es el valor de la variable y, en el punto de intersección de la recta con el eje x?
Cero.
Por lo tanto, solo sustituimos este valor en la variable y, y despejamos la variable x.

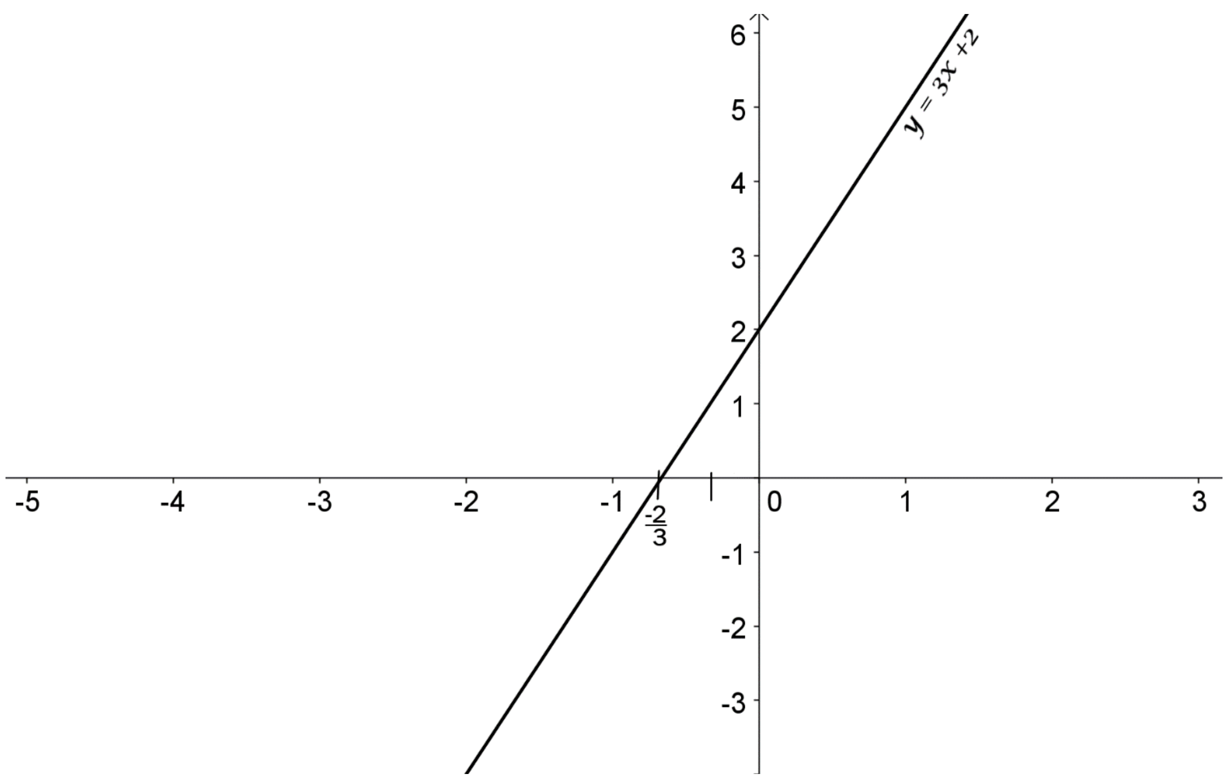
Dada una función:

$y = mx + b$, con $m \neq 0$, $m \neq 1 \wedge b \neq 0$, si $y = 0 \Rightarrow 0 = mx + b \Rightarrow \dfrac{-b}{m} = x$

Ejemplo: Represente gráficamente la función $y = 3x + 2$.

$$0 = 3x + 2$$

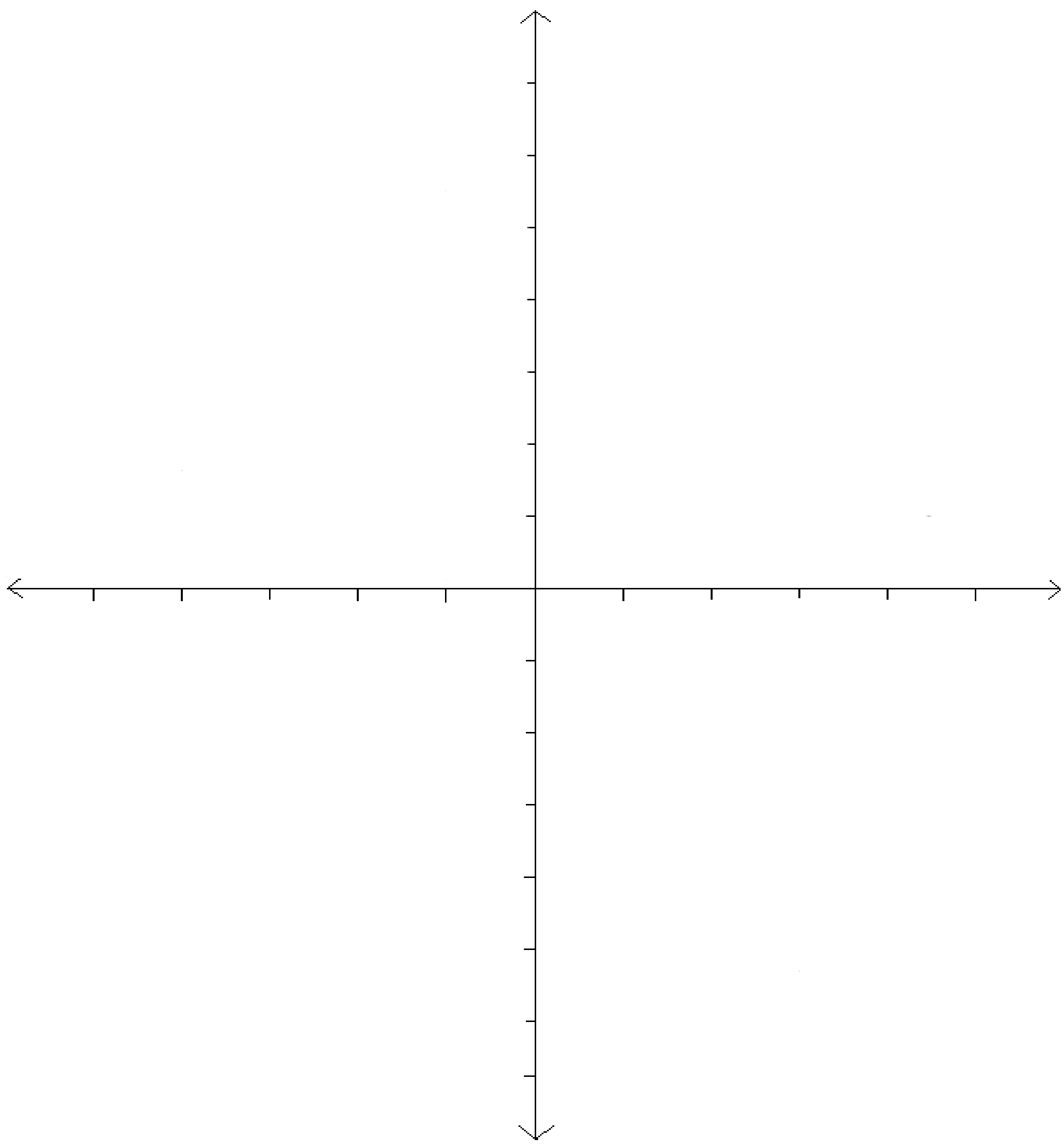
$$\frac{-2}{3} = x$$



Traza en esta misma figura las rectas correspondientes a: $y = 2x + 5$, $y = 4x - 2$.

Actividad de afianzamiento_2

Grafica las siguientes funciones en el plano cartesiano: $y = x + 6$, $y = x + 7$, $y = x - 6$, $y = x - 7$, $y = 5$, $y = -4$, $y = 3x + 4$, $y = 2x + 3$, $y = 4x - 3$, $y = 4x - 5$, $y = 3x + 2$, $y = -x - 2$, $y = -x + 1$.



8.1 Dominio y codominio a parir de la forma algebraica

A partir de la gráfica de una función lineal hemos determinado que:

a) Una función y = mx + b, con m = 0 ∧ b ≠0 ⟹ y = b ⟹ $D_x = \mathbb{R} \wedge C_y = b$.

Cuando la función lineal cumple con esta condición, se dice que la función es constante.

b) Una función y = mx + b, con m ≠0 ⟹ $D_x = \mathbb{R} \wedge C_y = \mathbb{R}$.

¿Cómo verificar este dominio y codominio, a partir de la forma algebraica?

Ejemplo: Analicemos la forma algebraica de la función lineal y = 3x + 2.

Primero determinemos el dominio, lo que nos indica la forma algebraica es que los valores x son multiplicados por 3.

¿Habrá algún valor que no pueda ser multiplicado por 3?

Claro que no, por lo tanto, el $D_x = \mathbb{R}$.

Ahora determinemos el codominio.

Recordemos, que el codominio es el conjunto de salida de todos los valores que se puedan generar, en este caso específico de la expresión 3x + 2.

Podemos determinar el codominio respondiendo correctamente la siguiente pregunta:

¿De la expresión 3x + 2, se podrán generar todos los números reales?

Los números reales implica: números enteros, racionales e irracionales.

Completemos la siguiente tabla, determinando el valor de x correspondiente al valor específico de y.

Valor de salida y	Verificación en la forma algebraica	Valor de entrada x
0	¿Qué valor multiplico por 3 para que sumado 2 resulte cero? Fácil $\frac{-2}{3}$ porque $3\left(\frac{-2}{3}\right) = -2$ Verifiquemos: $y = 3x + 2$ $y = 3\left(\frac{-2}{3}\right) + 2$ $y = -2 + 2$ $y = 0$	$\frac{-2}{3}$

Valor de salida y	Verificación en la forma algebraica	Valor de entrada x
1	¿Qué valor multiplico por 3 para que sumado 2 resulte uno? Sería $\frac{-1}{3}$ porque $3\left(\frac{-1}{3}\right) = -1$ Verifiquemos: $y = 3x + 2$ $y = 3\left(\frac{-1}{3}\right) + 2$ $y = -1 + 2$ $y = 1$	$\frac{-1}{3}$
-1	¿Qué valor multiplico por 3 para que sumado 2 resulte -1? Sería -1 porque $3(-1) = -3$ Verifiquemos: $y = 3x + 2$ $y = 3(-1) + 2$ $y = -3 + 2$ $y = -1$	-1

$\frac{4}{5}$	¿Qué valor multiplico por 3 para que sumado 2 resulte $\frac{4}{5}$? Primero: ¿Cuántos quintos hay en 2? Hay $2\left(\frac{5}{5}\right) = \frac{10}{5}$ Por lo tanto, sería $\frac{-6}{3\cdot 5}$ porque $3\left(\frac{-6}{15}\right) = -\frac{6}{5}$ Verifiquemos: $y = 3x + 2$ $y = 3\left(\frac{-6}{15}\right) + 2$ $y = -\frac{6}{5} + 2$ $y = \frac{4}{5}$	$\frac{-6}{15}$

Valor de salida y	Verificación en la forma algebraica	Valor de entrada x
$\sqrt{2}$	¿Qué valor multiplico por 3 para que sumado 2 resulte $\sqrt{2}$? Sería $\left(\frac{\sqrt{2}-2}{3}\right)$ porque $3\left(\frac{\sqrt{2}-2}{3}\right) = \sqrt{2} - 2$ Verifiquemos: $y = 3x + 2$ $y = 3\left(\frac{\sqrt{2}-2}{3}\right) + 2$	$\frac{\sqrt{2} - 2}{3}$

	$y = \sqrt{2} - 2 + 2$ $y = \sqrt{2}$	
11		
$\frac{3}{4}$		

-5		
$-\sqrt{3}$		

En definitiva, si el $D_x = \mathbb{R}$.

