

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

MIGUEL BLANCO, CAROLINA BAUTISTA, ANDRÉS NAIZAQUE, DAVID ARISMENDY Y CAMILO LÓPEZ

BOGOTÁ, NOVIEMBRE DE 2019

1. INTRODUCCIÓN

Para enseñar matemáticas, es importante dominar los conocimientos y contar con diversas habilidades propias de esta ciencia. Pero más allá de estos aspectos, se requiere contar con estrategias metodológicas y pedagógicas que resultan esenciales en el proceso. La mayoría de los educadores reconocen la complejidad que existe al momento de definir los recursos, los materiales, la metodología y demás elementos que se requieren en la enseñanza de algún concepto matemático. Actualmente, la Universidad de los Andes con ayuda del equipo de formadores de la maestría en análisis didáctico, brinda un campo de profundización que permite estudiar cada uno de los aspectos en cuestión. El estudio propone estructurar de manera detallada todos los elementos que intervienen en la enseñanza de un tema específico y organizar de manera efectiva una propuesta que se pueda extender y llevar a la práctica.

En este documento, presentamos el diseño de la unidad didáctica en el tema progresión geométrica que implementamos con estudiantes de grado undécimo de la institución educativa distrital General Santander. La institución se encuentra ubicada en una zona urbana de la localidad de Engativá en Bogotá. El PEI está enfocado en el desarrollo de competencias, en las áreas de ciencia y tecnología y su componente académico se basa en el modelo pedagógico de aprendizaje significativo. Según el reporte realizado por el ICFES en el año 2017, el 68% de los estudiantes de grado noveno se encontraban en nivel mínimo de desempeño en el área de matemáticas y sólo un 10% por encima de este nivel. Estos resultados nos inducen a fortalecer la práctica educativa con el propósito de aumentar ciertos niveles de desempeño en los estudiantes que actualmente, para el año 2019 cursan grado undécimo.

Nuestra práctica docente nos ha permitido identificar que los estudiantes tienen dificultades al expresar patrones sucesivos a través de la formulación de expresiones algebraicas. También, identificamos errores frecuentes al operar y realizar procedimientos entre símbolos y números. Por lo tanto, consideramos de gran utilidad abordar el tema de progresión geométrica en medio de la solución de problemas en diversos contextos personales, profesionales y científicos (Ministerio de Educación Cultura y Deporte, 2013).

Para el diseño de la unidad didáctica, tuvimos en cuenta la integración de los estándares básicos de competencias con el fin de cumplir las directrices del Ministerio de Educación Nacional. En ese sentido, nos propusimos desarrollar el pensamiento variacional con un estándar establecido para grado noveno: “Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas” (MEN, 2006, pág. 87), el cual, describe lo que pretendemos lograr con nuestros estudiantes. Consideramos que este estándar, mantiene una relación estrecha con las capacidades fundamentales que requieren los estudiantes al abordar las progresiones geométricas.

El concepto de progresión geométrica conlleva a los estudiantes a usar sistemas de representación, fortalecer las capacidades fundamentales en el diseño de estrategias para resolver problemas, matematizar, y utilizar operaciones con un lenguaje simbólico y formal. Además, facilita en nuestros estudiantes la adquisición de conocimientos previos que les permitan enfrentarse a otros conceptos más complejos. Por ejemplo, al comprender características particulares de las progresiones geométricas como la razón, el crecimiento o decrecimiento, los estudiantes pueden conectar ideas y llegar a manejar el término general de una sucesión en la que se considera una constante multiplicativa. En definitiva, los estudiantes pueden integrar sus conocimientos y estar en la capacidad de abordar cualquier tipo de sucesión más compleja.

En la implementación de nuestro trabajo, el análisis didáctico nos permitió indagar sobre conocimientos previos en los estudiantes, proponer objetivos puntuales y definir tareas acordes a estos objetivos, descubrir las estrategias de solución de los estudiantes y detectar los errores frecuentes al momento de abordar las tareas. En cada apartado de nuestro documento, describiremos los aspectos de la unidad didáctica que componen el análisis, de manera que, que podamos contribuir al trabajo de nuestros colegas interesados en implementar esta propuesta.

2. ARTICULACIÓN DE LOS CONTENIDOS

En el análisis de contenido, describimos la articulación de los contenidos de la unidad didáctica con base en tres aspectos. En primer lugar, mencionamos las estructuras y subestructuras concernientes al tema de la unidad didáctica. Luego, mostramos los sistemas de representación. Por último, presentamos la fenomenología utilizada en el tema de la progresión geométrica.

1. ESTRUCTURA CONCEPTUAL

El concepto de función es el centro de la estructura matemática de la progresión geométrica. Del concepto de función con dominio en los números reales, seguimos con el concepto de sucesión que es una función cuyo dominio son los números naturales. Finalmente llegamos al concepto de progresión geométrica. En la figura 1, presentamos la estructura conceptual del tema progresión geométrica, está puede definirse como la colección ordenada e infinita de números reales. Cada término de la progresión se obtiene multiplicando el término anterior por una cantidad constante denominada razón (Sangaku S.L., 2019). El dominio de la progresión pertenece a los números naturales y el rango a los números reales. El término general de una progresión geométrica es $a_n = a_1 r^{n-1}$ donde a_1 es el primer término, r es la razón y a_n es el término enésimo de la progresión. En ese sentido, podemos calcular cada uno de los términos de la progresión; al conocer el primer término y la razón a partir de efectuar algunas operaciones básicas como la multiplicación y la división.

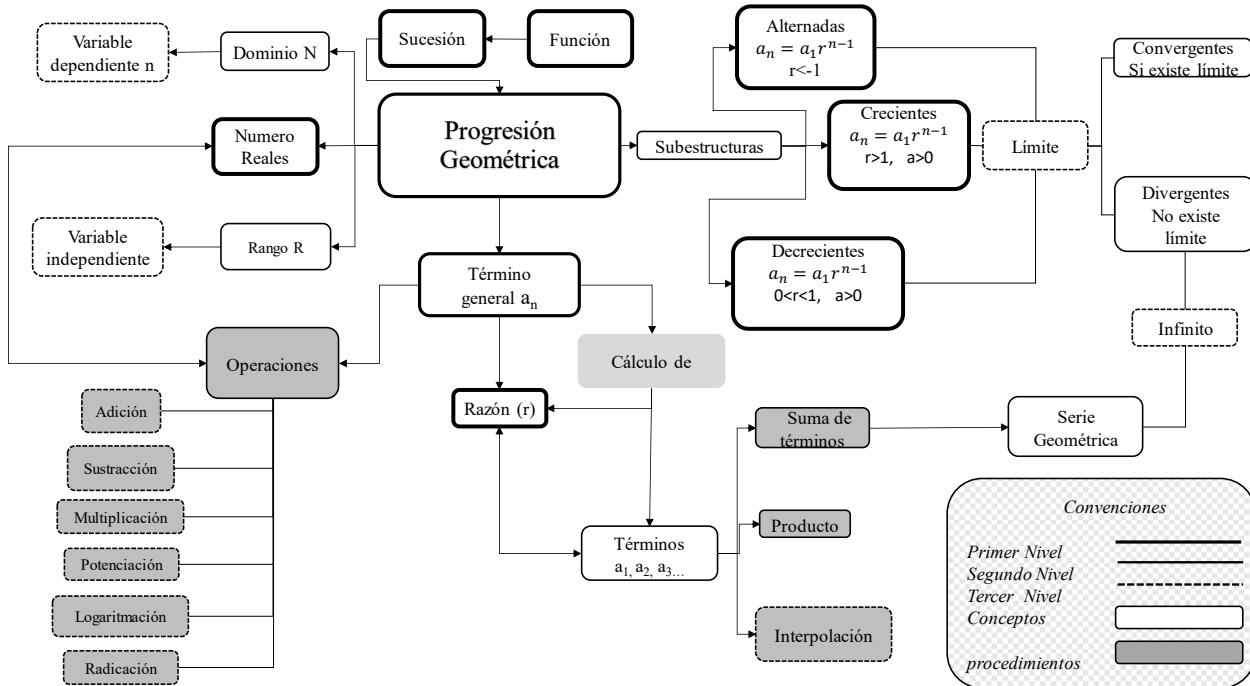


Figura 1. Estructura conceptual del tema progresión geométrica

Las progresiones geométricas pueden clasificarse en crecientes, cuando se cumple que, $a_n < a_{n+1}$ y decrecientes cuando se cumple que, $a_n > a_{n+1}$. También, estas progresiones presentan la clasificación de convergentes o divergentes. Cuando la progresión tiene límite se dice que es convergente y cuando no presenta límite la sucesión es divergente. Dentro de la estructura conceptual de la progresión geométrica encontramos conceptos como las series alternantes, interpolación y serie geométrica. Estos últimos conceptos no los abordamos en la unidad didáctica, pero, nos sirven de marco general para centrar nuestra unidad didáctica en las series crecientes y decrecientes.

2. SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

Los sistemas de representación utilizados en la unidad didáctica son los siguientes: pictórico, tabular, gráfico y simbólico. En la figura 2, presentamos un ejemplo de la progresión geométrica cuyo término general es $a_n = 2^{n-1}$. Esta progresión geométrica tiene las siguientes características: es una progresión creciente no acotada, el primer término es uno y la razón es dos. En el sistema pictórico esta progresión geométrica se representa por medio de un diagrama de árbol. En el sistema tabular, la primera fila hace referencia a los valores del dominio (números naturales) y la segunda fila hace referencia a los términos de la progresión. En el sistema de representación gráfico, en el eje x se ubica el cardinal del término y se corresponde con el término respectivo en el eje y .

