

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

# SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

PATRICIA BERNAL, DANY OSORIO, JACK TOLOZA Y FEDERMÁN ALFONSO

BOGOTÁ, OCTUBRE DE 2019

Este documento es la concreción del trabajo realizado por los autores, quienes somos docentes de matemáticas en ejercicio y laboramos en la ciudad de Bogotá como profesores del sector oficial. Durante la Maestría en Educación Matemática de la Universidad de los Andes, ubicada en Bogotá Colombia, diseñamos una unidad didáctica acerca del tema “Semejanza de triángulos”. La propuesta fue implementada con los estudiantes del curso noveno en un colegio público de la ciudad de Bogotá.

Los estudiantes de esta institución pertenecen en su gran mayoría a los barrios aledaños al colegio, los cuales son, usualmente, de estrato socioeconómico tres, y casi todos los estudiantes y sus familias están relacionadas con la industria de confección de calzado.

Los estudiantes de noveno mostraron, en pruebas internas y externas, que tenían un buen desempeño en el componente numérico, pero al mismo tiempo un bajo nivel en el dominio geométrico, lo cual nos motivó a plantear la unidad didáctica en este ámbito, con el fin de mejorar los procesos en el componente geométrico.

Por lo tanto, la elección del tema de nuestra unidad didáctica fue la semejanza de triángulos. Este tema se encuentra determinado para ser enseñado en los dos primeros meses del año según el plan de área de la institución. A su vez, este tema se ubica en el Estándar básico de competencias Ministerio de Educación Nacional (MEN 2006) del grupo de grados octavo-noveno “aplico y justifico criterios de congruencias y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas”, así como al Derecho Básico de Aprendizaje (DBA) 5 de noveno “conjetura acerca de las regularidades de las formas bidimensionales y tridimensionales y realiza inferencias a partir de los criterios de semejanza, congruencia y teoremas básicos”.

Con la implementación de la unidad didáctica, buscamos que los estudiantes puedan ver la geometría como una herramienta útil para comprender su entorno. Específicamente, queremos que, a través de la semejanza de triángulos, los estudiantes puedan encontrar medidas de elementos que no pueden medirse directamente y así ellos puedan ver el uso real de la geometría.

# 1. ARTICULACIÓN DE LOS CONTENIDOS

Para la selección del tema, hicimos un análisis de la estructura del contenido al que pertenece la semejanza de triángulos, teniendo en cuenta tres aspectos importantes: los conceptos y procedimientos, los sistemas de representación y la fenomenología.

En la figura 1, presentamos un mapa conceptual con la organización de los conceptos y procedimientos relacionados con nuestro tema.