¿Habrá algún valor que no se pueda generar de la expresión $3x + 2$?

En general, toda función lineal $y = mx + b$, con $m \neq 0$, tendrá un $D_x = \mathbb{R}$ y un $C_y = \mathbb{R}$.

Parcial 2

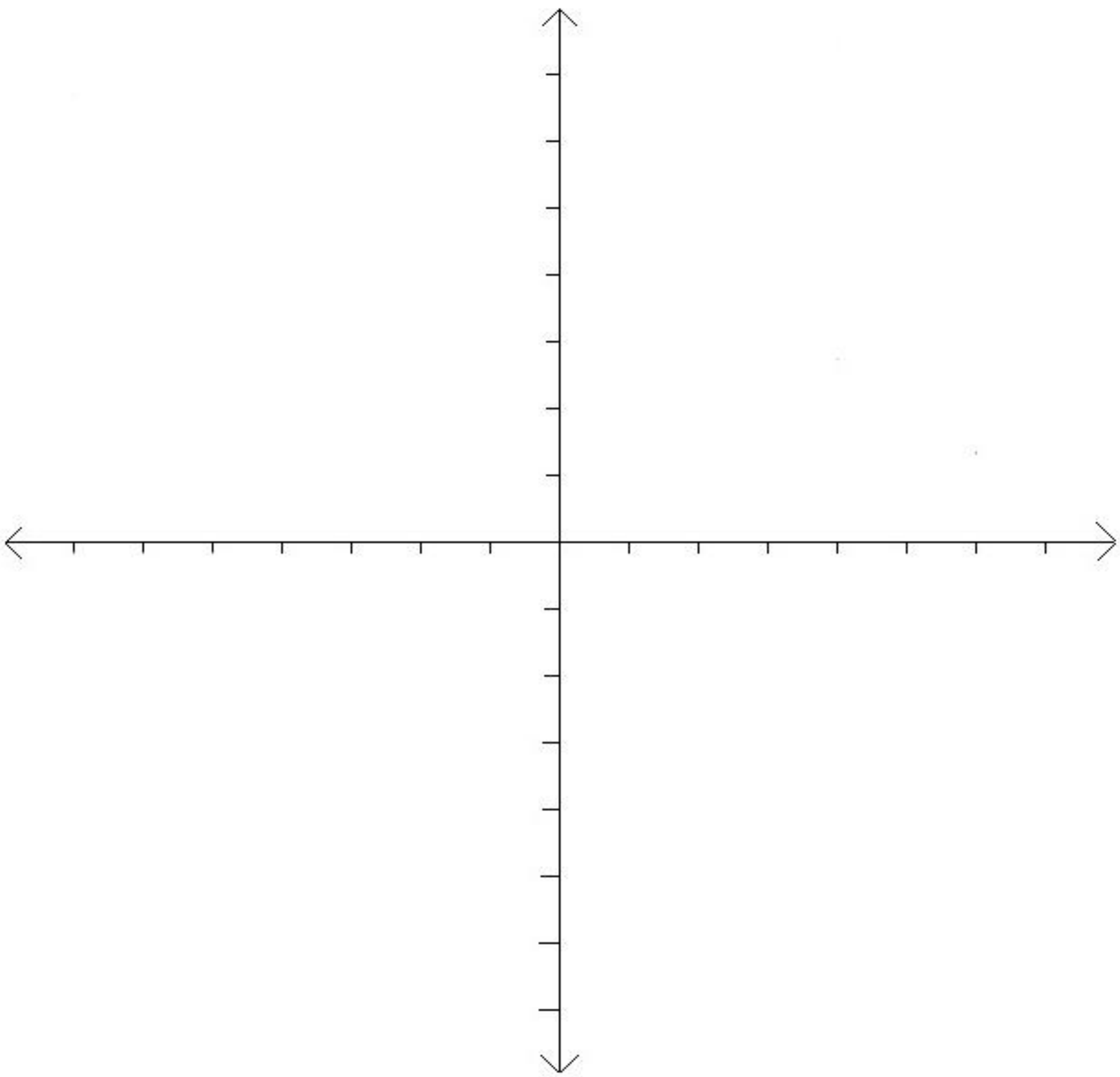
Fecha:____________________

12°___ Total de puntos: 24

Estudiante:___________________ Puntos obtenidos:______

Grafica las siguientes funciones, escribiendo junto a cada gráfica su respectiva forma algebraica. $y = x + 2$, $y = x + 6$, $y = x - 3$, $y = x - 5$, $y = 5$, $y = -4$, $y = 3x + 4$, $y = 2x + 3$, $y = 4x - 7$, $y = 4x - 6$, $y = 3x + 7$, $y = -x - 3$.

Observación: Anote los cálculos auxiliares, de los casos que los requieren.

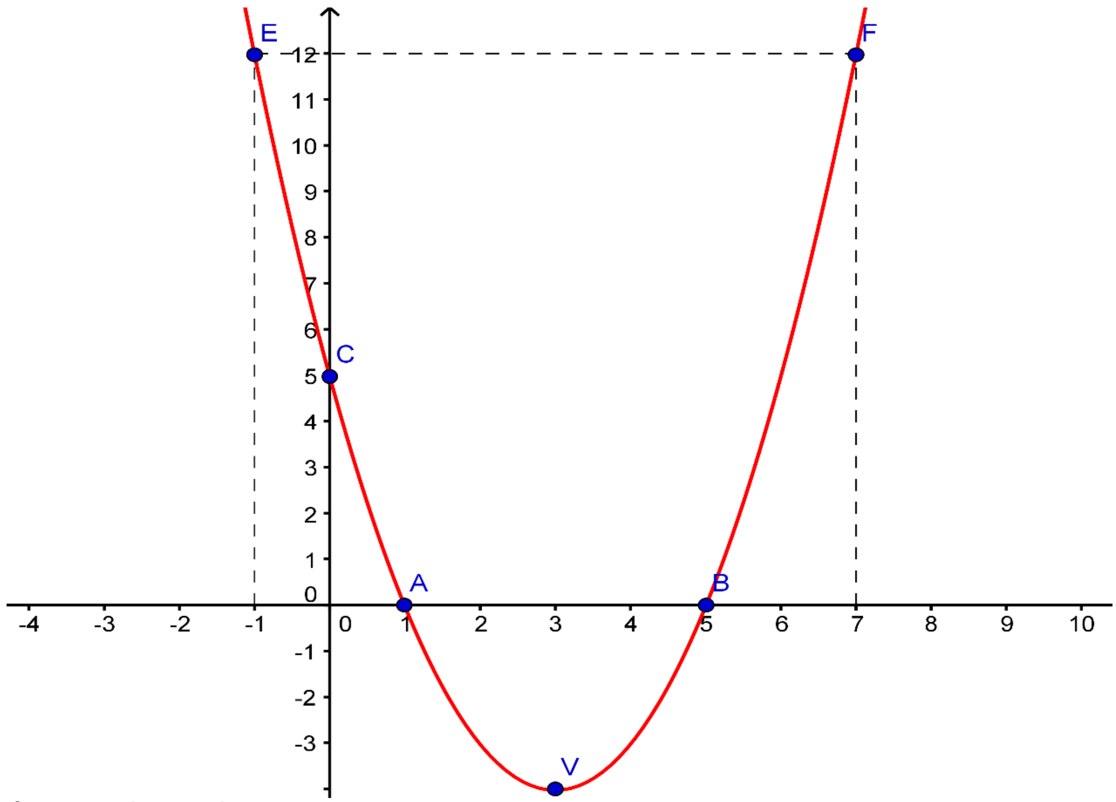


9. Función Cuadrática

Duración: 8 días	
Objetivo	Observaciones
• Utiliza GeoGebra para verificar la correspondencia entre la ecuación y la gráfica de una función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$. La Anchura (variación del coeficiente a), concavidad (signo de a), ordenada en el origen (valor de c). Desde su forma canónica $y = a(x - h)^2 + k$, verifica la traslación horizontal (variación en h), traslación vertical (variación en k). • Grafica de forma manual una función cuadrática, determinando algunos puntos especiales (vértice, ordenada en el origen, intersección con el eje x, un par de puntos cualesquiera) • Determina la ecuación de funciones lineales o cuadráticas a partir de la información gráfica presentada, aplicando la forma general de una función lineal y la forma canónica de una función cuadrática.	Es necesario que el docente, conozca como se ejecuta GeoGebra en su app para celulares, debido que este es el dispositivo, con el que mayor cuenta los estudiantes.

Toda función cuadrática de la forma $y = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, se representa gráficamente mediante una parábola.

Ejemplo 1: La representación gráfica de $y = x^2 - 6x + 5$ es la siguiente:



Te enseñaré como determinar estos puntos:

El punto C, no es más que la ordenada en el origen, que como en el caso de la función lineal es igual al término independiente en la ecuación, que en este caso es 5.
Los puntos A y B son los puntos donde interseca la parábola a eje x. Una curva corta al eje x en y=0. Solo tenemos que resolver la ecuación que resulta cuando hacemos y = 0.

$$0 = x^2 - 6x + 5$$

$$0 = (x-5)(x-1)$$

$$x_1 = 5, \qquad x_2 = 1$$

Como la parábola corta al eje x en 1 y en 5, es conveniente determinar la respectiva imagen de los valores que están a 2 posiciones tanto a la izquierda como derecha de 1 y de 5 respectivamente para tener una forma gráfica más precisa de la parábola.
En este caso serían -1 y 7. Para esto solo sustituimos estos valores en la ecuación:

$$y = (x-5)(x-1)$$
$$y = (-1-5)(-1-1)$$
$$y = (-6)(-2)$$
$$y = 1$$

$$y = (7-5)(7-1)$$
$$y = (2)(6)$$
$$y = 12$$

Podemos organizar estos resultados en una tabla:

x	-1	7
y	12	12

¿Por qué al -1 y al 7 les corresponde la misma imagen?