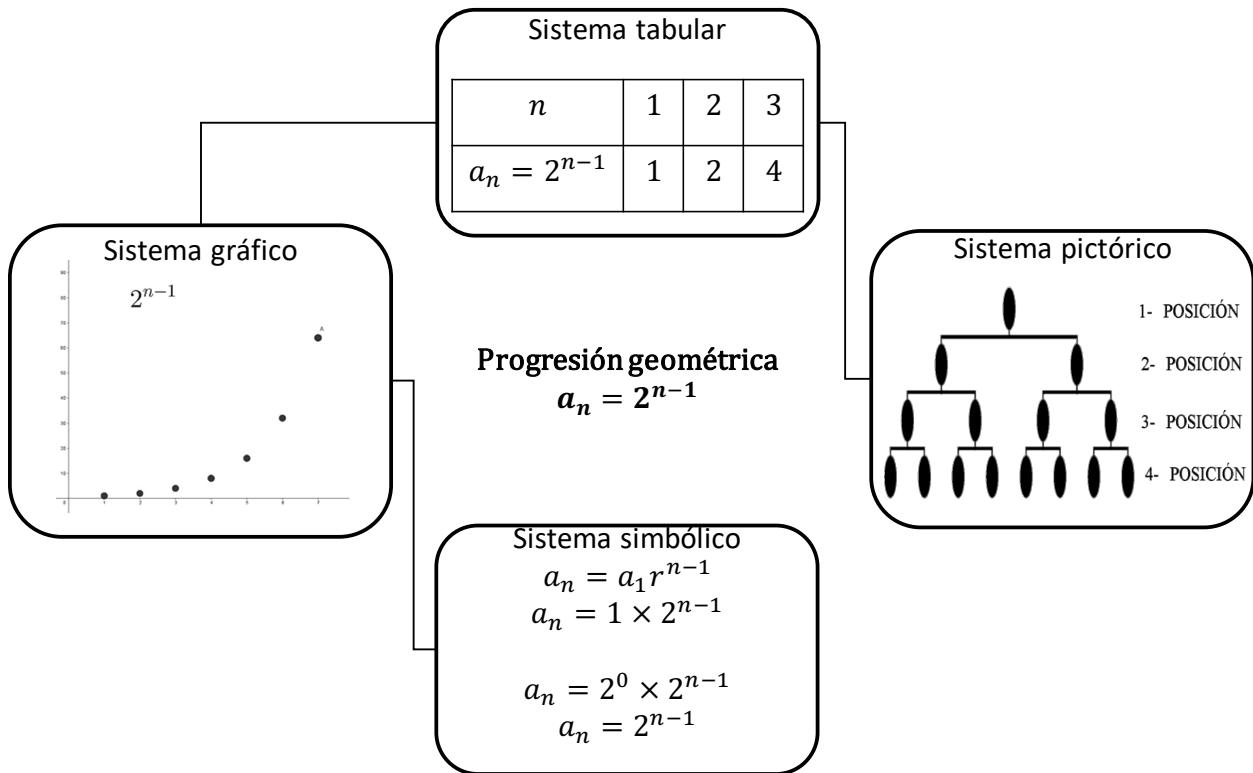


Figura 2. Sistemas de representación de la progresión $a_n = 2^{n-1}$

3. FENOMENOLOGÍA

En la tabla 1, presentamos los fenómenos asociados al tema de la progresión geométrica. Propusimos dos contextos fenomenológicos: el contexto de crecimiento y el contexto de decrecimiento. En el primer contexto, agrupamos los fenómenos de acumulación de capital y crecimiento poblacional entre otros. En el segundo contexto, organizamos los fenómenos de rebotes en el plano y de depreciación. Las subestructuras presentadas en la tabla 1, surgen de variar los parámetros r y a en el modelo matemático $a_n = a_1 r^{n-1}$. Por ejemplo, para que la progresión geométrica sea decreciente acotada, la razón debe estar entre valores mayores a cero y menores que uno, y el primer término mayor a cero. También para que la progresión sea decreciente la razón debe ser mayor a uno y el primer término menor que cero.

Tabla 1
Subestructuras, contextos fenomenológicos y fenómenos

Subestructura	Contexto fenomenológico	Fenómeno
$a_n = a_1 r^{n-1}$ $r > 1, a > 0$	Crecimiento	Acumulación de capital Crecimiento poblacional Mercado multinivel Circulación de información por redes sociales
$a_n = a_1 r^{n-1}$ $0 < r < 1, a < 0,$	Crecimiento acotado	Amortización de una deuda
$a_n = a_1 r^{n-1}$ $r < -1$	Alternantes divergentes	Cuando la razón toma valores negativos menores que menos uno
$a_n = a_1 r^{n-1}$ $-1 < r < 0$	Alternantes convergentes	Cuando la razón toma valores negativos mayores a menos uno y menores a cero
$a_n = a_1 r^{n-1}$ $r = 1$	Progresión constante	Número de horas en cada día
$a_n = a_1 r^{n-1}$ $0 < r < 1, a > 0$	Decrecimiento acotado	Rebotes en el plano horizontal Demografía Depreciación Decantación
$a_n = a_1 r^{n-1}$ $r > 1, a < 0$	Decrecimiento	Cantidad de dinero en mora por un préstamo.

3. ASPECTOS COGNITIVOS

El análisis cognitivo “nos permite hacer una descripción de lo que el profesor espera que el estudiante aprenda sobre el tema matemático en cuestión y de sus previsiones acerca del modo en que el estudiante va a desarrollar ese aprendizaje” (González & Gómez, 2018, pág. 113). En ese sentido, creemos que es necesario plantear las metas cognitivas o expectativas que definirán el aprendizaje de nuestros estudiantes. De igual modo, reconocemos que existen algunas limitaciones que impiden la consecución de logros para las cuales debemos establecer algunas estrategias de solución denominadas ayudas.

1. EXPECTATIVAS DE APRENDIZAJE

Las expectativas de aprendizaje consideran varios aspectos del estudiante. Estos aspectos se refieren a las capacidades matemáticas fundamentales, a los procesos matemáticos, a sus expectativas afectivas y al logro de los dos objetivos de aprendizaje que caracterizan la unidad didáctica. A continuación, describimos cada uno de estos aspectos en forma detallada.

1.1. Expectativas de aprendizaje de nivel superior

Las expectativas de aprendizaje se basan en los lineamientos del marco PISA 2012 (Ministerio de Educación Cultura y Deporte, 2013), los cuales, sugieren el desarrollo de capacidades matemáticas fundamentales y de procesos matemáticos que permiten que un estudiante logre ser matemáticamente competente. Nuestra unidad didáctica se enfoca en el desarrollo de las siguientes capacidades fundamentales y procesos matemáticos.

Capacidad de matematización

Esta capacidad se desarrolla cuando el estudiante identifica en las situaciones planteadas en las tareas de aprendizaje, las variables y la estructura correspondiente a la progresión geométrica en un escenario de su contexto.

Capacidad de diseño de estrategias

Esta capacidad se desarrolla cuando el estudiante es capaz de seleccionar o diseñar un plan para la formulación matemática y la solución de la situación concerniente a progresiones geométricas.

Capacidad de Representación

Esta capacidad se desarrolla cuando el estudiante expresa de distintas maneras la información que le proporciona la situación.

Proceso de formular

Este proceso se desarrolla cuando el estudiante identifica los aspectos matemáticos, la estructura e identifica las variables concernientes de la situación relacionada con la progresión geométrica, y realiza la traducción de esta al lenguaje matemático.

Proceso de emplear

Este proceso se desarrolla cuando el estudiante diseña estrategias y aplica los algoritmos propios para el cálculo de la razón, y/o de un término específico en una progresión geométrica.

1.2. Expectativas de aprendizaje de nivel medio

Con el fin de alcanzar las capacidades y procesos anteriormente mencionados, planteamos los siguientes objetivos que enfocan los propósitos de la unidad didáctica:

Objetivo 1

Caracterizar las progresiones geométricas crecientes con el uso de representaciones en contextos matemáticos y no matemáticos.

Objetivo 2

Emplear procesos matemáticos para determinar cualquier término de una progresión geométrica y justificar su uso en la solución de situaciones problema.

1.3. Expectativas de aprendizaje de nivel inferior

Las expectativas de aprendizaje de nivel inferior pretenden precisar las capacidades esenciales que el estudiante desarrollará para cada uno de los objetivos mencionados anteriormente. Para definir estas capacidades esenciales, decidimos indagar en aquellos conocimientos previos que el grupo de estudiantes posee (ver anexo 1). Por esta razón, la primera actividad que llevamos a cabo es la aplicación de una tarea diagnóstica (ver anexo 3) para determinar las dificultades y fortalezas del grupo. Asimismo, para establecer un plan de acción que le permita que al grupo superar las debilidades que puedan afectar el desempeño de los estudiantes en las tareas de aprendizaje de la unidad didáctica.

1.4. Expectativas afectivas

En la unidad didáctica, consideramos aspectos sobre la motivación y apropiación del estudiante al momento de resolver situaciones relacionadas con las progresiones geométricas. De esta manera, planteamos tres expectativas que mostramos en la tabla 2.

Tabla 2

Listado de expectativas afectivas del tema progresión geométrica

EA	Descripción
1	Desarrollar confianza en las propias habilidades para calcular los términos desconocidos en las progresiones geométricas
2	Desarrollar precisión en el uso de los modelos matemáticos para la resolución de problemas en contexto que involucren la progresión geométrica.
3	Generar una actitud favorable para el estudio de las características matemáticas de una progresión geométrica con el uso de herramientas que potencien su aprendizaje.

Nota. EA: expectativa afectiva.

2. LIMITACIONES DE APRENDIZAJE

Entendemos que “una dificultad de aprendizaje es una circunstancia que impide o entorpece la consecución de los objetivos de aprendizaje previstos y un error es la manifestación visible de la dificultad” (González & Gómez, 2018, págs. 139-141). Con base en la anterior definición, clasificamos los errores en tres tipos de dificultades de acuerdo con Acosta, Cuervo, Pinzón, & Salamanca (2017): (a) dificultad al identificar los elementos y características de las progresiones geométricas, (b) uso y traducción de los sistemas de representación de la progresión geométrica y (c) generalización y justificación de procedimientos algorítmicos en la progresión geométrica.

Las dos primeras dificultades están asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos. En este caso, el objeto matemático es la progresión geométrica. En nuestra unidad didáctica, la progresión tiene signos propios que son sometidos a reglas exactas (Socas, 1997, pág. 127). La tercera dificultad la encontramos en nuestra experiencia docente (González & Gómez, 2018, pág. 176). Por ejemplo, podemos ver que un error frecuente asociado a la tercera dificultad es el de omitir la coma cuando se opera con número decimales. Consideramos que los resultados se alteran y por ende la coherencia en la solución del problema. Para ampliar la información de este apartado invitamos al lector remitirse al anexo 2, en el cual aparece la tabla de clasificación de errores asociados a cada dificultad.

3. CRITERIOS DE LOGRO

Un aspecto importante dentro de la aplicación de nuestra unidad didáctica es generar criterios que se ajusten a los procedimientos realizados por los estudiantes en la solución de tareas de aprendizaje. Estos criterios permiten al profesor y a los estudiantes conocer el nivel de éxito alcanzado e identificar la estrategia de solución utilizada. En las tablas 3 y 4, describimos los criterios de logro para el primer y segundo objetivo respectivamente.

Tabla 3
Descripción de los criterios de logro del objetivo 1

Cdl	Descripción
Cdl 1.1	Identifico los datos en una situación relacionada con progresiones y establezco los primeros términos
Cdl 1.2	Organizo y represento los datos de la progresión utilizando símbolos
Cdl 1.3	Organizo y represento los datos de la progresión utilizando tablas
Cdl 1.4	Decido emplear un método para encontrar la razón
Cdl 1.5	Encuentro la razón de la progresión geométrica dividiendo un término entre el anterior
Cdl 1.6	Encuentro la razón de la progresión geométrica utilizando la técnica de ensayo y error
Cdl 1.7	Encuentro la razón de la progresión geométrica al transformar cada término en el producto de dos o más números
Cdl 1.8	Encuentro varios términos de la progresión utilizando la razón
Cdl 1.9	Relaciono los resultados con la situación planteada y justifico los procedimientos
Cdl 1.10	Uso regla de tres para encontrar la razón de una progresión geométrica

Cdl: Criterio de logro

Para caracterizar una progresión geométrica, prevemos que los estudiantes primero deben identificar los datos de una situación que se relaciona con progresiones. Luego, organizan la información para encontrar la razón y varios términos de la progresión. Por último, relacionan los resultados encontrados con la situación planteada. Con este proceso, los estudiantes justifican los resultados obtenidos y describen cada una de las características encontradas al resolver las tareas de aprendizaje. En la tabla 4, presentamos los criterios de logro del objetivo 2, que dan cuenta de las estrategias de solución que se prevé pueden usar los estudiantes para encontrar un modelo matemático que permita determinar cualquier término de una progresión geométrica.