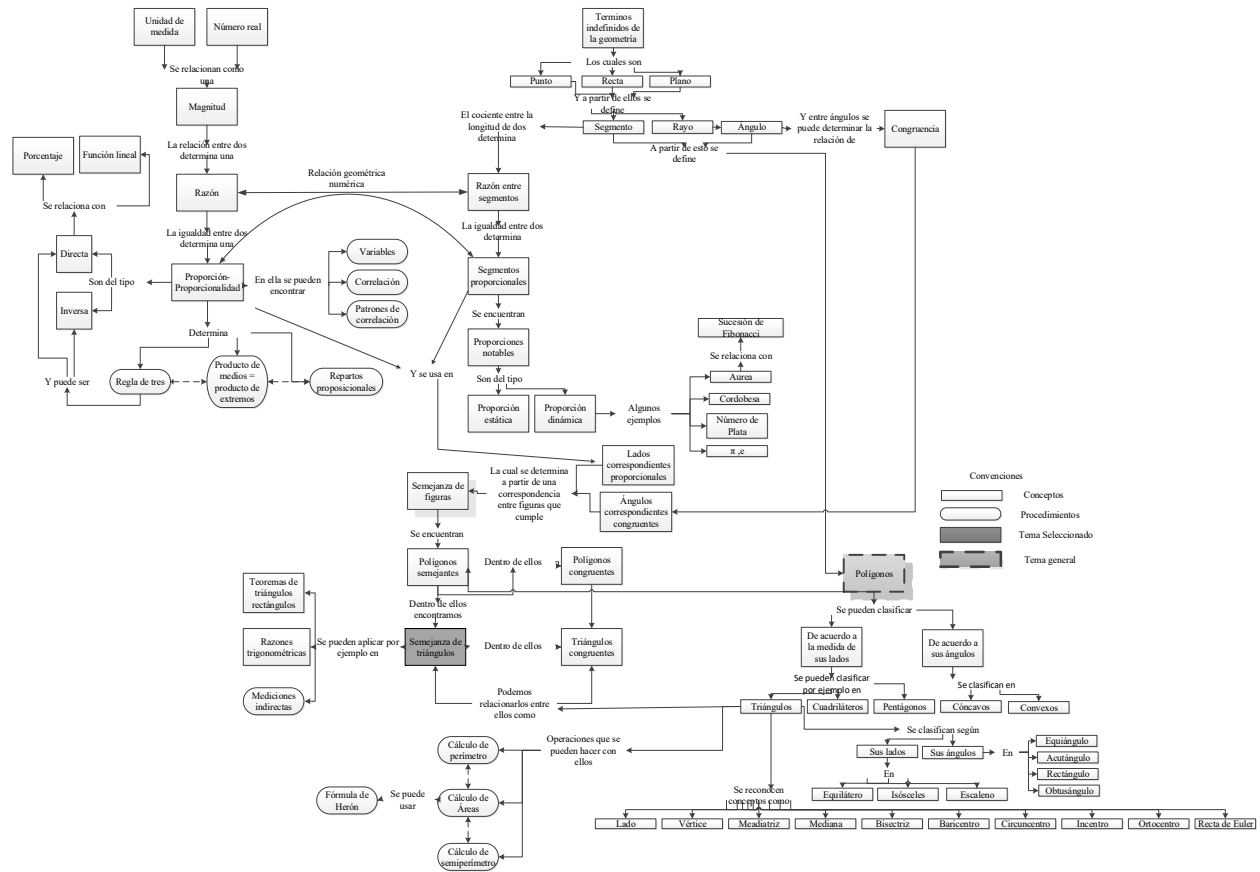


Figura 1. Mapa conceptual del tema Semejanza de Triángulos

En la figura 1, los conceptos se encuentran enmarcados en rectángulos y los procedimientos se observan en óvalos. Con respecto al sistema geométrico, identificamos la proporcionalidad entre

lados correspondientes y la congruencia entre ángulos correspondientes, estos conceptos fundamentales permiten determinar polígonos semejantes y en particular triángulos semejantes. En cuanto al pensamiento numérico, encontramos los conceptos de razón y proporción. A partir de estos conceptos, aplicamos procedimientos (producto de extremos y medios y los repartos proporcionales) con los que podemos determinar mediciones indirectas que es el eje fundamental de nuestra unidad didáctica.

En la figura 2, se puede observar la estructura conceptual de la semejanza de triángulos.