Luego, para determinar el vértice con coordenadas (h, k), aplicamos las siguientes fórmulas:

h $= \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2(1)} = \frac{6}{2} = 3$

k $= c - \frac{b^2}{4a} = 5 — \frac{(-6)^2}{4(1)} = 5 - \frac{36}{4} = -4$

Por los que las coordenadas del vértice son: $(3, -4)$

Hay otra forma de determinar el vértice:

La expresión $x^2 – 6X + 5$ es fácilmente factorizable, pero no posee cuadrado perfecto.

Obtengamos un trinomio cuadrado perfecto a partir de la expresión:

$x^2 – 6X + 5 = x^2 – 6X + 9 – 9 + 5 = x^2 – 6X + 9 – 4 = (x – 3)^2 – 4$

Por lo tanto $y = x^2 – 6X + 5 \Rightarrow y = (x – 3)^2 – 4$

Esta última expresión, nos ofrece las coordenadas del vértice y se denomina **forma canónica** de la función. Su modelización es: $y = a(x – h)^2 + k$.

Ejemplo 2: Dada la función $y = – x^2 – 6x – 5$

Determinemos los puntos importantes para la gráfica:

$$0 = -x^2 - 6x - 5$$

$$0 = -(x^2 + 6x + 5)$$

$$0 = -(x + 5)(x + 1)$$

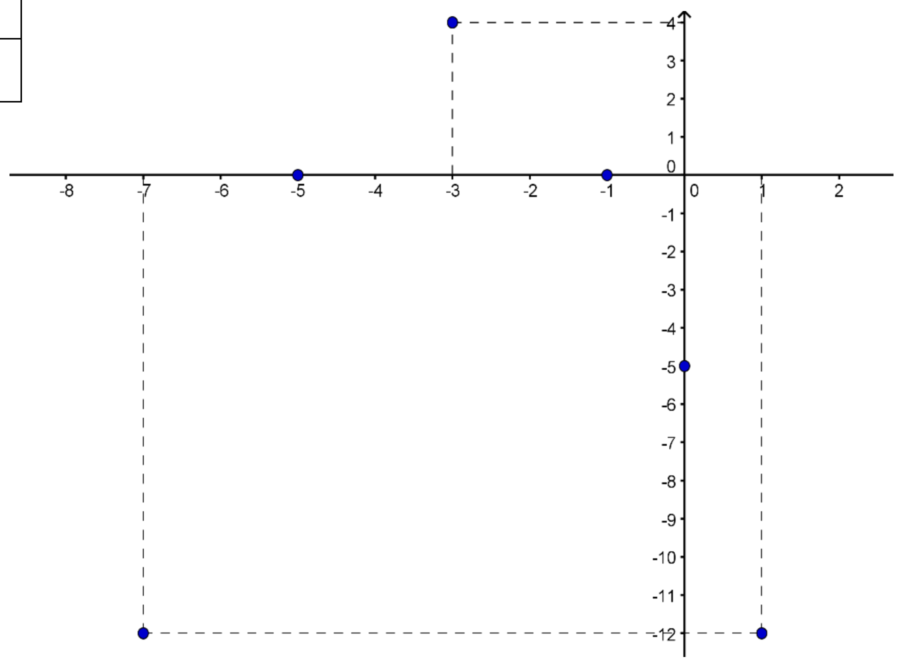
$$0 = (x + 5)(x + 1)$$

$$x_1 = -5, \qquad x_2 = -1$$

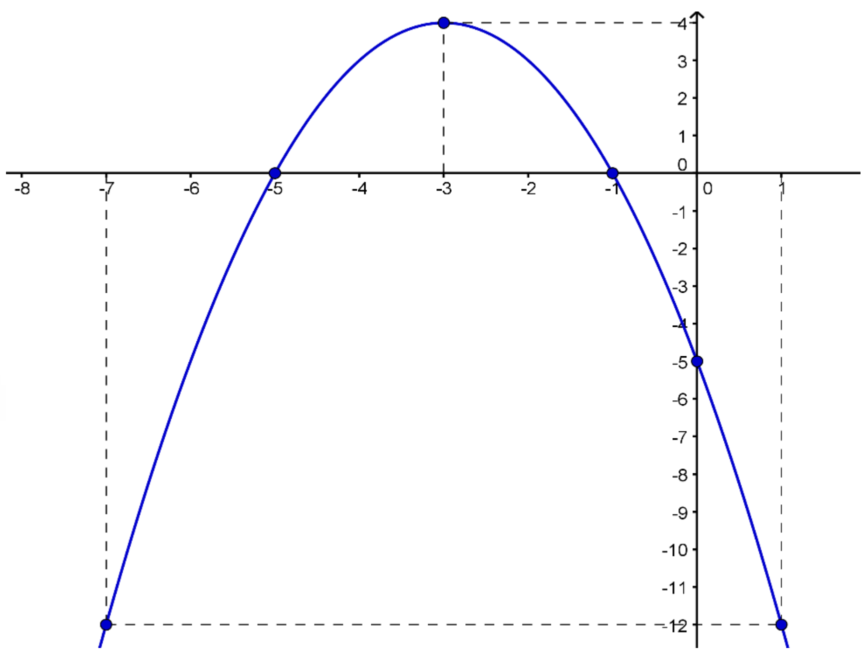
V(-3, 4)

x	-7	1
y	-12	-12

Localizamos los puntos:

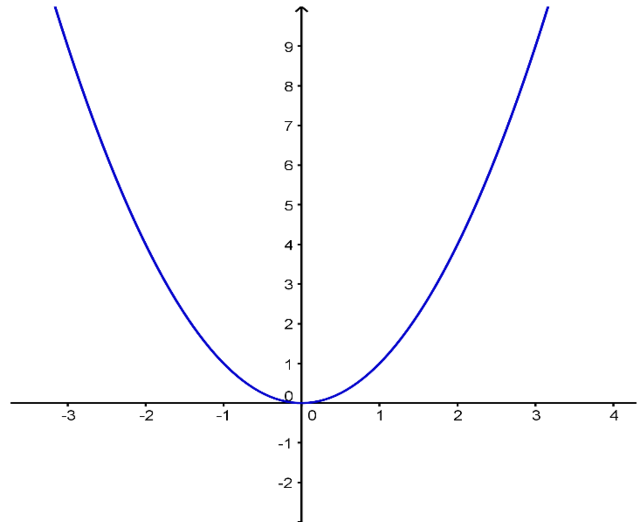


¿Por qué esta parábola abre hacia abajo



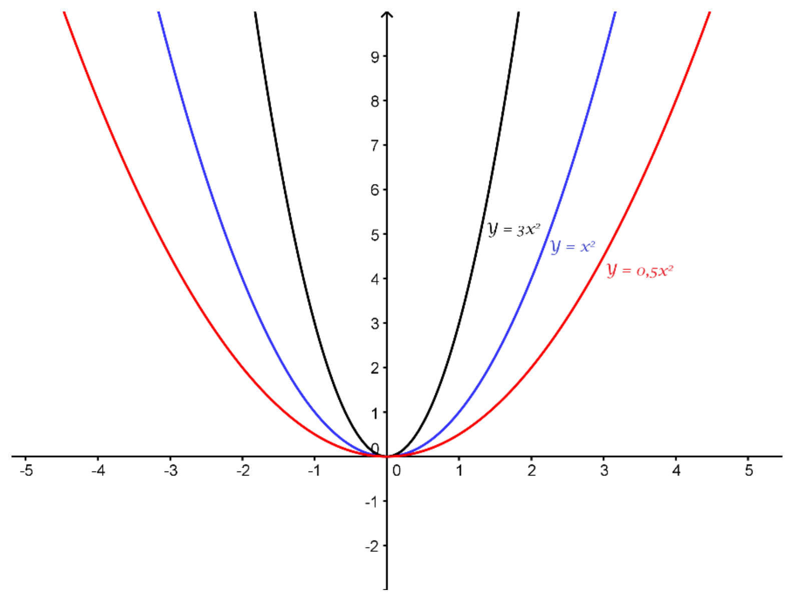
La representación gráfica de la función

$y = x^2$ es la siguiente:



Observa y analiza las siguientes figuras:

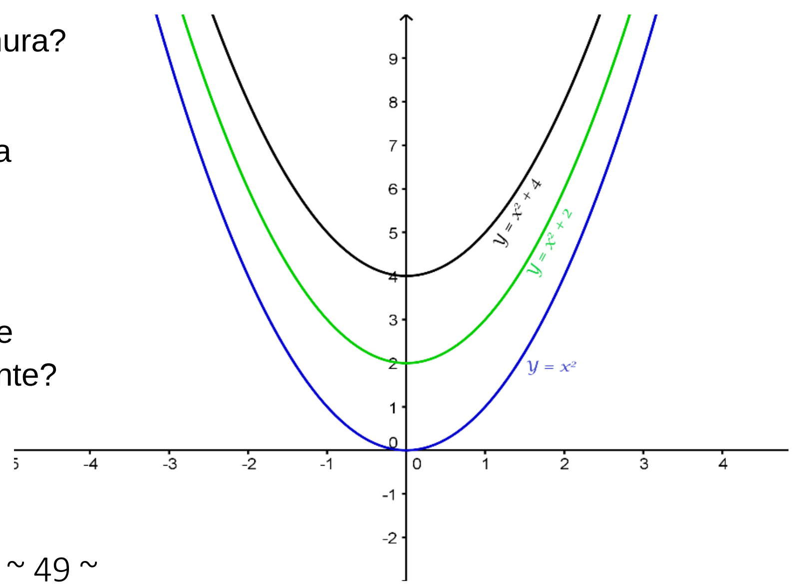
¿Qué relación existe entre
el coeficiente de la x^2 y la
representación gráfica?