Tabla 4
Descripción de los criterios de logro del objetivo 2

Cdl	Descripción
Cdl 2.1	Reconozco si una situación planteada está relacionada con una progresión geométrica
Cdl 2.2	Identifico los elementos de la progresión geométrica
Cdl 2.3	Decido representar la progresión geométrica
Cdl 2.4	Represento la progresión geométrica simbólicamente
Cdl 2.6	Represento la progresión geométrica con una tabla
Cdl 2.7	Reconozco la necesidad de encontrar la razón de una progresión geométrica
Cdl 2.8	Encuentro la razón de la progresión y la expreso en forma decimal
Cdl 2.9	Encuentro la razón de la progresión y la expreso en forma de fracción
Cdl 2.10	Decido hallar el término pedido de la progresión geométrica
Cdl 2.11	Calculo cualquier término de la progresión geométrica utilizando el término general
Cdl 2.12	Calculo cualquier término de la progresión geométrica utilizando la razón
Cdl 2.13	Verifico la coherencia de los resultados, según la información y el contexto del problema

Cdl: Criterio de logro

Para encontrar un modelo matemático que permita hallar cualquier término de una progresión geométrica, prevemos que los estudiantes, realizan procedimientos para reconocer que la situación planteada corresponde a una progresión geométrica e identificar sus elementos. También, hacen uso de algunos sistemas de representación, calculan los términos de la progresión y verifican la coherencia de los resultados obtenidos con el contexto del problema.

4. GRAFOS DE CRITERIOS DE LOGRO DE LOS OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

En el anterior apartado, describimos la necesidad de plantear criterios de logro que permiten explicar el nivel de éxito al abordar situaciones asociadas al concepto de progresión geométrica. En consecuencia, es necesario diseñar tareas de aprendizaje que contribuyan al logro de los objetivos en su implementación. En las figuras 3 y 4, presentamos por medio de un grafo de criterios de logro, las posibles estrategias que pueden llevar a cabo los estudiantes al resolver las tareas de aprendizaje de los objetivos de nuestra unidad didáctica. Estas tareas, contribuyen a la consecución

de cada objetivo en la medida en que el estudiante desarrolle los procedimientos inmersos en los criterios de logro expuestos.

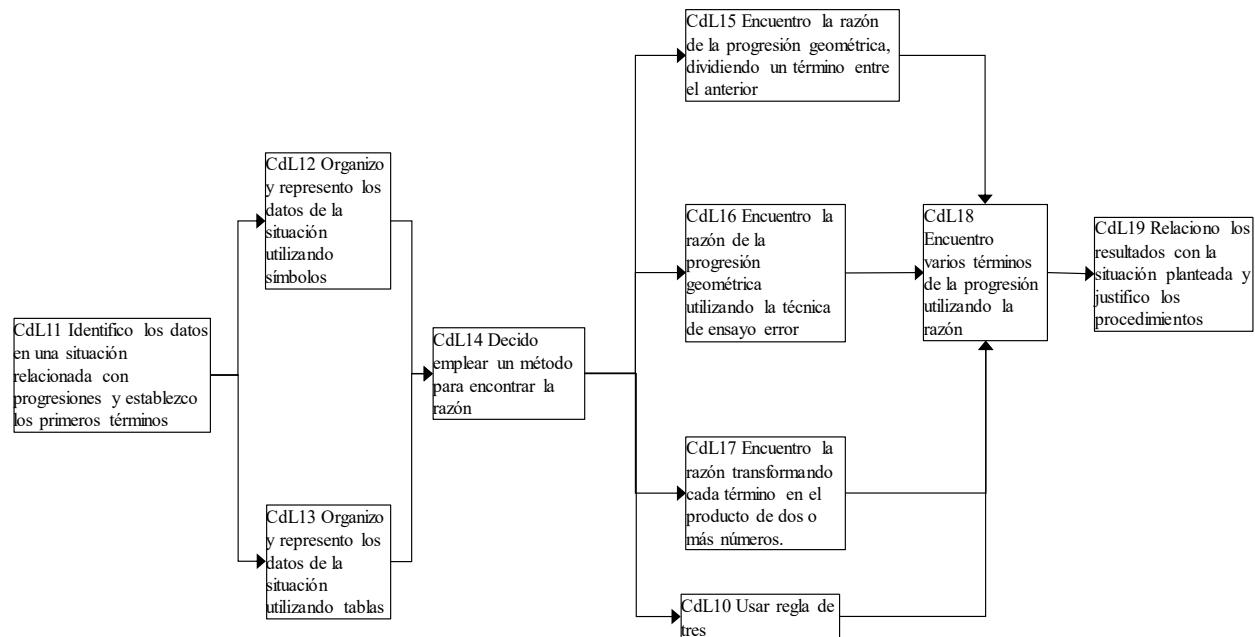


Figura 3. Grafo de criterios de logro del objetivo 1

En el grafo de criterios del objetivo 1, podemos observar que, para resolver una tarea de aprendizaje, el estudiante identifica los datos de la situación y establece los primeros términos, aquí puede presentar dificultades al incurrir en errores al reunir parcialmente la información. Luego, el estudiante decide entre organizar y representar la información por medio de tablas o representar únicamente utilizando símbolos matemáticos. Una posible estrategia de solución de una tarea de aprendizaje para el objetivo 1, es que el estudiante identifica los datos, organiza por medio de una tabla, decide emplear la técnica de ensayo y error para encontrar la razón de la progresión geométrica, encuentra varios términos de la progresión y, por último, relaciona los resultados obtenidos con la situación planteada justificando sus procedimientos. El grafo de criterios de logro nos permite hacer un seguimiento a los procedimientos llevados a cabo por el estudiante, así como las dificultades presentadas a medida que avanza en la solución de la tarea. Con base en esto, la intervención del profesor se hace más importante al ofrecer ayudas que permitan que el estudiante supere dichas dificultades.

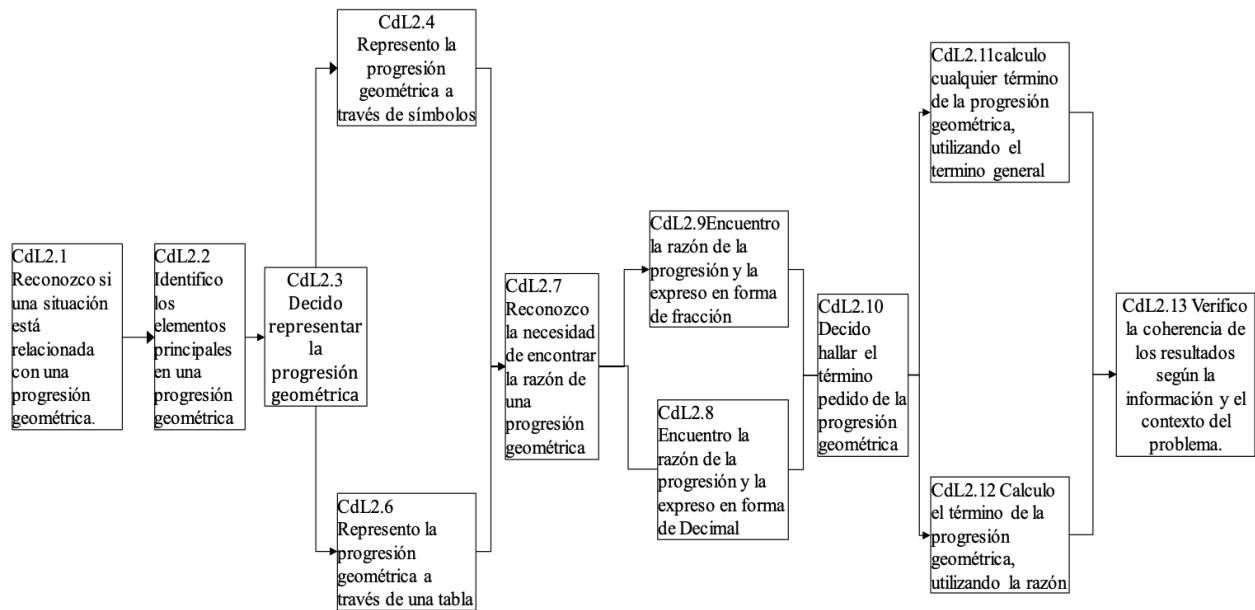


Figura 4. Grafo de criterios de logro del objetivo 2

En la figura 4, presentamos el grafo de criterios de logro del objetivo 2. Con esto grafo, mostramos los posibles caminos de aprendizaje para resolver las tareas de aprendizaje del segundo objetivo. Un ejemplo del camino de aprendizaje que podría seguir el estudiante es que primero reconozca si la situación está relacionada con una progresión geométrica. Si el estudiante presenta dificultades en este criterio al incurrir en el error de pensar que la progresión es aritmética, el profesor tendrá previstas ayudas como recordar que dentro de las progresiones geométricas la razón es multiplicativa y no aditiva. Esto le permitirá avanzar al estudiante dentro del grafo al criterio de logro 2.2 para identificar los principales elementos de una progresión geométrica. A continuación, el estudiante toma la decisión de representar la progresión geométrica a través de una tabla, lo cual, haría que su estrategia siguiera un camino por la parte inferior del grafo. En este sentido, realizar los procedimientos que representan cada criterio de logro, y superar las dificultades que se puedan presentar, implica que, de llegar al final del grafo, se cumplirá con el objetivo que la tarea de aprendizaje pretende contribuir. Vale la pena aclarar, que cada uno de los criterios de logro tiene algunos errores asociados que se encuentran descritos en el anexo 2 y, para los cuales fue necesario establecer algunas ayudas. Esto con el fin de que los estudiantes pudieran avanzar en los procedimientos representados en el grafo del objetivo.

4. ESQUEMA GENERAL DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

La unidad didáctica está diseñada para nueve sesiones, algunas de 55 minutos y otras de 110 minutos aproximadamente. Las tres primeras sesiones corresponden a la aplicación de la prueba diagnóstica, su realimentación y la presentación de la unidad didáctica (sus propósitos, el diligenciamiento de los formatos, la dinámica que se llevará a cabo, etc.). Durante las siguientes 6 sesiones se aplican las tareas de aprendizaje tal como se muestra en la tabla 5. Una vez finalizada la aplicación de cada tarea se realiza la realimentación como preparación para la siguiente tarea de aprendizaje. Finalmente, se realiza el examen final, su respectiva realimentación para extraer conclusiones del proceso llevado a cabo, determinando así el cierre de la unidad didáctica.

Tabla 5
Descripción de la secuencia de tareas

Sesión	Objetivo	Tarea	Metas	Tiempo
1		Diagnóstica	Aplicar la tarea diagnóstica	55'
2		Diagnóstica	Realizar la realimentación de la tarea diagnóstica	110'
3		Introducción	Presentar la unidad didáctica, las expectativas y la manera como se desarrollará la misma.	55'
4	1	T1.1	Generar la lista de términos de las progresiones, definir características como la razón y crecimiento o decrecimiento. Realimentar y hacer una puesta en común acerca de las características encontradas en la actividad 1.1. Explicar conceptos básicos para la actividad 1.2 acerca del manejo de un CDT	110'
		T1.2	Describir la situación presentada al emplear los elementos de la progresión geométrica, contribuir a las capacidades propias de la representación tabular y superar errores como establecer que la situación es aritmética cuando realmente es geométrica. Realimentar la	110'
5	1			

Tabla 5
Descripción de la secuencia de tareas

Sesión	Objetivo	Tarea	Metas	Tiempo
6	2	T2.1	actividad 1.2 y hacer una contextualización la actividad 2.1	
		T2.2	Generar la necesidad de utilizar un modelo matemático de la progresión geométrica. Realimentar la actividad 2.1, y hacer una contextualización de la actividad 2.2.	110'
7	2		Extraer datos a partir de la variación de las dimensiones mostradas en la situación, organizar la información y definir las características de la progresión geométrica. Encontrar el patrón numérico de la progresión geométrica y reconocer la importancia de utilizar una expresión matemática generalizada	110'
		Evaluación	Aplicación de la tarea de evaluación (Examen final)	55'
8	1 y 2	Cierre de la unidad	Realizar la realimentación del examen y extraer conclusiones del proceso realizado	55'

Nota. T1.1 = Esferas; T1.2 =CDT; T2.1 = Pelota de Ping-pong; T2.2 = Formatos de papel;

5. TAREA DIAGNÓSTICA

El principal propósito de la tarea diagnóstica es indagar sobre los conocimientos previos de los estudiantes y determinar el punto de partida para la implementación de la unidad didáctica. En ese sentido, diseñamos esta tarea diagnóstica con base en el listado de conocimientos previos que se encuentra en el anexo 1. Planteamos preguntas relacionadas con la información del listado de conocimientos previos para establecer los requerimientos necesarios del tema progresión geométrica. En la elaboración de la tarea diagnóstica, seleccionamos los requerimientos generales, es decir, aquellos que se necesitan para abordar los dos objetivos de aprendizaje. Luego, tomamos los requerimientos específicos, es decir, aquellos que se utilizan en un determinado objetivo. Por ejemplo, encontramos que un conocimiento previo general es el uso de operaciones con números reales. Este conocimiento es indispensable, ya que en todas las tareas de la unidad didáctica los estudiantes requieren el uso de la multiplicación y la división, ya sea, para reconocer la existencia de la razón o para emplearla cuando se quiere encontrar un término de la progresión.