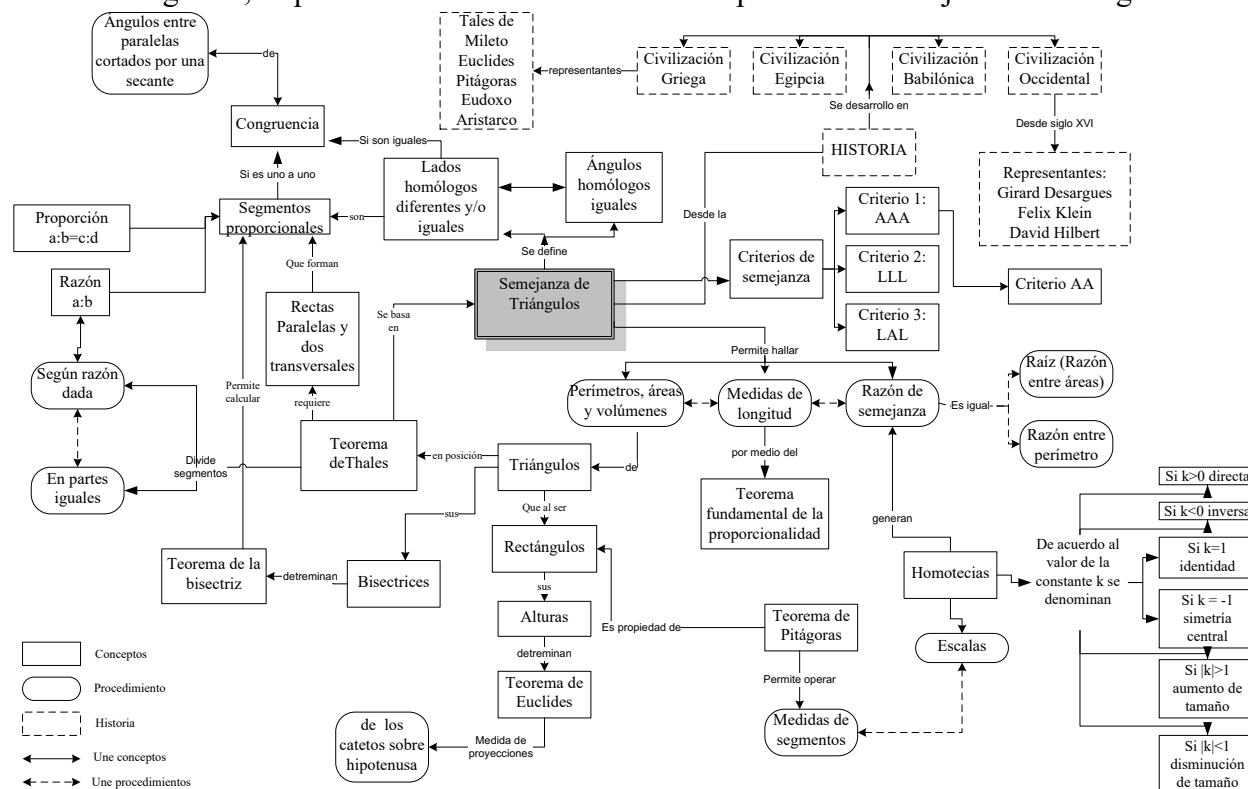


Figura 2. Conceptos específicos del tema Semejanza de Triángulos.

La semejanza de triángulos se define como la relación entre ángulos homólogos iguales y lados que forman segmentos proporcionales. Los criterios de semejanza permiten determinar cuándo dos triángulos son semejantes y los podemos observar en la figura 2 a la derecha del tema central. El criterio 1, se cumple cuando los triángulos tienen tres ángulos homólogos iguales (AAA) y de este criterio se deriva el criterio ángulo-ángulo (AA); el criterio 2, se cumple cuando tienen los lados homólogos proporcionales (LLL) y el criterio 3, cuando tienen un ángulo igual y los lados homólogos que lo forman son proporcionales (LAL).

Dentro de las aplicaciones encontramos el teorema de Pitágoras, que junto con el teorema de Euclides permite calcular las medidas de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa. Los triángulos en posición de Thales permiten dividir segmentos según razón dada. Las bisectrices en los triángulos determinan el teorema de la bisectriz, que permite hallar segmentos proporcionales y triángulos semejantes.

En Educación Matemática se habla de sistemas de representación para hacer referencia a “un sistema de reglas para identificar o crear signos, operarlos y determinar relaciones entre ellos (especialmente relaciones de equivalencia)” (Kaput 1992 P. 73).

En la figura 3, mostramos los sistemas de representación del tema semejanza de triángulos; también se pueden identificar traducciones (establecen la relación entre dos signos que designan un mismo objeto, pero que pertenecen a diferentes sistemas de representación) y transformaciones sintácticas (se refieren a la transformación de un signo en otro, dentro de un mismo sistema de representación, sin que el concepto o procedimiento matemático designado por esos signos cambie). Las traducciones las identificamos con líneas punteadas entre dos puntos y las transformaciones sintácticas se identifican con líneas punteadas entre dos flechas.