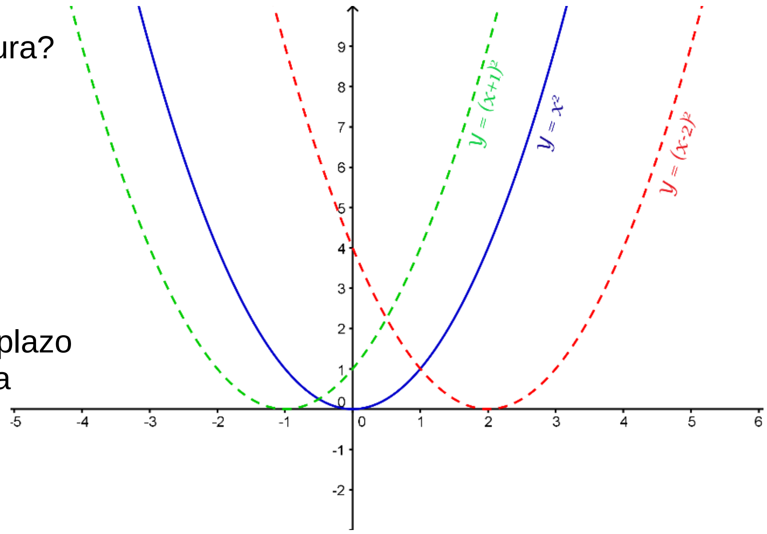
¿Las 3 parábolas tienen la misma anchura?

¿Qué sucede cuando a la x^2 se le suma
2 y 4 respectivamente?

¿Cuál sería la representación gráfica de
$y = x^2 - 1$ y $y = x^2 + 5$, respectivamente?



¿Las parábolas tienen la misma anchura?



¿Qué funciones representarían el desplazo de $y = x^2$, 4 unidades hacia la derecha y 3 unidades hacia la izquierda, respectivamente?

En general:

Si consideramos a n un número real positivo, los desplazamientos vertical y horizontal en la gráfica de $y = a(x - h)^2 + k$ están representados como sigue.

- ✓ Desplazamiento vertical n unidades hacia arriba: $y = a(x - h)^2 + k + n$
- ✓ Desplazamiento vertical n unidades hacia abajo: $y = a(x - h)^2 + k - n$
- ✓ Desplazamiento horizontal n unidades a la derecha: $y = a(x - h - n)^2 + k$
- ✓ Desplazamiento horizontal n unidades a la izquierda: $y = a(x - h + n)^2 + k$

Estas relaciones podemos verificarlas fácilmente, a través de la implementación de la aplicación GeoGebra https://www.geogebra.org/m/tnfMxTqV.

Actividad de afianzamiento 3

1. Grafique de forma manual cada una de las siguientes funciones, determinando el dominio como el codominio:

   a) $y = x^2 + 8X + 7$

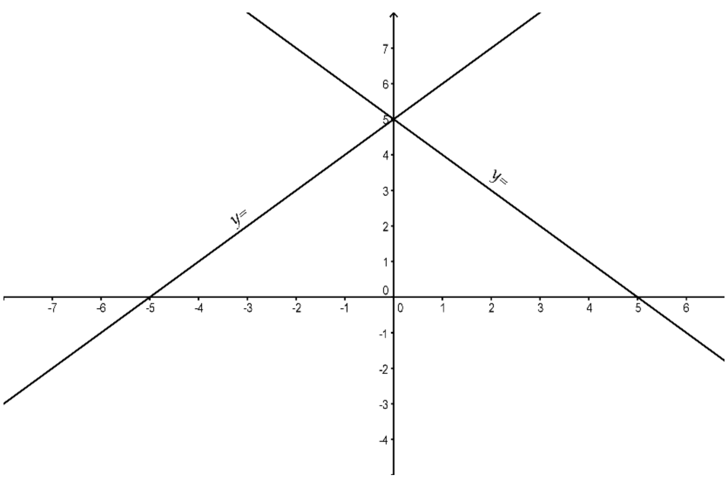
   b) $y = x^2 – 3X – 10$

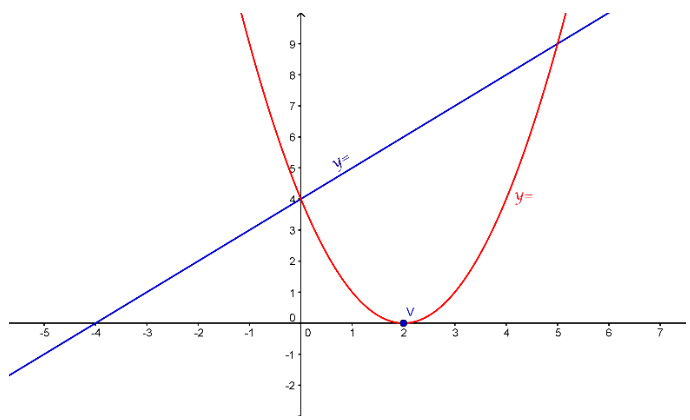
   c) $y = – (x – 4)^2 + 5$

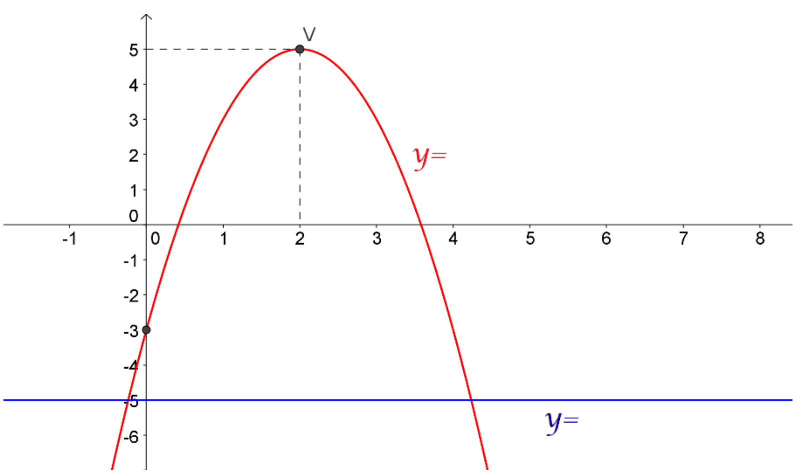
   d) $y = – 2x^2 – 8X – 6$

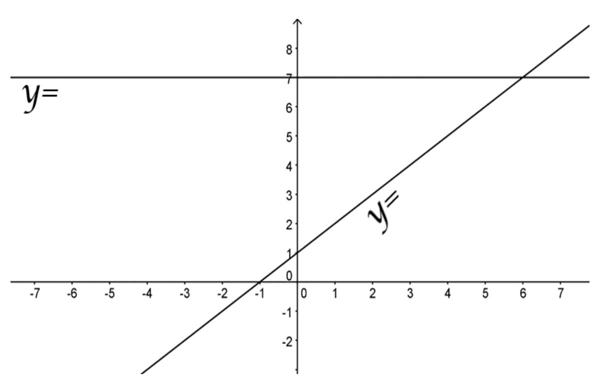
2. Determine las ecuaciones que desplazan a $y = x^2 – 6X + 4$ una unidad hacia arriba y dos unidades hacia la izquierda. Luego verifique graficando este grupo de tres parábolas con GeoGebra.

3. Escriba la forma algebraica de la función.
Complete la siguiente información:



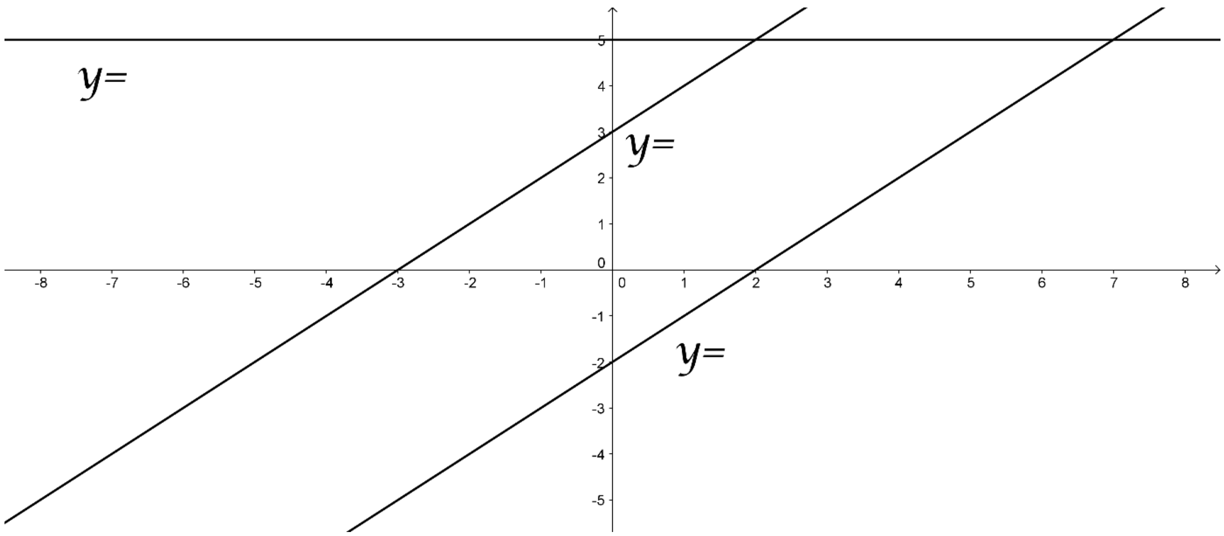


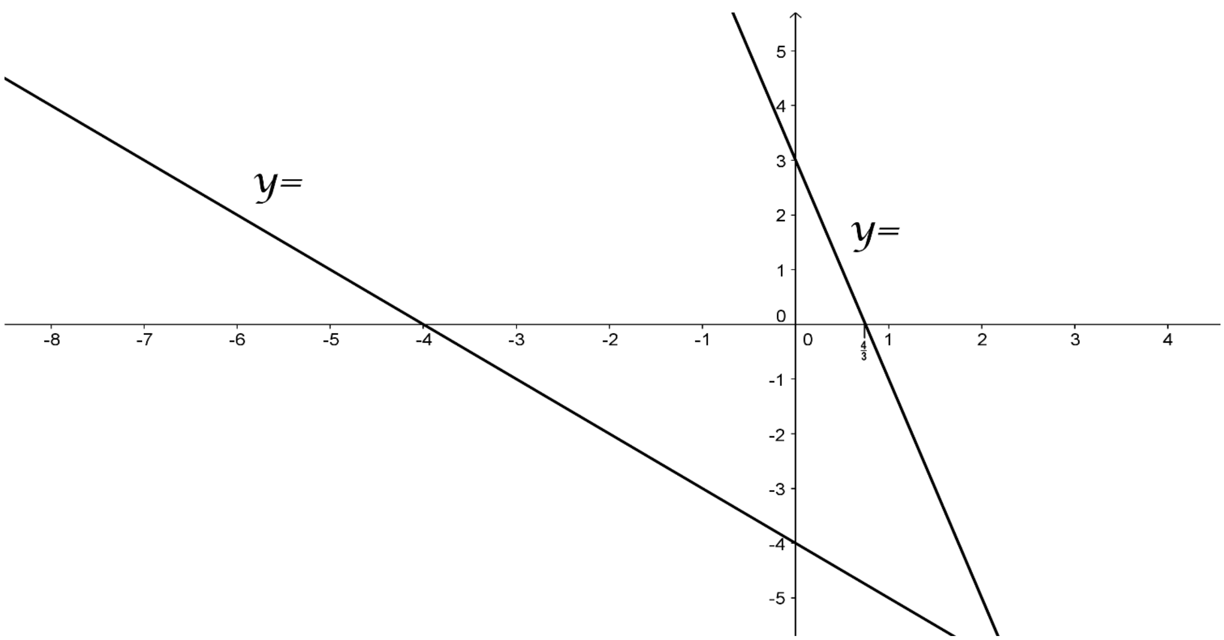




Actividad de afianzamiento 4

1. Escriba la forma algebraica de la función:





2. Asociar la representación gráfica de la función, con su respectiva forma algebraica. Coloque en el recuadro indicado en cada gráfica la letra que corresponde a su respectiva función:

A. $y = x^2 + 1$

B. $y = x^2 – 2x + 3$

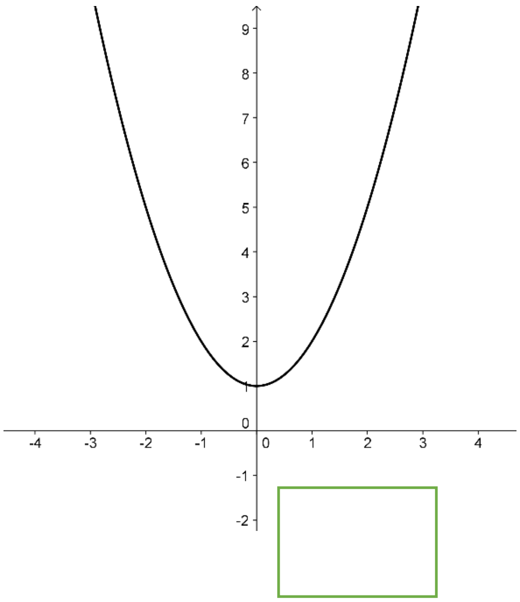
C. $y = 2x^2 + 1$

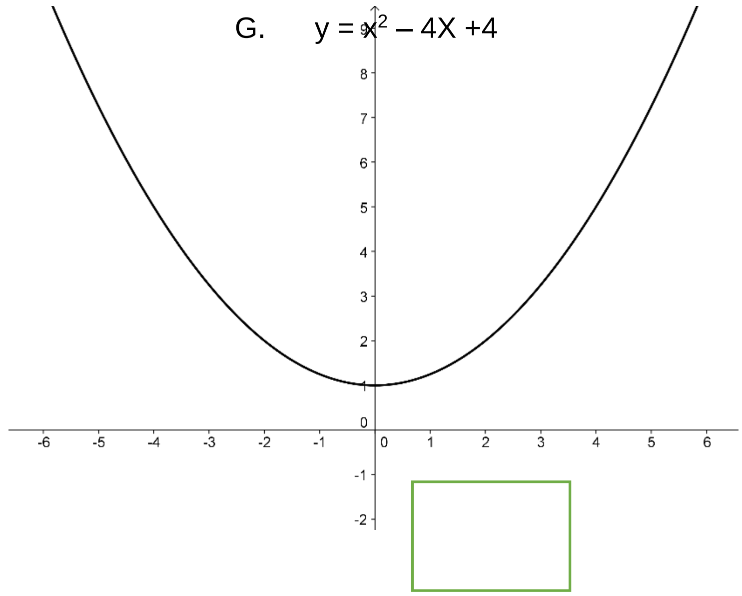
D. $y = 2x^2 – 4X + 4$

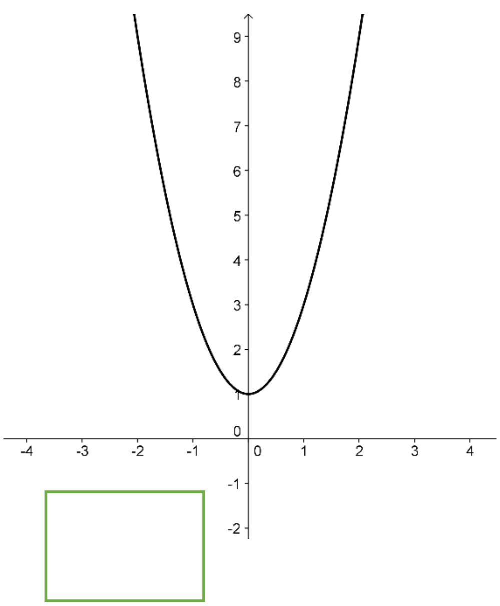
E. $y = – x^2 + 2X + 3$

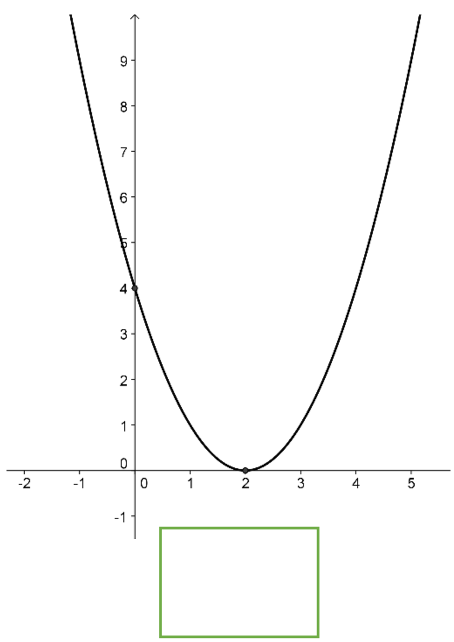
F. $y = 0{,}25x^2 + 1$

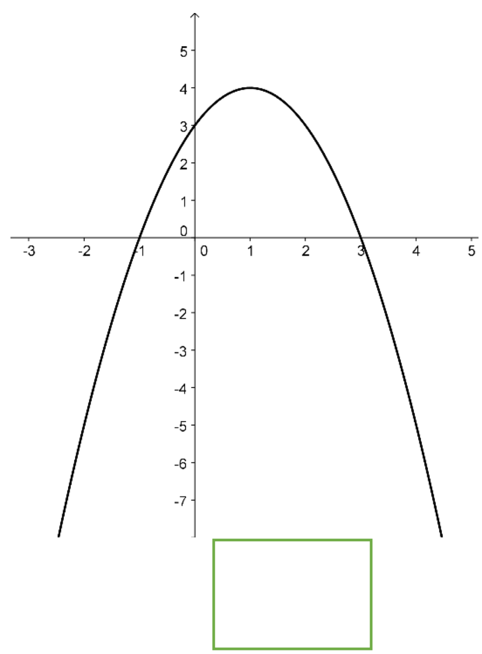
G. $y = x^2 – 4X + 4$





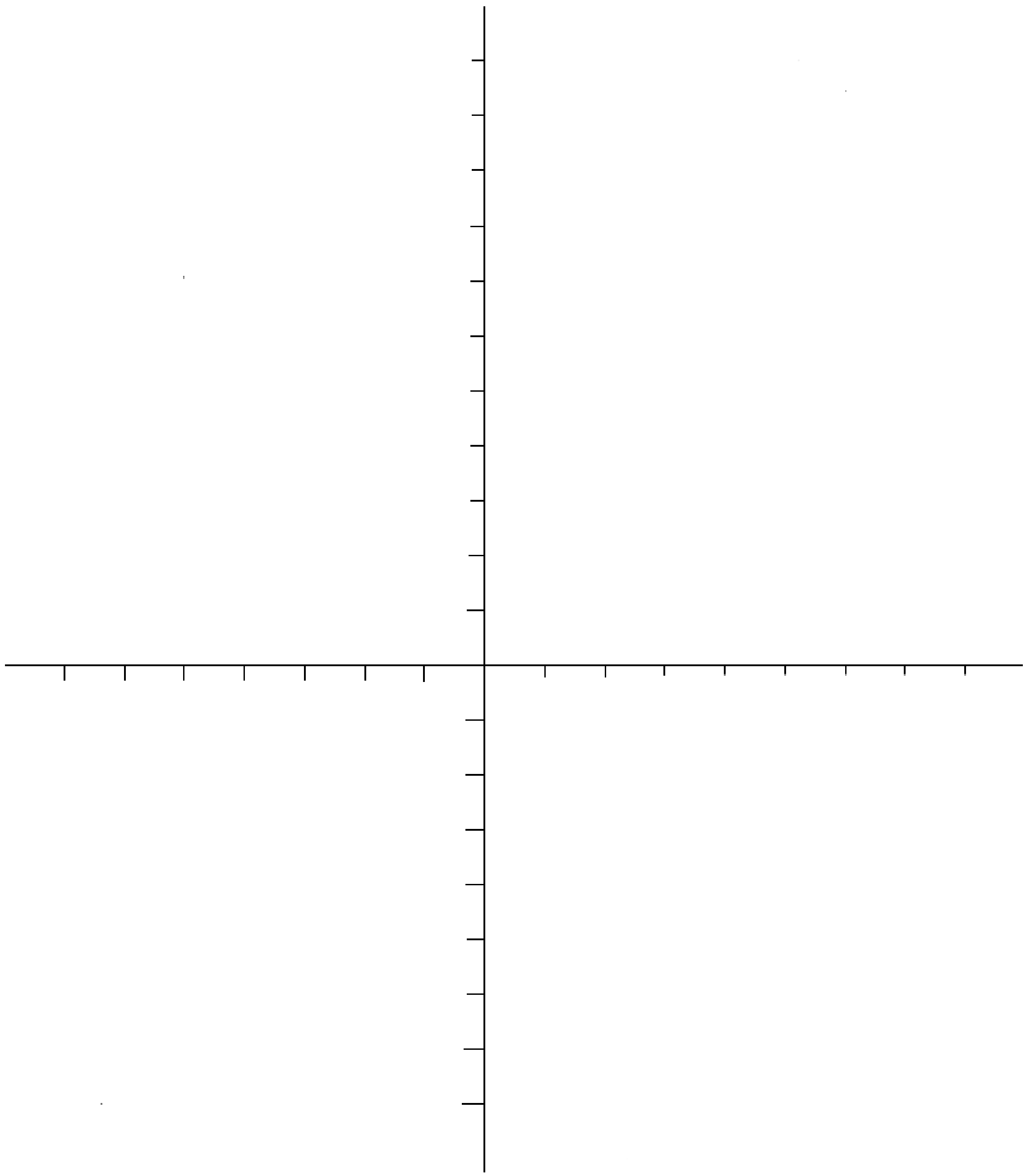






Actividad de afianzamiento 5

I_Grafique la función $y = x^2 - 2x - 3$ determinando tanto su dominio como codominio.