Un conocimiento previo que se requiere de manera particular en el alcance del segundo objetivo tiene que ver con el cálculo del valor numérico de expresiones algebraicas. Es necesario que los estudiantes usen el término general de una progresión geométrica, esto incluye reemplazar adecuadamente los valores correspondientes para el primer término y la razón. También es importante que los estudiantes reconozcan la jerarquía de las operaciones. En este caso, desarrollar primero la potencia y luego la multiplicación al momento de hallar cualquier término de la progresión. Por otro lado, encontramos conocimientos previos específicos que se requieren en determinadas tareas, uno de ellos, tiene que ver con calcular porcentajes y transformarlos en sus distintas expresiones.

La tarea diagnóstica está centrada en identificar algunos errores frecuentes que presentan los estudiantes a la hora de poner en juego sus conocimientos. Evidenciamos errores comunes como el de omitir la coma al realizar operaciones con números decimales. Este error altera los resultados en las operaciones y como consecuencia se obtienen soluciones incoherentes que no responden a las situaciones planteadas.

1. ELEMENTOS DE LA TAREA

Con la tarea diagnóstica, nuestra principal meta es utilizar la información sobre la actuación de los estudiantes, reconocer sus habilidades y determinar las estrategias o ayudas que se necesitan a la hora de abordar las tareas de aprendizaje. En el desarrollo de la tarea diagnóstica los estudiantes emplean photocopies, lápiz y papel. La tarea se realiza de manera individual durante la primera sesión y no representa ninguna valoración cuantitativa asociada al sistema de evaluación de estudiantes de la institución en la que fue implementada.

La tarea diagnóstica se encuentra en el anexo 3 y contiene nueve preguntas a modo de cuestionario. A continuación, exponemos algunas preguntas para mostrar el estilo de la tarea.

1. La gravedad de la Luna es 1/6 de la de la tierra. Si la gravedad de la Tierra es 9,8 m/s². ¿Cuál es la gravedad de la Luna? (Oteyza, 2004, pág. 73)
2. Efectúe la operación sin calculadora: $0,25 \left(\frac{8}{9} + \frac{1}{2} \right)$
3. Exprese el racional 0.07 en forma de porcentaje
4. Encuentre el 20% de 16

Con la primera pregunta, pretendemos que los estudiantes reconozcan la necesidad de encontrar la sexta parte de la gravedad de la tierra. Para encontrar la respuesta a este cuestionamiento, el estudiante puede proceder de diversas maneras en las que debe hacer uso de las operaciones con números racionales. Con esta y otras preguntas podemos verificar si los estudiantes cuentan con el dominio de los procedimientos, o en su defecto incurren en alguno de los errores frecuentes.

6. TAREAS DE APRENDIZAJE

Presentamos las tareas de aprendizaje de nuestra unidad didáctica con base en los elementos que determinan una tarea en (Gómez, Mora, & Velasco, 2018). También, describimos algunas recomendaciones metodológicas que consideramos para su implementación.

1. TAREA 1.1 ESFERAS

En el presente apartado, presentamos nuestra primera tarea de aprendizaje denominada esferas. Con esta tarea, pretendemos que los estudiantes identifiquen algunas características de las progresiones geométricas como los términos y la manera en la que se relacionan entre ellos por medio de la razón. Esta tarea, contribuye en gran medida al objetivo 1, ya que, brinda a los estudiantes la oportunidad de analizar diversas progresiones y compararlas para observar sus características.

1.1. Descripción de la tarea esferas

Describimos nuestra primera tarea de aprendizaje con base en los siguientes elementos que la conforman.

Requisitos de la tarea

Para abordar la tarea, el estudiante debe estar en la capacidad de identificar patrones o generalidades; realizar sumas y divisiones entre números reales para calcular los términos de la progresión y la relación (razón) que existe entre estos, además, se requiere que pueda justificar los procedimientos utilizados al resolver una situación matemática.

Metas de la tarea

En esta tarea de aprendizaje, pretendemos que el estudiante perciba la necesidad de extraer y organizar la información para encontrar la razón de la situación de variación. También pretendemos que el estudiante perciba la necesidad de encontrar los términos de la progresión y describir la manera en que crece o decrece la progresión, además de, verificar si crece en forma aritmética o geométrica. El estudiante debe tratar de encontrar la mayor cantidad de relaciones y regularidades en las progresiones existentes.

Formulación de la tarea

En la figura 5, presentamos la formulación de la tarea que se presenta a los estudiantes por medio de una fotocopia que se entrega de manera individual.

COLUMNA A	COLUMNA B	COLUMNA C
FILA 1	1 2 4	7
FILA 2	8 16 32	56
FILA 3	64 128 256	448
FILA 4		
FILA 5		
FILA 6		

En la figura, se muestra un conjunto de esferas ordenadas de forma rectangular. A cada fila de la columna A, le corresponde un valor de la columna C. Además, los resultados de la columna c, se obtienen a partir de las esferas de la columna B.

- Indique los valores que corresponden a la columna C completando los espacios en blanco.
- Indique para qué fila de la columna A, el valor de la columna C es mayor que veinte mil.
- Describa la estrategia usada para resolver la situación.



Figura 5. Tarea 1.1 Esferas

Conceptos y procedimientos

En esta tarea, consideramos que el estudiante caracteriza diferentes progresiones geométricas por medio de elementos como los términos de una progresión, la razón, el crecimiento o decrecimiento en una situación de variación y, además, descompone términos para encontrar constantes de crecimiento o decrecimiento.

Sistemas de representación

En el desarrollo de la tarea, el estudiante se ve enfrentado a organizar la información presentada, para tomar decisiones sobre la forma en que representará la información. El estudiante puede decidir entre representar la información por medio de una tabla, o por medio de símbolos que describan el comportamiento de la progresión que describe la situación.

Contexto

Esta tarea se desarrolla en un contexto científico, ya que se le solicita al estudiante que encuentre un resultado en una situación que muestra diferentes progresiones geométricas.

Materiales y recursos

La actividad requiere presentar la figura al estudiante ya sea por medio de recursos audiovisuales o por medio de fotocopias para cada estudiante. Se necesitan los materiales básicos escolares como cuaderno, lápiz, esferos, borrador, etc. Para la puesta en común de los acuerdos y las soluciones se puede utilizar marcadores y papel periódico.

Agrupamiento e interacción

Los estudiantes se organizan en un primer momento de manera individual para abordar la situación e identificar algunas características de las progresiones geométricas. Luego conforman grupos de tres personas para discutir la manera de abordar el problema y llegar a acuerdos comunes. Por último, cada grupo comparte su solución y expone las características encontradas en la situación de la tarea. El profesor debe estar en constante comunicación con los estudiantes para resolver las dudas presentadas por los estudiantes y aplicar las ayudas necesarias.

Temporalidad

1. Presentación de la tarea por parte del docente (aproximadamente 15 minutos).
2. Trabajo individual para que cada estudiante encuentre alguna estrategia de solución de la situación (25 minutos).
3. Trabajo en grupo, para llegar a acuerdos. Luego, cada grupo elige un integrante para exponer la solución (15 minutos).
4. Exposición por parte de los representantes de cada grupo (25 minutos).
5. Intervención por parte del docente y evaluación (20 minutos).

Errores en los que puede incurrir el estudiante

Al abordar esta tarea, el estudiante puede incurrir en los siguientes errores:

- ◆ Reunir parcialmente la información al realizar la lectura. Por ejemplo, que el estudiante no reconozca que los resultados de la columna C, se obtienen a partir de la columna B.
- ◆ Identificar que la progresión es aritmética en lugar de geométrica o establecer inadecuadamente las razones o proporción.

Grafo de criterios de logro

A continuación, presentamos por medio de un grafo de criterios de logro, las diferentes estrategias de solución que puede tomar un estudiante al resolver la tarea 1.1 esferas.

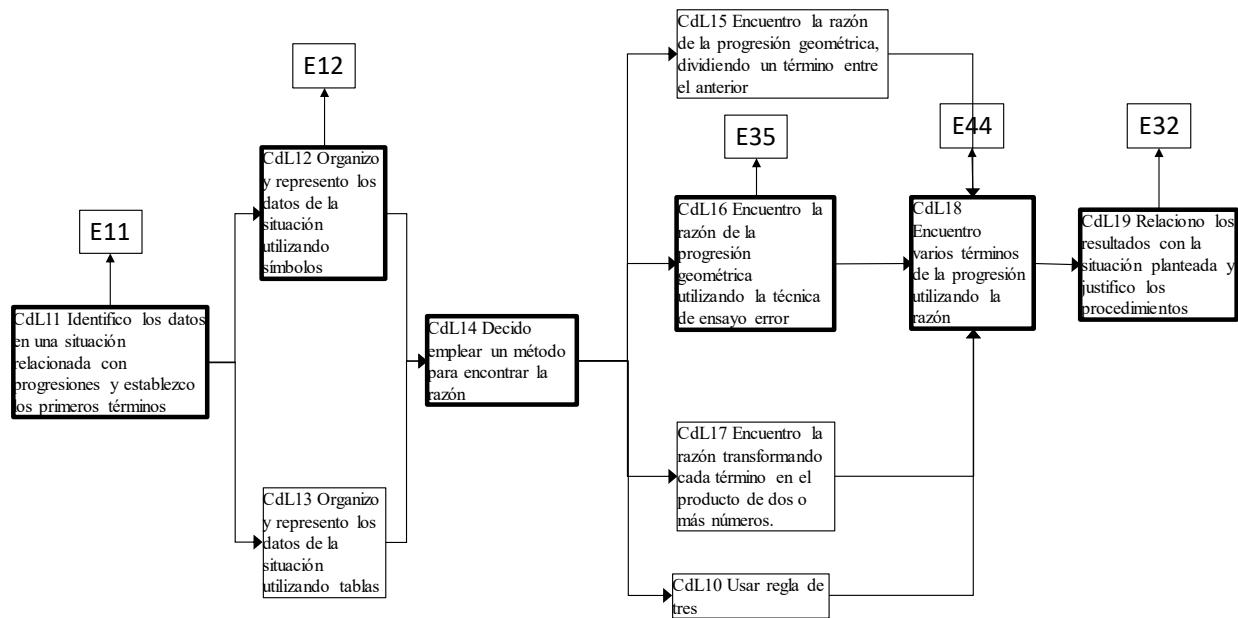


Figura 6. Grafo de criterios de la tarea 1.1Esferas

La estrategia de solución que favorece la tarea esferas es la que involucra los criterios 1.1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8 y 1.9. En este camino de aprendizaje, el estudiante identifica los datos de la situación, representa por medio de símbolos, decide hallar la razón por medio de ensayo y error, encuentra varios términos de la progresión y, por último, justifica los resultados obtenidos.