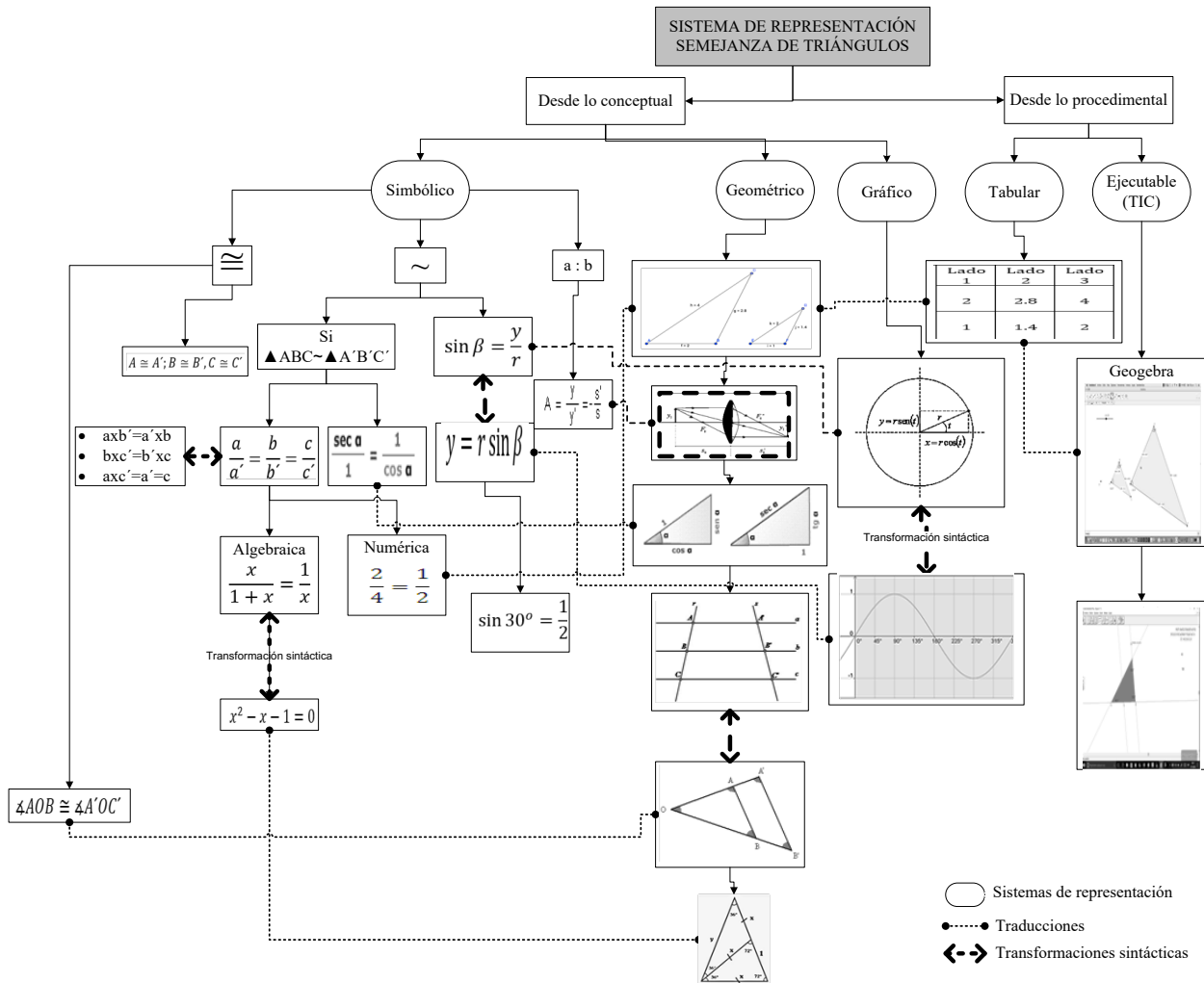


Figura 3. Sistemas de representación del tema Semejanza de Triángulos

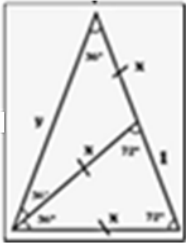
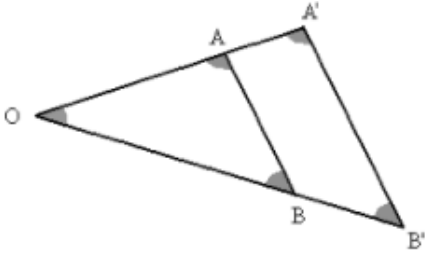
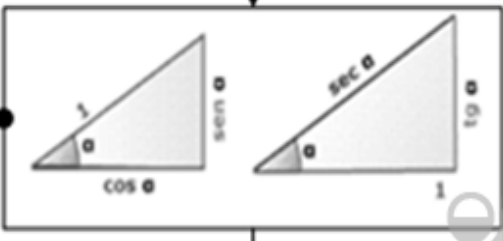
En los sistemas de representación que observamos en la figura 3, presentamos las relaciones entre los conceptos y los procedimientos de nuestro tema. Los sistemas de representación están directamente relacionados con las traducciones que se generan entre ellos. En la figura 3 observamos algunos ejemplos de traducciones, que describimos a continuación.

*Traducción entre el Sistema Simbólico y el Geométrico*

Algunos ejemplos que evidencian la relación directa entre estos dos sistemas se observan en la tabla 1.

Tabla 1

Relación simbólico-geométrico

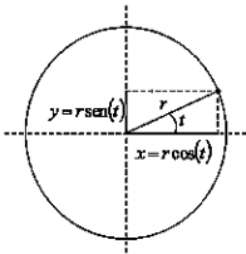
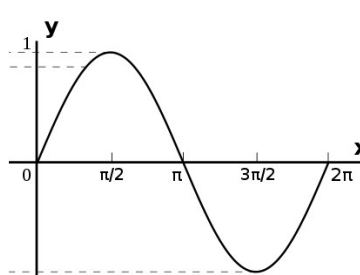
Simbólico	Geométrico
$\frac{x}{x+1} = \frac{1}{x}$ $x^2 - x - 1 = 0$	
<b>Divina Proporción</b>	
$\sphericalangle AOB \cong \sphericalangle A'O'B'$	
$\frac{\text{sen } \alpha}{1} = \frac{1}{\text{cos } \alpha}$	