II_Dada la función $y = x^2 - 8x + 7$ determine las funciones que representen su desplazamiento:

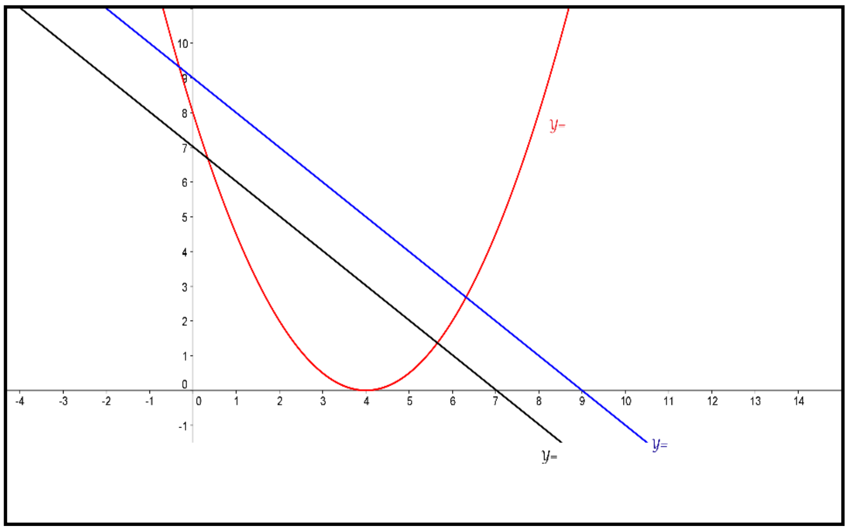
a) 2 unidades hacia la izquierda: ______________________________

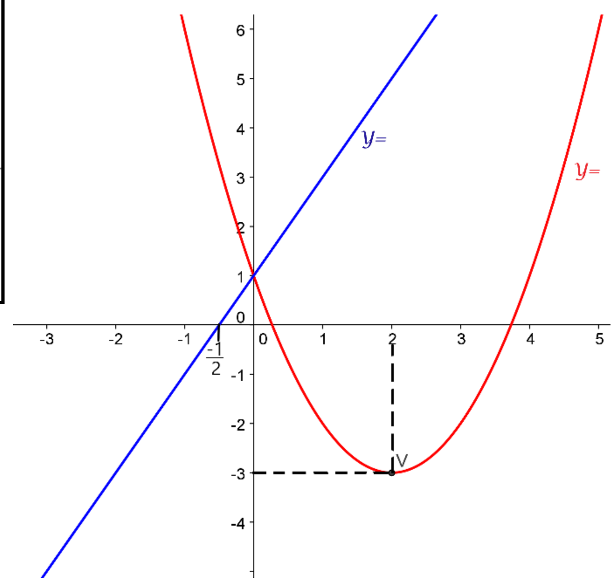
b) 3 unidades hacia la derecha: ______________________________

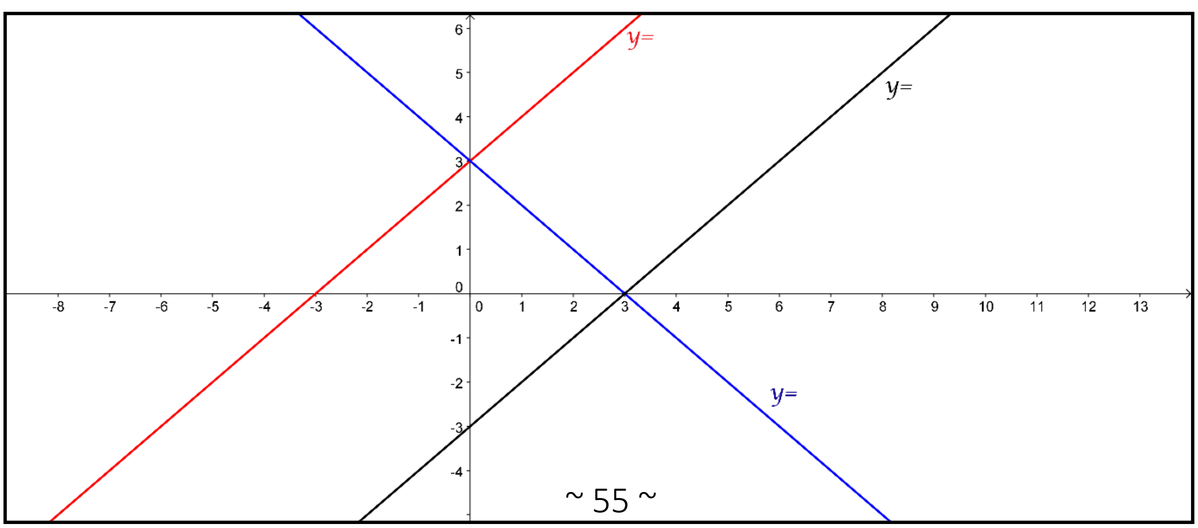
c) 5 unidades hacia arriba: ______________________________

d) 4 unidades hacia abajo: ______________________________

III_ Escriba la forma algebraica de la función. Complete la siguiente información:







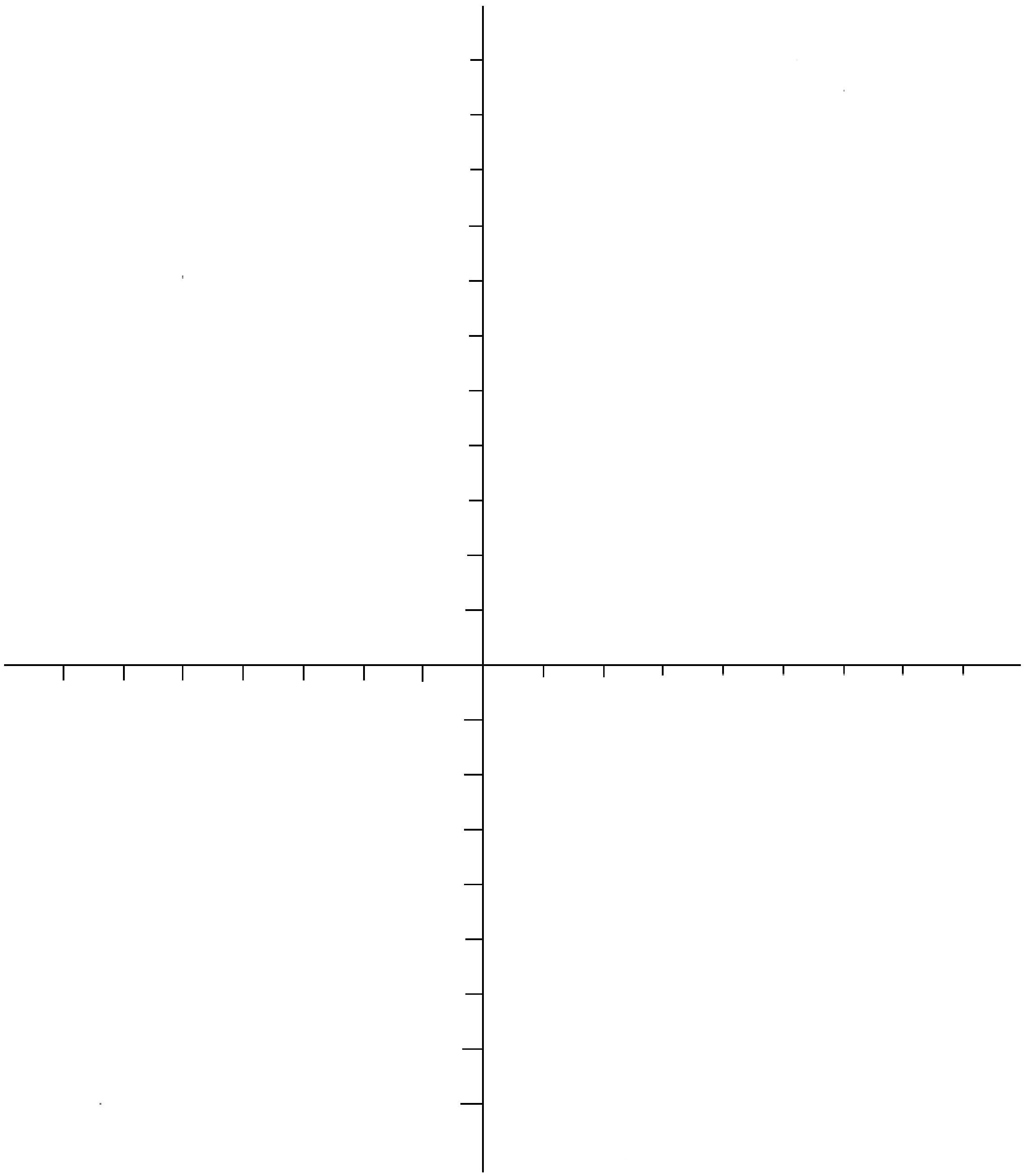
Parcial 3

Fecha:____________________

12°___ Total de puntos: 30

Estudiante:___________________ Puntos obtenidos:______

I_Grafique la función $y = x^2 - 2x - 8$, determine tanto su dominio como codominio. (10 ptos.)



II_Dada la función $y = x^2 - 2x + 3$ determine las funciones que representen su desplazamiento: (8 ptos.)