Sugerencias metodológicas

Para la implementación de la tarea es conveniente que el docente haga énfasis en las características de una progresión geométrica y para esto puede realizar preguntas acerca de la variación de las diferentes progresiones presentadas. Otro aspecto importante, es que promueva la interacción de los estudiantes durante el trabajo en grupos. De esta manera, cada estudiante podrá encontrar las formas en la que se relacionan los términos entre sí.

Evaluación

Durante la implementación de la tarea, el docente debe centrar su atención en los procedimientos que realizan los estudiantes al representar las progresiones. Otro aspecto importante, es que el docente debe prestar atención a las diferentes estrategias que usan los estudiantes para poder encontrar la razón de las progresiones. Debe observar los errores en los que incurre cada estudiante, por ejemplo, en la forma de organizar la información o justificar los resultados obtenidos.

2. TAREA 1.2 CDT

Con la primera tarea de aprendizaje de la unidad didáctica, propiciamos y centramos el interés de los estudiantes a partir de una secuencia de números que conllevan a una progresión geométrica en un contexto matemático profesional. Con esta segunda tarea de aprendizaje del primer objetivo

“CDT”, buscamos que el estudiante identifique las características principales de una progresión geométrica (sus primeros términos, la razón, su comportamiento creciente o decreciente) en un contexto social. Además, pretendemos que el estudiante interprete la información presentada en una tabla y use esta representación para dar respuesta a la situación

A continuación, describimos la tarea y mostramos sus elementos. Adicionalmente, presentamos algunas sugerencias metodológicas que se pueden tener en cuenta al momento de su aplicación. La formulación completa de esta tarea se encuentra en el anexo 4, también aparece en el anexo 5 correspondiente al diario del estudiante. El diario es una herramienta que permite obtener la concepción del estudiante con respecto al alcance de expectativas de tipo cognitivo y afectivo.

2.1. Descripción de la tarea

Para describir esta tarea de aprendizaje, mencionamos sus principales elementos (requisitos previos, aportes al objetivo, formulación de la tarea, conceptos y procedimientos, entre otros), aspectos esenciales para comprender la dinámica de su aplicación y los propósitos de esta.

Requisitos de la tarea de aprendizaje

Para obtener éxito en el desarrollo de esta tarea de aprendizaje, se requiere que el estudiante sea capaz de realizar divisiones de dos cifras, resolver multiplicaciones y/o potenciaciones entre números reales.

Metas

Descubrir que la división entre dos términos consecutivos de la progresión es la manera más eficiente de encontrar la razón de la progresión y a su vez superar errores como establecer que la situación es una progresión es aritmética cuando realmente es geométrica.

Aportes de la tarea al primer objetivo de aprendizaje

Con esta tarea de aprendizaje se pretende que los estudiantes identifiquen los elementos de la progresión geométrica en la situación presentada para describir el comportamiento de esta.

Formulación de la tarea

El siguiente es un estado de cuenta de un CDT que abrió el señor Hermenegildo el 3 de marzo del 2019 con valor inicial de \$2'000.000 en el Banco Rota:

BANCO ROTA

Bienvenido: Señor(a) Hermenegildo Blanco Pereda

	vencimiento del CDT:	mensual
Fecha de emisión del CDT	3 de marzo del 2019	

<i>meses vencidos</i>	Capital Obtenido
0	2'000.000
1	2'200.000
2	2'420.000
3	2'662.000
4	

Figura A Estado de cuenta del CDT

En julio del 2019 el señor Hermenegildo piensa cancelar dicho CDT, ¿Cuánto dinero debe recibir para ese entonces?, ¿Cuánto dinero habrá ganado en esos 4 meses?

*Un CDT (Certificado de Depósito a Término), es un título valor que emite un banco a un cliente que ha hecho un depósito de dinero por un plazo determinado que debe ser como mínimo de 30 días.

Conceptos y procedimientos

Es preciso que el estudiante tenga la habilidad de argumentar de manera escrita la lógica con la que abordó la situación a través de procedimientos claros y ordenados. Asimismo, se espera que el estudiante active la capacidad de interpretar los procedimientos y explicaciones verbales de su(s) compañero(s).

Sistema de representación

El sistema de representación que usualmente utiliza el estudiante en esta tarea es el sistema tabular, al interpretar la información contenida en la tabla que se indica en la formulación y posiblemente usar esta misma o crear otra para dar respuesta a la situación.

Contexto

El contexto que se desarrolla en esta tarea es social, pues el ahorro a través de un CDT se maneja exclusivamente en el banco donde se abrió dicha cuenta, y por lo tanto en donde dicho banco tenga sucursales.

Materiales y recursos

Los materiales que se requieren para la presentación y el desarrollo de la tarea son: tablero, marcadores, fotocopias, lápiz y papel. En cuanto a la representación de la situación es necesario contar con una regla para elaborar las tablas. Dependiendo de la precisión de los estudiantes al operar con divisiones es posible que se requiera el uso de calculadora, ya que permite realizar los cálculos de manera eficaz.

Agrupamiento de la tarea

El desarrollo de esta tarea de aprendizaje comprende tres momentos en los que el estudiante interacciona de distintas maneras. En el primer momento, los estudiantes trabajan en forma individual. Durante la realimentación de la tarea de aprendizaje 1.1, se destaca la manera como se determinó la razón de la progresión geométrica. Además, en este momento también se presenta la tarea de aprendizaje 1.2. Se explica el propósito y dinámica del trabajo para esta sesión. Posteriormente,

los estudiantes responden a la tarea de manera individual, mientras, que el profesor acompaña de manera continua a los estudiantes y observa la manera en que ellos abordan la situación. A partir de esto, el profesor orienta a los estudiantes a través de diversas preguntas.

- ◆ ¿Cómo interpretas el aumento de los valores del capital mes a mes?
- ◆ ¿El capital mes a mes aumenta de acuerdo con un factor o a una diferencia constante?
- ◆ ¿Cuál es la razón de aumento entre los valores?
- ◆ ¿Cómo se puedo calcular el capital que tendrá en el próximo mes?

En el segundo momento cada estudiante interactuará con su homólogo asignado, comparte sus procedimientos y explicaciones para acordar una respuesta final. En el tercer momento, se volverá a intervenir al grupo para dar las conclusiones y recomendaciones del trabajo observado.

Temporalidad de la tarea

1. Realimentación de la primera tarea de aprendizaje (20 minutos)
2. Presentación de la segunda tarea de aprendizaje y desarrollo de manera individual (30 minutos).
3. Trabajo en parejas en el que los estudiantes comparan y discuten sus soluciones (30 minutos).
4. Conclusiones, recomendaciones y evaluación del trabajo realizado (25 minutos).

Errores en los que puede incurrir el estudiante

Es posible que el estudiante en esta tarea determine la razón y/o el siguiente término de la progresión, empleando la técnica de ensayo error, dividiendo un término entre el anterior, o empleando una regla de 3. Ante estas estrategias es posible que el estudiante incurra especialmente en los siguientes errores:

- ◆ E21 Dividir términos no consecutivos de la progresión geométrica para calcular la razón.
- ◆ E40 Realizar operaciones entre números reales sin tener en cuenta las propiedades de estos.

Los anteriores son los errores más comunes en esta tarea. Sin embargo, es posible que los estudiantes durante el desarrollo de la tarea de aprendizaje incurran en muchos otros muchos, un ejemplo de estos se encuentra detallado en el anexo 2.

Grafo de criterios de logro

A continuación, en la figura 7 retomamos el grafo de criterios de logro del objetivo para indicar las diferentes estrategias de solución que son viables y/o eficaces para resolver la tarea de aprendizaje “abriendo un CDT”.

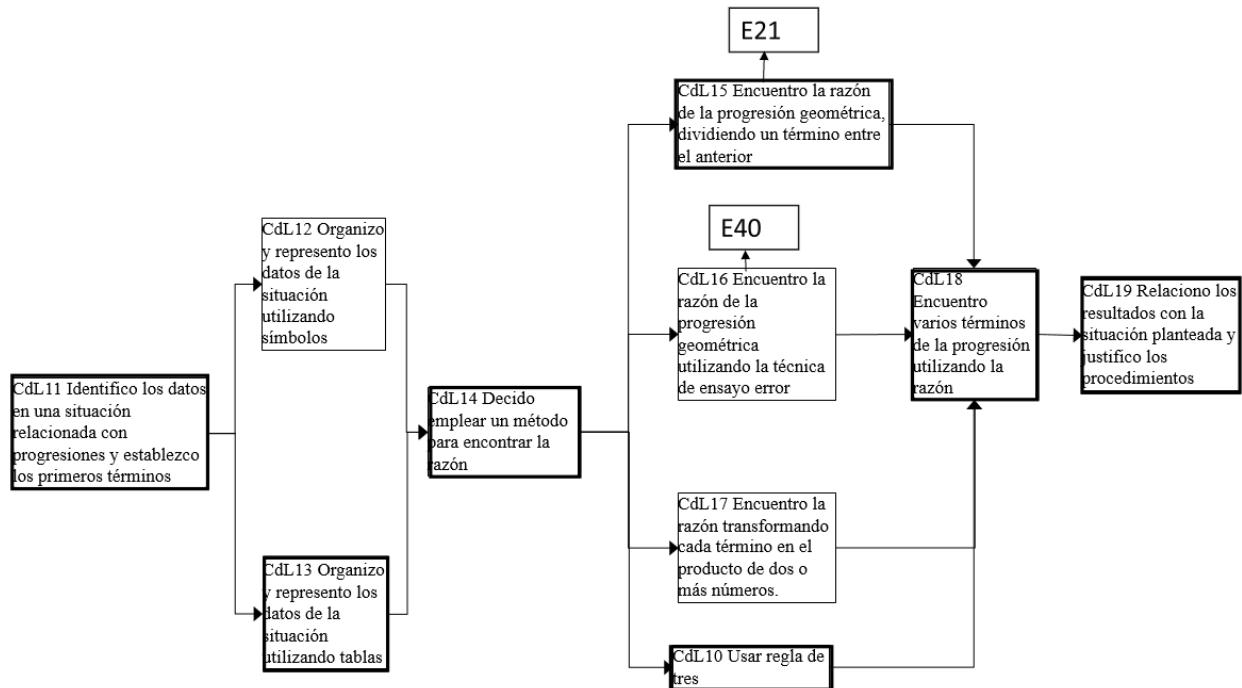


Figura 7. Grafo de criterios de la tarea 1.2

La estrategia de solución que favorece la tarea de aprendizaje 1.2 Abriendo un CDT, es aquella que activa los criterios de logro CdL 1.1, 1.3, 1.4, 1.5, 1.8 y 1.9. Puesto que, como se mencionó anteriormente, esta tarea pretende reforzar en los escolares la interpretación de tablas (CdL 1.3) y reconocer que la división de un término de la progresión entre el anterior es el método más eficaz para calcular la razón de una progresión.

Sugerencias metodológicas

A partir de la experiencia en el desarrollo de esta tarea, planteamos algunas sugerencias metodológicas que facilitan la comprensión por parte de los estudiantes y por ende optimiza la consecución de los propósitos.

- ◆ Es importante realizar previamente a la aplicación de la tarea una explicación muy clara de lo que es un CDT
- ◆ A diferencia de la tarea anterior, en esta tarea la razón no es tan fácil de identificar. Por lo tanto, el momento clave de esta tarea se enfocará en este proceso. Es importante realizar observaciones que les permita reconocer que esta no es una progresión aritmética, ya que usualmente es la primera impresión que tienen los estudiantes. Para superar esta dificultad al momento de hallar la razón, recomendamos realizar énfasis en las posibles maneras para calcular la razón cuando se realice la realimentación de la tarea esferas

Evaluación

Como mencionamos anteriormente, los aspectos clave de esta tarea de aprendizaje están en la interpretación y uso de las tablas para resolver la situación, y en el correcto y eficiente cálculo de

la razón. Por lo tanto, la evaluación se debe enfocar en estos dos aspectos, teniendo en cuenta la exactitud, eficacia en el cálculo de la razón, y la claridad en el uso de tablas para la solución de la tarea.

3. TAREA 2.1 PELOTA DE PING-PONG

La tarea de aprendizaje pelota de ping-pong tiene la intención de propiciar el uso del modelo matemático de la progresión geométrica para encontrar cualquier término. En este sentido, la tarea contribuye con objetivo 2 al emplear procesos matemáticos para hallar cualquier término de una progresión geométrica.

3.1. Descripción de la tarea

Presentamos la descripción de la tarea en relación con los requisitos, las metas, el aporte al objetivo 2, la formulación de la tarea, los conceptos y procedimientos, los sistemas de representación, los contextos PISA 2012, los recursos, el agrupamiento, la interacción y finalmente la temporalidad.

Requisitos de la tarea

Es importante que, los estudiantes antes de iniciar la tarea de aprendizaje estén en la capacidad de realizar operaciones básicas con números reales como la multiplicación y la división, identificar los primeros elementos de una progresión geométrica, calcular la razón, y remplazar en la fórmula de término n-ésimo.

Metas

Con esta tarea, los estudiantes utilizan el modelo matemático de la progresión geométrica para predecir la altura de una pelota de ping-pong después de determinados rebotes. Se prevé que se superen errores como el de calcular de manera equivocada el término n-ésimo, en una progresión geométrica.

Aporte de la tarea a los objetivos

La tarea contribuye directamente al objetivo 2. Esta contribución la argumentamos en el sentido de que promueve en el estudiante la necesidad de usar el modelo de la progresión geométrica para hallar cualquier término.

Formulación de la tarea

La experiencia en los deportes con pelotas nos dice que, si dejamos caer una pelota en caída libre hacia el suelo la pelota rebota a una altura menor que la altura inicial. Para iniciar con la tarea deja caer una pelota de ping-pong (amarilla o blanca) desde un metro de altura y de fondo una cartulina con los cm marcados.

- ◆ Toma registro filmico del experimento como se observa en la figura 8.

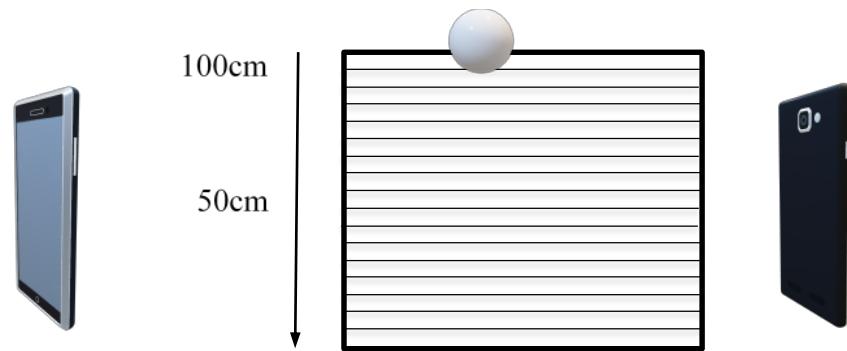


Figura 8. Lanzamiento de una pelota de ping-pong

- ◆ Ubica los datos en un plano cartesiano relacionando el rebote con la altura como en la figura 9. Registra las primeras veinte alturas de cada rebote de la pelota.

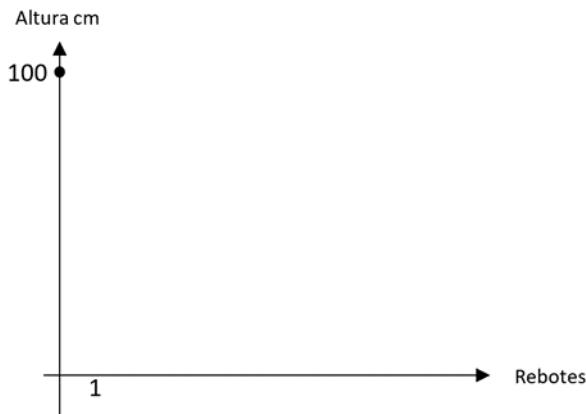


Figura 9. Plano cartesiano para registrar la altura en cada rebote

Conceptos y procedimientos

Los conceptos necesarios para abordar la tarea son los siguientes.

- ◆ Identificar los primeros términos de la progresión
- ◆ Calcular la razón
- ◆ Conocer el modelo matemático del término general

Los procedimientos más destacados en la tarea son los siguientes.

- ◆ Registrar la altura de los primeros rebotes de la pelota de ping-pong
- ◆ Dividir la medida de la altura de un rebote con el anterior
- ◆ Reemplazar el cardinal del término, el primer término y la razón en el modelo $a_n = a_1 r^{n-1}$
- ◆ Efectuar operaciones básicas con números reales como la multiplicación y la potenciación

Sistemas de representación

Los sistemas de representación utilizados en la tarea son el sistema tabular y el sistema gráfico. El sistema tabular en cuanto al registro de los datos en una tabla relacionando el número del rebote y

su altura. El sistema gráfico en cuanto a la ubicación de cada rebote (eje x) versus la altura (eje y) en el plano cartesiano.

Contextos

El contexto relacionado con el marco PISA 2012 es el contexto personal ya que la tarea se relaciona con el juego del ping-pong.

Materiales y recursos

Los recursos empleados en la tarea son los siguientes.

- ◆ Pelota de ping-pong
- ◆ Cartulina o papel bond de un metro graduada en centímetros
- ◆ Celular con capacidad de grabar en cámara lenta

Agrupamiento e interacción

Dada la naturaleza dinámica de la tarea es necesario que la tarea se realice en pequeños grupos de cuatro integrantes. La conformación de los pequeños grupos se realiza según el criterio del docente, se sugiere que el agrupamiento se haga teniendo en cuenta la capacidad filmica de los celulares.

La interacción de esta tarea de aprendizaje ocurre en cuatro momentos: (a) Inicialmente el profesor hace la realimentación de la tarea 1.2 CDT y da las indicaciones puntuales de la tarea a los estudiantes de tal forma que no se presente ambigüedades para el inicio de esta. Luego en otra etapa de interacción, (b) el profesor conforma los grupos teniendo en cuenta los criterios de material y de orden. Posteriormente (c) los estudiantes hacen uso del material para proceder con el desarrollo de la tarea junto con la asesoría del profesor para superar los posibles obstáculos que se presenten. Finalmente (d) se reúne el gran grupo para socializar la actividad pegando en las paredes del salón las gráficas solicitadas en la tarea.

Temporalidad

Esta tarea de aprendizaje tendrá cuatro etapas.

1. Realimentación de la tarea 1.2 CDT y da las indicaciones de la tarea por parte del docente (20 minutos)
2. Conformación y ubicación de los pequeños grupos (10 minutos)
3. Desarrollo de la tarea por parte de los pequeños grupos (60 minutos)
4. Socialización con el gran grupo (15 minutos)

Errores en los que puede suceder un estudiante

Los errores en los que pueden suceder los estudiantes son los siguientes:

- ◆ Operar inadecuadamente los términos del modelo algebraico que identifica las progresiones geométricas
- ◆ Utilizar una expresión algebraica que no representa la progresión geométrica
- ◆ Ubicar de manera inapropiada los datos del enunciado en las casillas de la tabla

- ◆ Diferenciar de manera incorrecta el primer término, la razón, el ordinal¹ y/o los términos de una progresión geométrica
- ◆ Realizar una operación diferente a la división entre un término y el anterior
- ◆ Realizar una operación diferente al producto para encontrar el término siguiente
- ◆ Establecer que una progresión es creciente, cuando es decreciente
- ◆ Reemplazar las variables en la expresión algebraica de la progresión geométrica, de manera inadecuada

Grafos

En la figura 10, presentamos el grafo de criterios de logro de la tarea T2.1 Pelota de ping-pong. El grafo de criterios de logro muestra el procedimiento que el estudiante sigue para resolver la tarea. En el procedimiento, el estudiante recibe la información de entrada que se estableció en la formulación de la tarea. Luego aplica los procedimientos respectivos para la consecución del objetivo. Por supuesto, en el proceso el estudiante puede incurrir en errores. El listado completo de errores lo presentamos en el anexo 2.

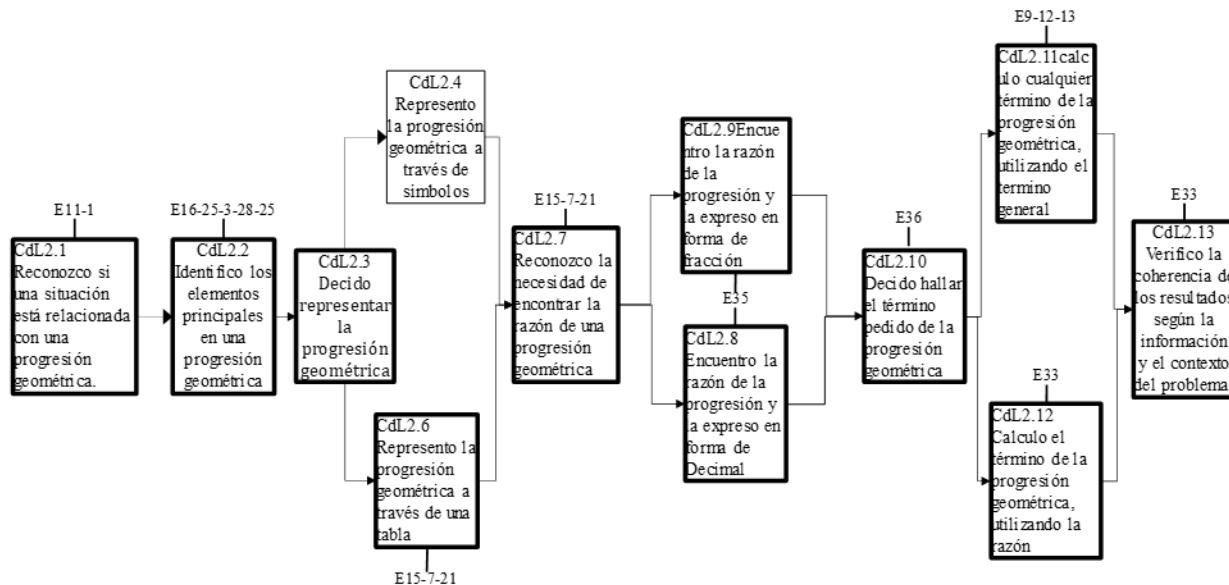


Figura 10. Grafo de criterios de logro de la tarea 2.1

Evaluación

Para evaluar la tarea y por consiguiente y por consiguiente verificar la consecución del objetivo es importante hacer énfasis en la valoración de los criterios de logro CdL 2.8, CdL 2.9, CdL 2.11 y CdL 2.12. Los anteriores criterios de logro tienen la mayor ponderación para el alcance del objetivo. Sugerimos establecer niveles de desempeño para cada criterio de logro. Estos niveles pueden ser bajo medio y alto.

¹ El ordinal se refiere al número del término es decir primer término, segundo término, ..., n-ésimo término.

4. TAREA 2.2 FORMATOS DE PAPEL

Presentamos la última tarea de aprendizaje y con ella concluimos el segundo objetivo de nuestra unidad didáctica. Pretendemos que luego de la aplicación de todas nuestras tareas, los estudiantes puedan enfrentar cualquier otra situación relacionada con las progresiones geométricas.