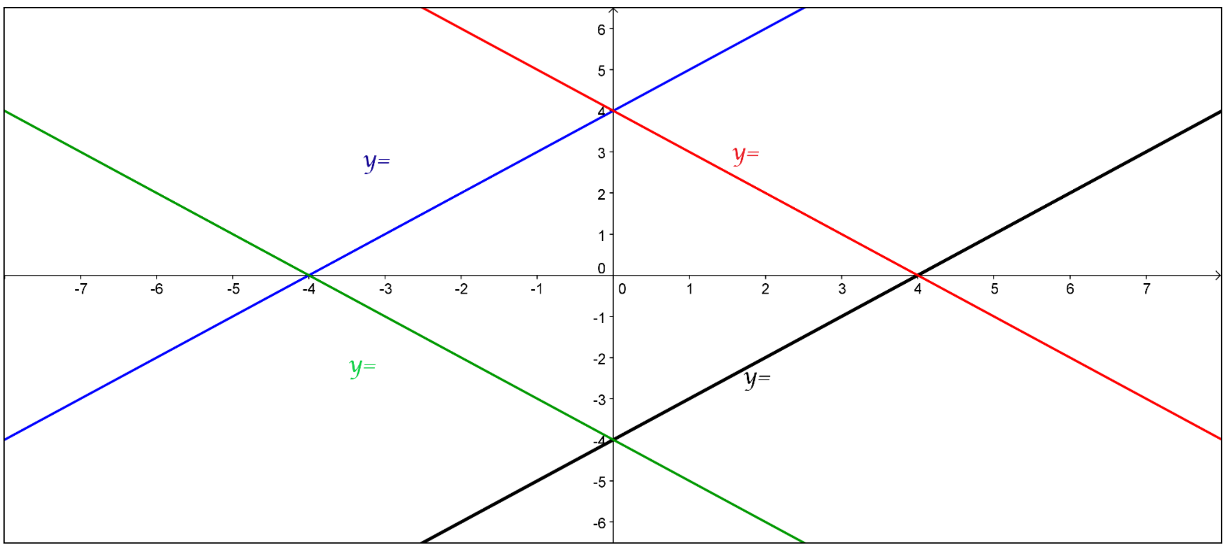
a) 3 unidades hacia la izquierda: ______________________________

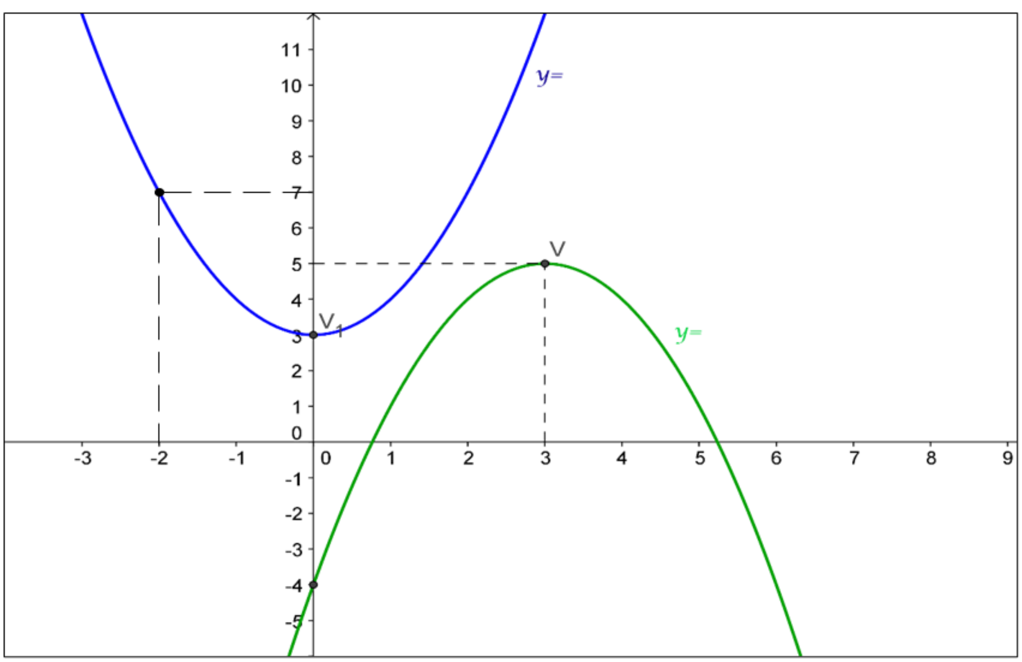
b) 4 unidades hacia la derecha: ______________________________

c) 6 unidades hacia arriba: ______________________________

d) 5 unidades hacia abajo: ______________________________

III_ Escriba la forma algebraica de la función. Complete la siguiente información: (12 ptos)





10. Argumentación escrita

<table>
<tr><td colspan="2">Duración: 5 días</td></tr>
<tr><th>Objetivo</th><th>Observaciones</th></tr>
<tr><td>

- Determina y argumenta de forma escrita, las diferencias existentes entre grupos de funciones del mismo tipo, ya sea desde su representación gráfica o algebraica.

</td><td>

La argumentación escrita, es una de las competencias matemáticas menos forjada en la educación media. Por lo tanto, esta es una actividad para obtener el mayor beneficio académico posible.

Desde la experiencia, recomiendo desarrollarla, aplicando los siguientes pasos:

- El docente orienta de la forma más explícita posible las indicaciones y entrega la actividad.

- Se establece, que se considerará como una nota de apreciación

- Una vez entregada por los estudiantes. El docente corregirá por escrito aquellas argumentaciones que comunican una idea aceptable, pero sin el lenguaje apropiado.
  En el apartado de anexos presento ejemplos.

- La actividad corregida es entregada nuevamente y se les indica, que desde otro enfoque, determinen que otra figura del grupo de cuatro es diferente al resto. Pero que esta vez mejoren la argumentación matemática, profundizando en la teoría pertinente, leyendo nuevamente el material, apuntes o información en la internet.

</td></tr>
</table>

Evaluación formativa

Fecha:___________________________ 12°____ Estudiante:_____________________________________

¿Cuál no pertenece?

Pasos a seguir:

- ✓ Observa con detenimiento los siguientes grupos de 4 figuras.
- ✓ Luego, identifica que figura no guarda relación con el resto.
- ✓ Y escribe tu argumento en el espacio indicado.

Fig. 1

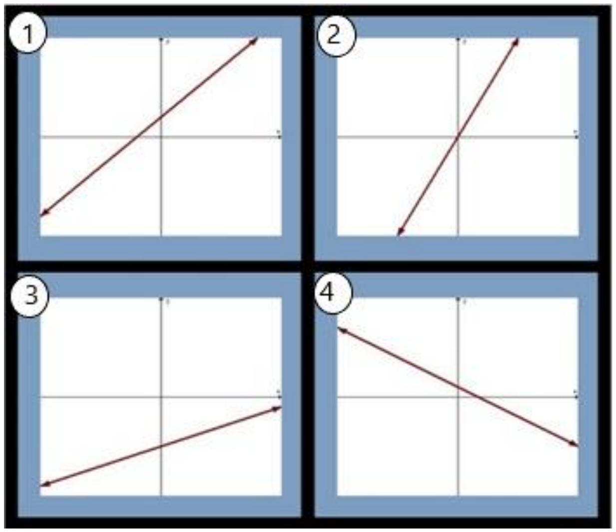


Fig. 2

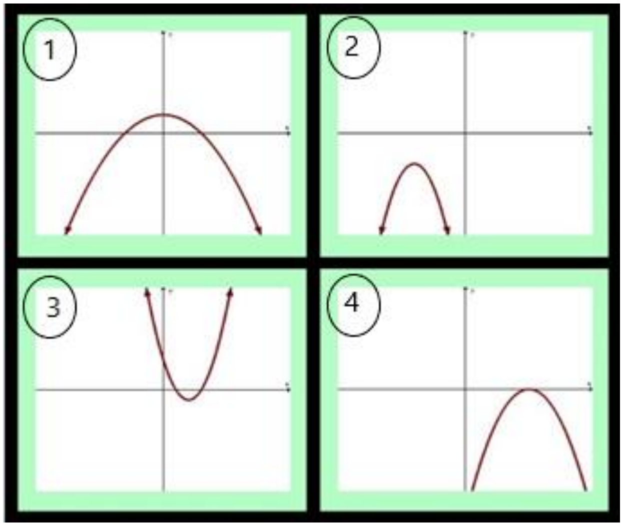


Fig. 3

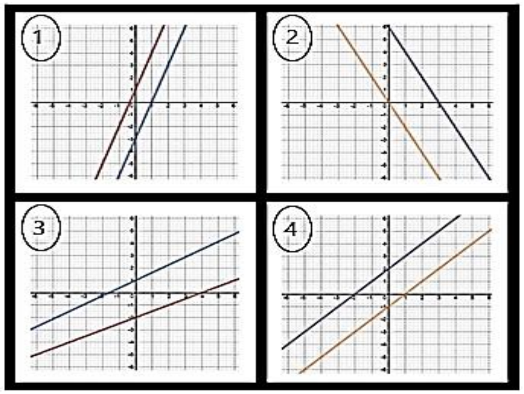


Fig. 4

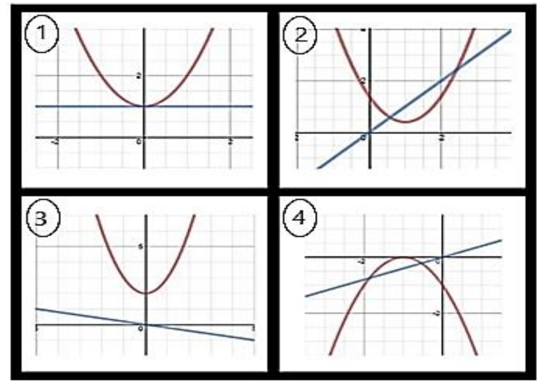


Fig. 5

1 $y = 2x^2 + 3x + 3$	2 $y = -x^2 + 5x + 4$
3 $y = x^2 + 2$	4 $y = x^2 + 7x - 1$

Fig. 6

1 **$y = 4x + 3$**	2 **$y = -4x + 5$**
3 **$y = \frac{1}{4}x + 5$**	4 **$y = 4x - 5$**

11. Bibliografía

Calvo, C., Deulofeu, J., Jareño, J., y Morera, L. (2016). *Aprender a enseñar matemáticas en la educación secundaria*. Madrid: Síntesis

Centro de Publicaciones. Ministerio de Educación y Ciencia. (1990). *El lenguaje de funciones y gráficas.* (F. Alayo, Trad.) Servicio Editorial Universidad del País Vasco.