En esta tarea, incentivamos al estudiante a observar una imagen que representa los formatos de papel del campo del dibujo técnico. Estos formatos se encuentran estandarizados por sus tamaños y están codificados con A0, A1, A2, ... etc., desde el tamaño más grande al tamaño más pequeño.

4.1. Descripción de la tarea

Presentamos cada uno de los elementos de la tarea que describen aspectos puntuales relacionados con la justificación y la composición. De manera que sea posible interiorizar el propósito de la tarea y reconocer su utilidad en medio de la implementación.

Metas

Con esta tarea, pretendemos que los estudiantes tengan la necesidad de extraer datos a partir de la observación de las medidas y proporciones entre los formatos de papel y representen esta información por medio de una lista o de una tabla. Asimismo, que activen la capacidad de utilizar operaciones y un lenguaje formal simbólico y técnico. Por otro lado, buscamos que los estudiantes superen las dificultades en el cálculo de la razón y la relación que existe con el decrecimiento. Adicionalmente pretendemos que puedan plantear la expresión asociada al término general de una progresión geométrica para encontrar cualquier término.

Requisitos de la tarea

Se requiere que los estudiantes conozcan la definición de dimensión, que identifiquen la medición de longitudes, resuelvan multiplicaciones entre números reales y reconozcan datos básicos como la razón y el primer término en medio de una progresión geométrica.

Aporte de la tarea a los objetivos

Cuando los estudiantes logren caracterizar las progresiones geométricas, pueden dirigirse hacia un campo más complejo. En esta tarea, al momento de organizar los datos de las dimensiones de los formatos se activa la capacidad de representación, luego se activa la utilización de operaciones y un lenguaje formal simbólico y técnico al plantear la expresión matemática (término general) que permite encontrar dimensiones de otros formatos. Todos estos procedimientos conllevan al alcance del objetivo propuesto.

Formulación de la tarea

En dibujo técnico se utilizan formatos de papel estandarizados, denominados como A0, A1, A2, A3, ... etc. De estos formatos el que tiene mayor tamaño es el A0 y los siguientes disminuyen en su tamaño tal y como lo muestra la figura 11.

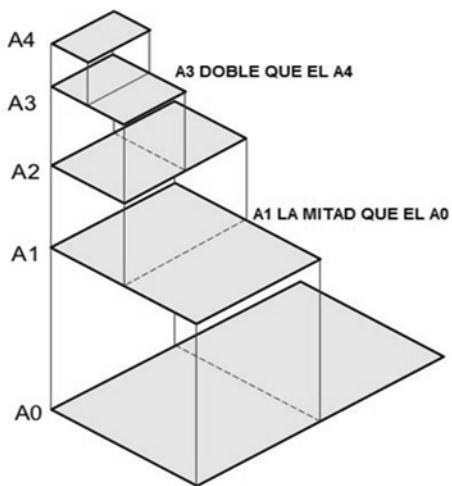


Figura 11. Formatos de papel

- ◆ Si las dimensiones en el formato A0 son: largo = 1189mm y ancho = 841mm y según la información que le brinda la imagen, encuentre las dimensiones de los formatos A1 y A2.
- ◆ Encuentre la expresión matemática que le permite hallar las dimensiones de cualquier formato de papel y pruebe la expresión con las dimensiones del formato A4, A5 y A10.

Conceptos y procedimientos

En esta tarea se requiere la organización y representación de la información, la identificación del primer término, el cálculo de la razón, la expresión del término general de la progresión geométrica y su uso en el cálculo de otros términos. Simultáneamente, se desarrolla la capacidad de utilizar operaciones y un lenguaje formal simbólico y técnico al momento de plantear la expresión matemática y encontrar los términos desconocidos.

Sistema de representación

Nuestro interés está centrado en el uso del sistema tabular en medio de la organización de la información y el sistema simbólico algebraico al momento de plantear el término general de la progresión. Sin embargo, puede ocurrir que los estudiantes no necesariamente registren los datos en una tabla, sino que empleen un listado de valores. Estas opciones se reflejan más adelante en el grafo de criterios de logro.

Contextos

Percibimos que según PISA 2012 esta situación se puede clasificar dentro de un contexto personal o profesional. A pesar de que se encuentra en el entorno escolar, no se ha indagado sobre la relación matemática que existe en la asignación de medidas a los formatos de papel.

Materiales y recursos

Se requieren fotocopias en las que se presenta la formulación de la tarea y algunos formatos en físico, para contextualizar a los estudiantes. El uso de estos materiales induce a observar el comportamiento de los objetos sobre los cuales se plantea la situación, favorece la curiosidad al tratarse

de algo que comúnmente está en el entorno escolar de los estudiantes y sobre lo cual no se había indagado.

Agrupamiento e interacción

Para iniciar la tarea, el docente primero hace la realimentación de la tarea 2.1. Luego realiza una contextualización con todo el grupo de estudiantes acerca del material que se va a emplear en la tarea 2.2 formatos de papel. Se presenta la formulación de la tarea que debe ser desarrollada por grupos de tres estudiantes. Por último, se comparte el trabajo de cada pequeño grupo con grupo en general.

En la contextualización que brinda el docente, se pretende motivar a los estudiantes para que descubran las reglas matemáticas que existen entre los tamaños de cada formato de papel. El papel del docente permite cuestionar a los estudiantes e incentivar a la observación y del registro de información suministrada en la situación.

En el pequeño grupo, los estudiantes se apoyan en los procesos de observación, registros de información, y desarrollo de patrones mediante cálculos. Al momento de compartir el trabajo con el grupo en general pretendemos contrastar los procedimientos usados en cada grupo y el significado de la razón, crecimiento, y términos de la progresión. El docente orienta la construcción del término general de la progresión geométrica y su utilidad al momento de hallar las dimensiones en los formatos.

Temporalidad

Proponemos trabajar la tarea en cuatro momentos.

1. Realimentación de la tarea 2.1 e instrucciones de la actividad a cargo del docente (25 minutos).
2. Organización de los grupos (tres integrantes) de acuerdo con el criterio del docente (5 minutos).
3. Desarrollo de la actividad por parte de los pequeños grupos (45 minutos).
4. Espacio para compartir entre los grupos la experiencia y realizar la evaluación (30 minutos).

Errores en los que puede suceder el estudiante

Los errores más frecuentes en que pueden suceder los estudiantes en el desarrollo de la tarea se pueden asociar a los criterios de logro 2.9 y 2.11 y corresponden a:

- ◆ Realizar divisiones entre número reales sin tener en cuenta las propiedades de estos (E20)
- ◆ Utilizar una expresión algebraica que no representa la progresión geométrica (E13)
- ◆ Operar de manera inadecuada los términos del modelo algebraico que identifica las progresiones geométricas.

Sugerencias metodológicas

Sugerimos que la actuación del docente sea permanente ya que induce a la negociación de términos técnicos y sus significados. Además, orienta la obtención del término general que permite hallar cualquier término de la progresión geométrica. En este caso, la progresión geométrica se establece con las dimensiones del papel. El apoyo del profesor es primordial en la entrega de ayudas que permiten superar los errores frecuentes.

Grafos

En el grafo de la figura 12 resaltamos con línea oscura el camino de aprendizaje que incentivamos a través de la tarea. Esto no quiere decir que algún estudiante pueda optar por un camino diferente al decidir activar los criterios de logro que no se encuentran resaltados. En este grafo señalamos algunos errores frecuentes en los que pueden incurrir los estudiantes al activar los criterios de logro.

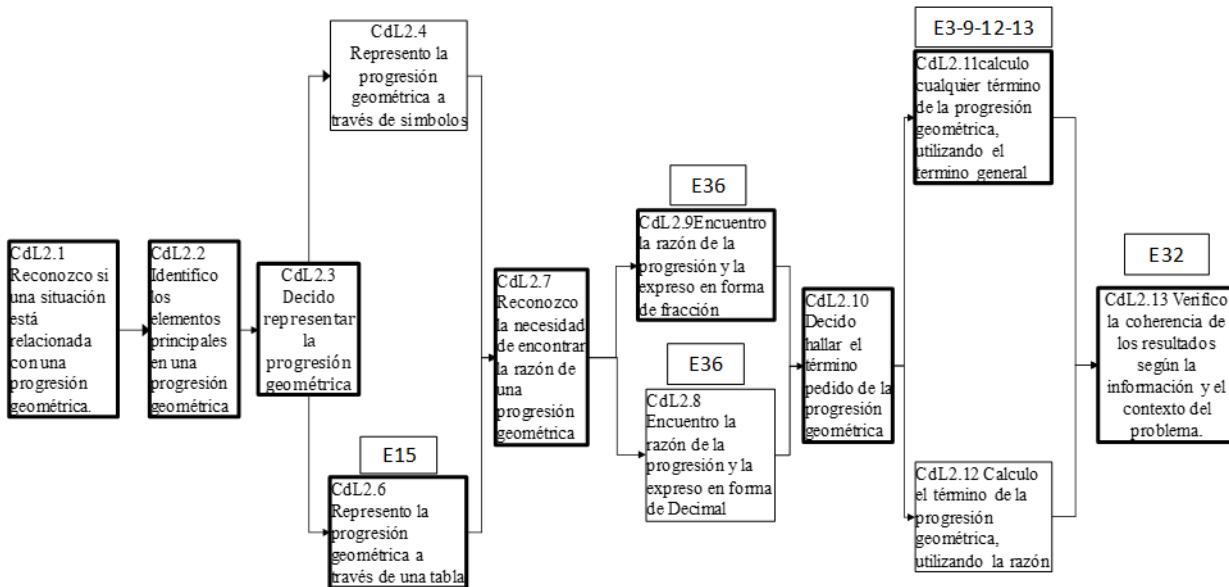


Figura 12. Grafo de criterios de logro para la tarea 2.2

Evaluación

Es importante evaluar de manera continua y registrar cada aspecto relevante relacionado con las ayudas que se brindan. Asimismo, el diligenciamiento de los diarios de estudiante y profesor debe brindar la posibilidad de orientar los alcances obtenidos.

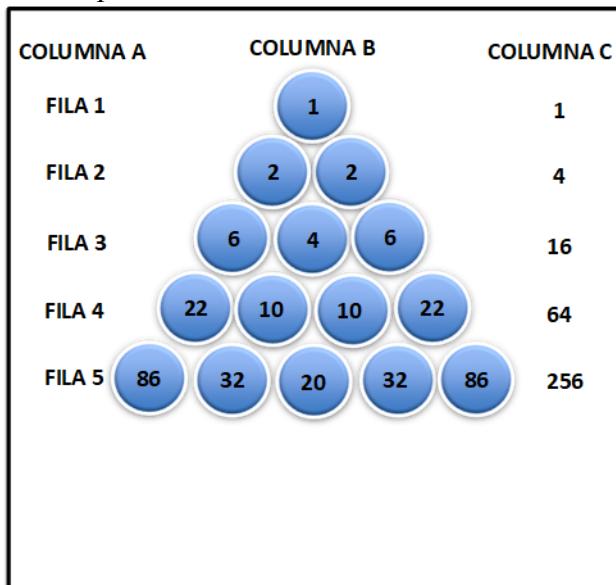
7. EXAMEN FINAL

Presentamos el examen final en relación con la formulación, la rúbrica de evaluación y los niveles de desempeño.

1.1. Formulación del examen

El examen final se compone de cuatro preguntas en relación con cada una de las tareas de aprendizaje. El primer y segundo punto del examen corresponden al objetivo 1 caracterizar las progresiones geométricas crecientes con el uso de representaciones en contextos matemáticos o no matemáticos. El tercer y cuarto punto del examen corresponden al objetivo 2 emplear procesos matemáticos para hallar cualquier término de una progresión geométrica creciente o decreciente y justificar su uso en la solución de situaciones problema. La formulación del examen la mostramos a continuación.

Primer punto



En la figura 1, se muestra un conjunto de esferas ordenadas de forma triangular. A cada fila de la columna A, le corresponde un valor de la columna C. Indique para qué fila de la columna A, el valor de la columna C es mayor que cincuenta mil



Figura 13. Primer punto del examen

Segundo punto

En la siguiente tabla, se registran los cambios que sufrieron las poblaciones de diversos grupos de bacterias durante 6 días.

Registro del crecimiento de diferentes tipos de bacterias

Bacteria	Día 0	Día 1	Día 2	Día 3	Día 4	Día 5	Día 6	Razón	Comportamiento
TIPO I	2	10	50	250		6250	31250		Creciente
TIPO II	4		36		324				
TIPO III	729	486	324	216	144				
TIPO IV	128	192	288		648	972	1458		
TIPO V	4096		2304	1728	1296	972	1296		
TIPO VI	2187	2916	3888		6912	9216			
TIPO VII			343	2401	16807	117649	823543		

De acuerdo con la anterior información desarrolle lo siguiente.

1. Complete la tabla
2. Indique cual es el comportamiento de la progresión y la razón con la que aumenta o disminuye cada tipo de bacteria, justifique.

Tercer punto

Una pelota se deja caer desde una altura de 900 cm. La elasticidad de la pelota es tal que siempre rebota un tercio de la distancia que ha caído.

- ◆ Encuentre la distancia total que la pelota ha recorrido en el instante en que hace contacto con el suelo la quinta vez (James, 2012, pág. 807).

Cuarto punto

Observa la siguiente secuencia de triángulos.



Figura 14. Secuencia de triángulos

- ◆ Determine cuántos triángulos negros, se observan en cada iteración y a partir de esta información, escriba cuántos triángulos negros se tienen en la 5ta iteración.

- ◆ Escriba la expresión matemática que le permite encontrar la cantidad de triángulos negros en cualquier iteración y pruebe esta expresión con las iteraciones 8 y 10.

1.2. Rubrica de evaluación y niveles de logro

La rúbrica de evaluación contempla aspectos cuantitativos y cualitativos. Para ello, asociamos cada nivel de logro con indicadores que asignan una calificación en la escala institucional² y nacional como presentamos en la tabla 6.

Tabla 6

Niveles de logro e indicadores para los objetivos

Nivel de logro	Indicadores
	Objetivo 1 tareas 1 y 2 del examen
Superior (90-100)	El estudiante cumple con todos los criterios de logro de al menos un camino de aprendizaje al desarrollar las tareas 1 y 2 en su totalidad.
Alto (80-89)	El estudiante, al desarrollar las tareas 1 y 2, puede incurrir en algunos errores frecuentes como E3, E15, en la identificación de elementos de la progresión geométrica y la representación, sin embargo, esto no le impide cumplir con las tareas.
Básico (65-79)	El estudiante, al desarrollar las tareas 1 y 2, recorre todo el camino de aprendizaje, pero al incurrir en errores como E5, E21, E40, relacionados con las propiedades y operaciones entre números reales, no logra obtener resultados exactos.
Bajo (10-64)	El estudiante, al desarrollar las tareas 1 y 2 no logra recorrer todo el camino de aprendizaje o incurre en errores E32, y E42, al dar respuestas incoherentes con la situación y el contexto.
	Objetivo 2 tareas 3 y 4 del examen
Superior (90-100)	El estudiante cumple con todos los criterios de logro de al menos un camino de aprendizaje al desarrollar las tareas 3 y 4 en su totalidad.
Alto (80-89)	El estudiante, al desarrollar las tareas 3 y 4, puede incurrir en algunos errores frecuentes como E38, E39, en el uso de reglas para la representación, sin embargo, esto no le impide cumplir con las tareas y obtener resultados acertados.

² La escala institucional teniendo en cuenta el S.I.E.E del colegio General Santander I.E.D.

Básico (65-79)

El estudiante, al desarrollar las tareas 3 y 4 recorre todo el camino de aprendizaje, pero al incurrir en errores como E13, E33 relacionados con el planteamiento de la expresión general errada de la progresión no logra obtener resultados exactos.

Bajo (10-64)

El estudiante, al desarrollar las tareas 3 y 4 no logra recorrer todo el camino de aprendizaje o incurre en errores E9, E12, E13, E32, al operar de manera incorrecta los términos de la expresión general de la progresión geométrica y dar respuestas incoherentes con la situación y el contexto.

Los errores antes mencionados pueden ser consultados en el anexo 2.

8. CONCLUSIONES

Esta unidad didáctica es el resultado de un proceso de análisis de cada uno de los componentes curriculares que enmarcan los procesos de enseñanza y aprendizaje del tema progresión geométrica. Durante este proceso, estudiamos las cuatro dimensiones que componen el currículo. Luego, caracterizamos el concepto de progresión geométrica a partir de las estructuras y subestructuras que la componen y revisamos los fenómenos en los que está presente el concepto. Por último, diseñamos las tareas de aprendizaje de tal modo que fueran motivadoras y contextualizadas, para que el estudiante cumpliera con las expectativas que nos planteamos.

Durante el proceso de diseño de las tareas de aprendizaje realizamos modificaciones de manera constante, con el fin de promover en los estudiantes el desarrollo de capacidades al resolver un problema en el que esté inmerso el concepto de progresión geométrica.

Esta unidad didáctica contribuye en gran medida a la relación de conceptos matemáticos en diversos contextos de la vida real. Por ejemplo, la tarea 1.1 Esferas, le permite al estudiante aprender sobre las características de la progresión geométrica desde un contexto científico-matemático, además, presenta la flexibilidad de estudiar progresiones con diferentes razones y términos. La tarea 1.2 CDT, le permite al estudiante, desenvolverse en un contexto social a medida que relaciona las características de las progresiones geométricas con el comportamiento de un CDT. La tarea 2.1 Pelota de ping-pong, permite que el estudiante identifique los términos de una progresión geométrica, a partir de la experiencia y la recolección de datos. Por último, la tarea 2.2 Formatos de papel, permite a los estudiantes acercarse a contextos relacionados con sistemas de medida.

Algunas limitaciones que presenta nuestra unidad didáctica son los posibles inconvenientes que se pueden presentar con el uso de las herramientas tecnológicas. Por ejemplo, en la tarea 2.1 Pelota de Ping-Pong, los estudiantes pueden tener dificultades si no cuentan con un celular que permitan la reproducción de videos de calidad. También existe la posibilidad que los estudiantes muestren un bajo interés en contextos como el dibujo técnico en la tarea 2.2 formatos de papel, si no tienen afinidad con dicha área.

En términos generales, resaltamos la estructura lógica que presenta la unidad didáctica, ya que relaciona cada uno de los niveles de las expectativas de aprendizaje. La estructura tiene como base las capacidades esenciales, que se organizan de manera secuencial y lógica, lo cual permite crear caminos de aprendizaje que inducen al estudiante a resolver las tareas de aprendizaje y alcanzar los objetivos propuestos en la unidad didáctica. Esto, con el fin de aportar a los procesos generales y a las capacidades fundamentales que contempla PISA 2012, cumplir con los estándares básicos de competencia que plantea el ministerio de educación y considerar y aportar a las expectativas afectivas planteadas en la unidad didáctica.

En ese sentido, el orden lógico que presenta la unidad didáctica cuenta con las herramientas necesarias para:

- ◆ Generar interés en el estudiante a través de tareas de aprendizaje contextualizadas que lo encaminan paso a paso en la adquisición del concepto progresiones geométricas
- ◆ Identificar a través de los grafos, las dificultades que pueden presentar los estudiantes durante el desarrollo de las tareas
- ◆ Considerar la aceptación por parte de los estudiantes, mediante el uso de herramientas como el matematógrafo.
- ◆ Evaluar de manera objetiva el proceso llevado a cabo por el estudiante mediante una rúbrica.
- ◆ Identificar a priori los posibles errores en los que puede incurrir un estudiante en su proceso de aprendizaje.

Estas afirmaciones las realizamos con base en los resultados reflejados por la mayoría de los estudiantes, quienes en su mayoría lograron:

- ◆ Expresar patrones sucesivos a través de la formulación de expresiones algebraicas
- ◆ Caracterizar las progresiones geométricas crecientes o decrecientes a partir de sus elementos
- ◆ Emplear el término general de la progresión geométrica, para determinar distintos términos de la progresión.
- ◆ Modelar situaciones de variación a través de progresiones geométricas

Esperamos que al igual que nosotros, el interesado en emplear nuestra propuesta en el aula o en cualquier otro ambiente de aprendizaje, disfrute con su aplicación y evidentemente sus resultados.

9. ANEXOS

En la tabla 7, mostramos el listado de anexos del documento con su descripción para la tarea diagnóstica y las tareas de aprendizaje.

Tabla 7
Anexos

Anexo	Nombre	Descripción
1	Listado de conocimientos previos	Estos conocimientos delimitan el punto de partida de lo que consideramos rutinario para los estudiantes. Se evalúan en la tarea diagnóstica.
2	Listado de dificultades y errores	Circunstancias que impiden o entorpecen la consecución de los objetivos de aprendizaje previstos.
3	Tarea Diagnóstica	Se desarrolla al inicio de la unidad didáctica para detectar si los estudiantes tienen los conocimientos previos para abordar el tema de progresión geométrica
4	Ficha de tareas de aprendizaje	Comprende las cuatro tareas de aprendizaje, cada una con sus elementos. T1.1 esferas, T1.2 abriendo un cdt, T2.1 pelota de ping-pong y T2.2 formatos de papel.
5	Diario del estudiante	Contiene el enunciado de la tarea de aprendizaje con el matemógrafo y semáforo.
6	Imprimibles	Contiene la formulación de las cuatro tareas de aprendizaje en un formato que pueda ser impreso y fotocopiado.

10. REFERENCIAS

- Acosta, A., Cuervo, O., Pinzón , M., & Salamanca, S. (2017). Progresión aritmética. Bogotá: Universidad de los Andes. Obtenido de
http://funes.uniandes.edu.co/9561/1/G1_DocumentoBase_ProgresionAritmetica.
- Ausubel, D. P. (1976). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. México: Ed. Trillas.
- Gómez, P., Mora, M., & Velasco, C. (2018). Análisis de instrucción. En P. Gómez, *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (págs. 197-268). Bogota, Colombia: Universidad de los Andes.
- González, M. J., & Gómez, P. (2018). *Apuntes módulo 3 Análisis cognitivo MAD7*. Bogotá: Documento publicado.
- James, S. (2012). *Precálculo*. México, D.F.: Cengage Learning Editores.
- MEN. (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Bogotá: Autor.
- Ministerio de Educación Cultura y Deporte. (2013). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: matemáticas, lectura y ciencias*. Obtenido de
<http://www.mecd.gob.es/dctm/innee/internacional/pisa2012/marcopisa2012.pdf?documentId=0901e72b8177328d>
- Oteyza, E. (2004). *Aritmética y preálgebra*. México: Pearson Educación.
- Sangaku S.L. (2019). *Sangaku Maths*. Obtenido de
<https://www.sangakoo.com/es/temas/progresion-geometrica-definicion>
- Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas. En E. Castro, M. Castro, A. Coriat, L. Marín, M. Puig, Sierra, & M. Socas, *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (págs. 125-154). Barcelona: ice-Horsori.
Obtenido de <https://goo.gl/g2cS1G>