Cuevas, C., y Delgado, M. (2016). ¿Por qué el concepto de función genera dificultad en el estudiante? *El Cálculo y su Enseñanza. Enseñanza de las Ciencias y la Matemática,* vol. 7, 108-119. Recuperado de https://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/data/docs/fe8967c4405a77e30bb1181255d8aec4.pdf

Delgado, M. (2015). Registros para una función real cualquiera de variable real. *El Cálculo y su Enseñanza. Enseñanza de las Ciencias y la Matemática,* vol. 6, 1-28. Recuperado de https://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/data/docs/fcb724721ddfa064d4ed17fbdeacc787.pdf

Díaz, J. (2013). El Concepto de Función: Ideas pedagógicas a partir de su historia e investigaciones. *El Cálculo y su Enseñanza. Enseñanza de las Ciencias y la Matemática,* vol. 4, 13-25. Recuperado de https://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/data/docs/Diaz.a535a5fbaf7a54a6250cf5a0bf132fda.pdf

Fabra, M., y Deulofeu, J. (2000). Construcción de gráficos de funciones: Continuidad y prototipos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 3(2), 207-230. Recuperado de https://www.redalyc.org/pdf/335/33530206.pdf

Farfán, R. (2013). *Lenguaje grafico de funciones. Elementos de precálculo.* Recuperado de http://www.cobaqroo.edu.mx/Docentes/Didac/lenguaje_grafico_de_funciones.pdf

García, L., Vásquez, R., y Hinojosa, M. (2004). Dificultades en el aprendizaje del concepto de función en estudiantes de ingeniería. *Ingenierías,* 7(24), 27-34. Recuperado de ingenierias.uanl.mx/24/pdfs/24_dificultades_en_el_aprendizaje.pdf

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., y Stein, M. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research*, 60(1), 1-64. Recuperado de https://www.math.ksu.edu/~bennett/onlinehw/qcenter/lzs.pdf

Leithold, L. (1998). *El cálculo.* Mexico D.F., México: Harla

Prada, R., Hernández, C., y Jaimes L. (2017). Representaciones semióticas alrededor del concepto de función en estudiantes de ingeniería. *Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias*, 12(2), 14-31. Recuperado de https://revistas.udistrital.edu.co/index.php/GDLA/article/view/10491/pdf_1

Prada, R., Hernández, C., y Jaimes L. (2017). Representaciones semióticas alrededor del concepto de función en estudiantes de ingeniería. *Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias*, 12(2), 14-31. Recuperado de https://revistas.udistrital.edu.co/index.php/GDLA/article/view/10491/pdf_1

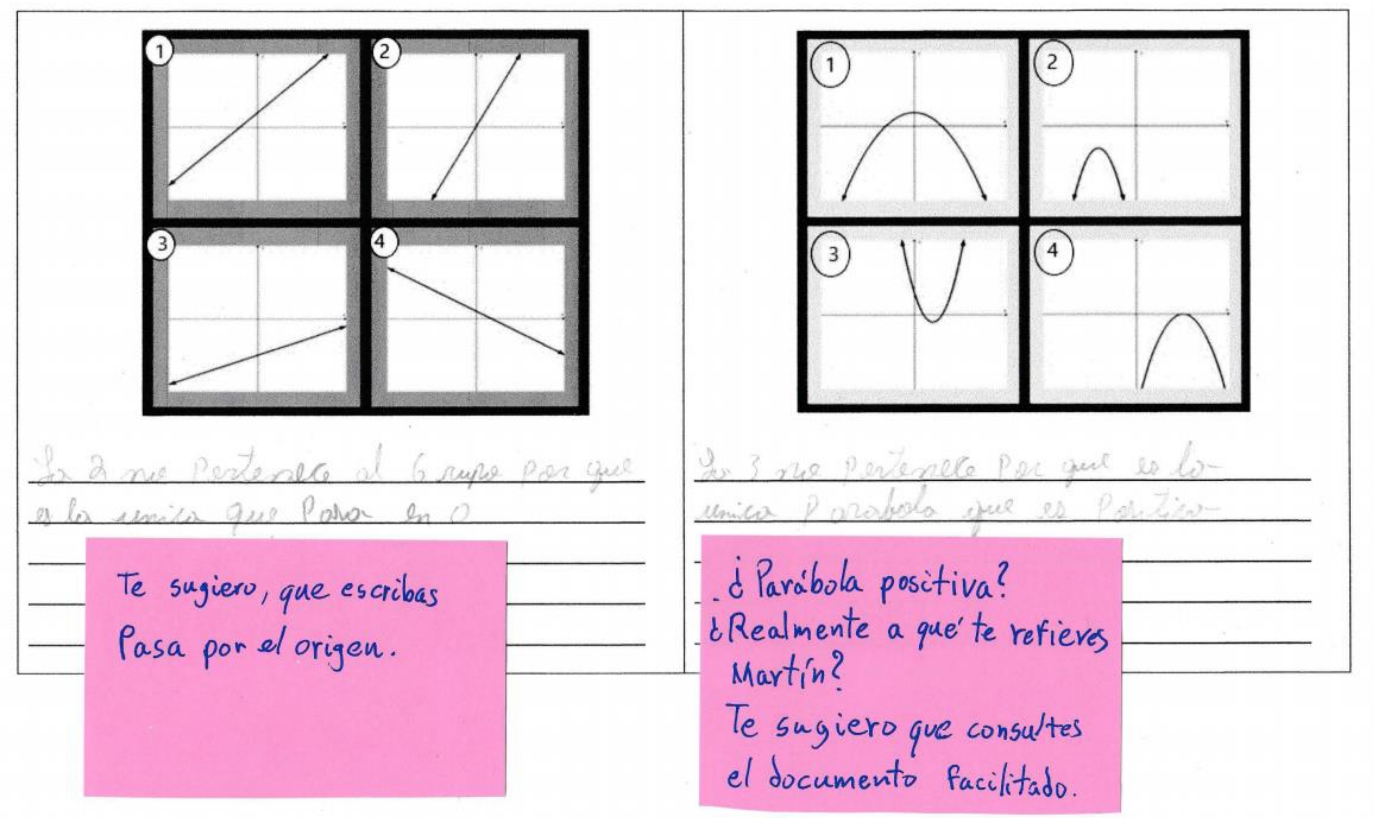
Quintero, C., y Cadavid, L. (2009). *Construcción del concepto de función en estudiantes de octavo grado.* Comunicación presentada en 10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (8 a 10 de octubre 2009). Pasto, Colombia. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/705/

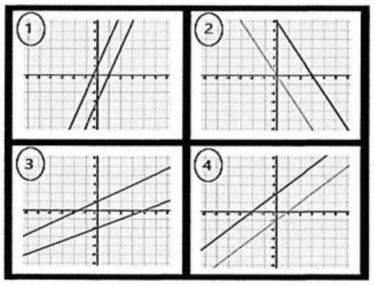
Tamayo, O. (2006). Representaciones semióticas y evolución conceptual en la enseñanza de las ciencias y las matemáticas. *Revista Educación y Pedagogía,* 18(45), 39-49. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/10963/

Terrero, J., y Pérez, O. (2010). Propuesta didáctica para la enseñanza del tema de las funciones a través de la utilización de estrategias metacognitivas y el uso del Derive. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática,* 6(22), 91-107. Recuperado de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2010/22/Union_022.pdf

11. Bibliografía

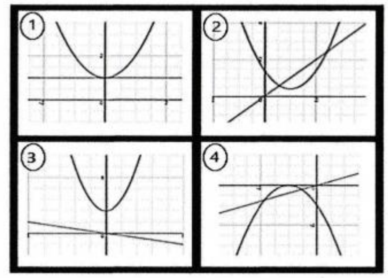
11.1 Algunas actividades de argumentación corregidas





La 2 no Pertenese Por Que son las unica recta que son negativa

¿Rectas negativas?
En realidad, ¿qué es lo que negativo?



La 4 no Pertenece Por es la unica Parabola que es negativa

En este caso no solo te enfoques en las parábolas, sino en la relación que observas entre las parábolas y las rectas.

$y = 2x^2 + 3x + 3$	$y = -x^2 + 5x + 4$
(3) $y = x^2 + 2$	(4) $y = x^2 + 7x - 1$

La 1 no Pertenese al Grupo Por que es la unica que tiene un 2 en el x^2

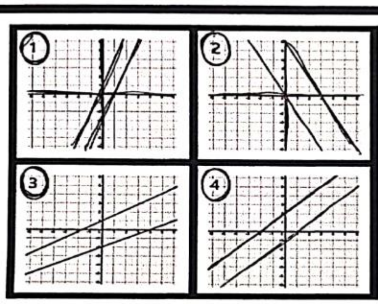
Ok, Martín ¿Qué significa que el 2 sea el coeficiente de la x^2?

$y = \frac{1}{4}x + 5$	$y = 4x - 5$

La 3 no Pertenese al Grupo Por Que es la unica que tiene 1/4 en la x

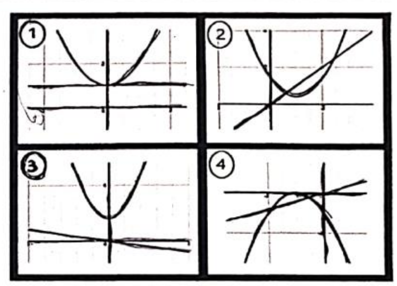
OK ¿El coeficiente de la recta, qué representa en una función lineal?

Madrid



#2 no pertenece a este grupo ya que es negativo y la linea recta va en dirección opuesta

Lo de dirección opuesta esta bien.
¿Pero? ¿Qué es lo que es negativo?
Lee el documento



#4 no pertenece ya que es negativo y esta doniendo asia abajo en posición contraria al order

En este caso no solo te enfoques en la parabola. Sino en la relación de ambas Figuras. (Parábolas y rectas)

#3 no ...

SENACYT

① $y = 2x^2 + 3x + 3$	② $y = -x^2 + 5x + 4$
③ $y = x^2 + 2$	④ $y = x^2 + 7x - 1$

la figua 2 $y = -x^2 + 5x + 4$ es diferente
a la demás por su signos es negativo
la figua 4 porque el ultimo numero
es negativo

Investiga ¿Qué es lo que
tiene negativo la Figura 2?

Y ¿Qué representa el -1
en la Figura 4?

① $y = 4x + 3$	② $y = -4x + 5$
③ $y = \frac{1}{4}x + 5$	④ $y = 4x - 5$

① porque el figura 3 $y = 1/4x + 5$
es diferente a los demas
② porque el figura 2 $y = -4x + 5$
es menos y las otras dos son
positivos.

OK
El coeficiente de la X
en una función lineal
¿Qué representa?
Despues de responder
esta pregunta.
Redacta nuevamente.

Lea sobre: 1. La pendiente de una recta. 2. La intersección de la recta con los semi ejes (positivos y negativos) de x e y.	Lea sobre: 1. La pendiente de una recta. 2. La intersección de la recta con los semi ejes de (positivos y negativos) de x e y.	Lea sobre: 1. La concavidad de una parábola 2. La intersección de la parábola con los semi ejes de (positivos y negativos) de x e y. Y recuerde que las parábolas se abren hacia el infinito.	Lea sobre: 1. La concavidad de una parábola 2. La intersección de la parábola con los semi ejes (positivos y negativos) de x e y. Y recuerde que las parábolas se abren hacia el infinito.

Lea sobre: 1. Rectas paralelas 2. Rectas secantes 3. Rectas perpendiculares 4. Pendiente de una recta Luego mejore su argumentación.	Enfóquese en cada pareja de parábola y recta. Observe una diferencia del resto de las parejas y luego explíquelo de forma matemática.	Lea sobre las funciones cuadráticas, que determina: 1. El signo como el valor absoluto del coeficiente de la x^2. 2. Que valor en la ecuación determina la ordenada en el origen.	Lea sobre las funciones lineales, que determina: 1. El coeficiente de la x. 2. Que valor en la ecuación determina la ordenada en el origen.