En la tabla 1, mostramos la traducción del sistema simbólico al sistema geométrico de la divina proporción, el concepto de congruencia entre los ángulos de un triángulo con la forma geométrica que lo representa (triángulos en posición de Thales) y la traducción de lo simbólico a lo geométrico de una función trigonométrica.

*Traducción entre el Sistema simbólico y el gráfico*

Algunos ejemplos que evidencian la relación directa entre estos dos sistemas se observan en la tabla 2.

Tabla 2  
*Relación simbólico - gráfico*

Simbólico	Gráfico
$\text{sen } \beta = \frac{y}{r}$	
$y = r \text{sen } \beta$	

En la tabla 2, mostramos las traducciones de una razón trigonométrica y una función trigonométrica del sistema simbólico al sistema de representación gráfico.

### 1.1. Fenomenología

Las primeras aplicaciones asociadas con la semejanza de triángulos son referenciadas por los griegos. Tales de Mileto (¿640-550? A.C.) realizó el cálculo de la altura de la pirámide de Keops, esta medida es un ejemplo de fenómenos de medición indirecta. Tanto Tales como Hiparco usaron la semejanza de triángulos para realizar medición de lugares inalcanzables. A partir de estos fenómenos reconocidos por los griegos, encontramos una gran variedad de situaciones en contextos científicos, sociales, profesionales y personales.

En la figura 4, presentamos la fenomenología del tema semejanza de triángulos.



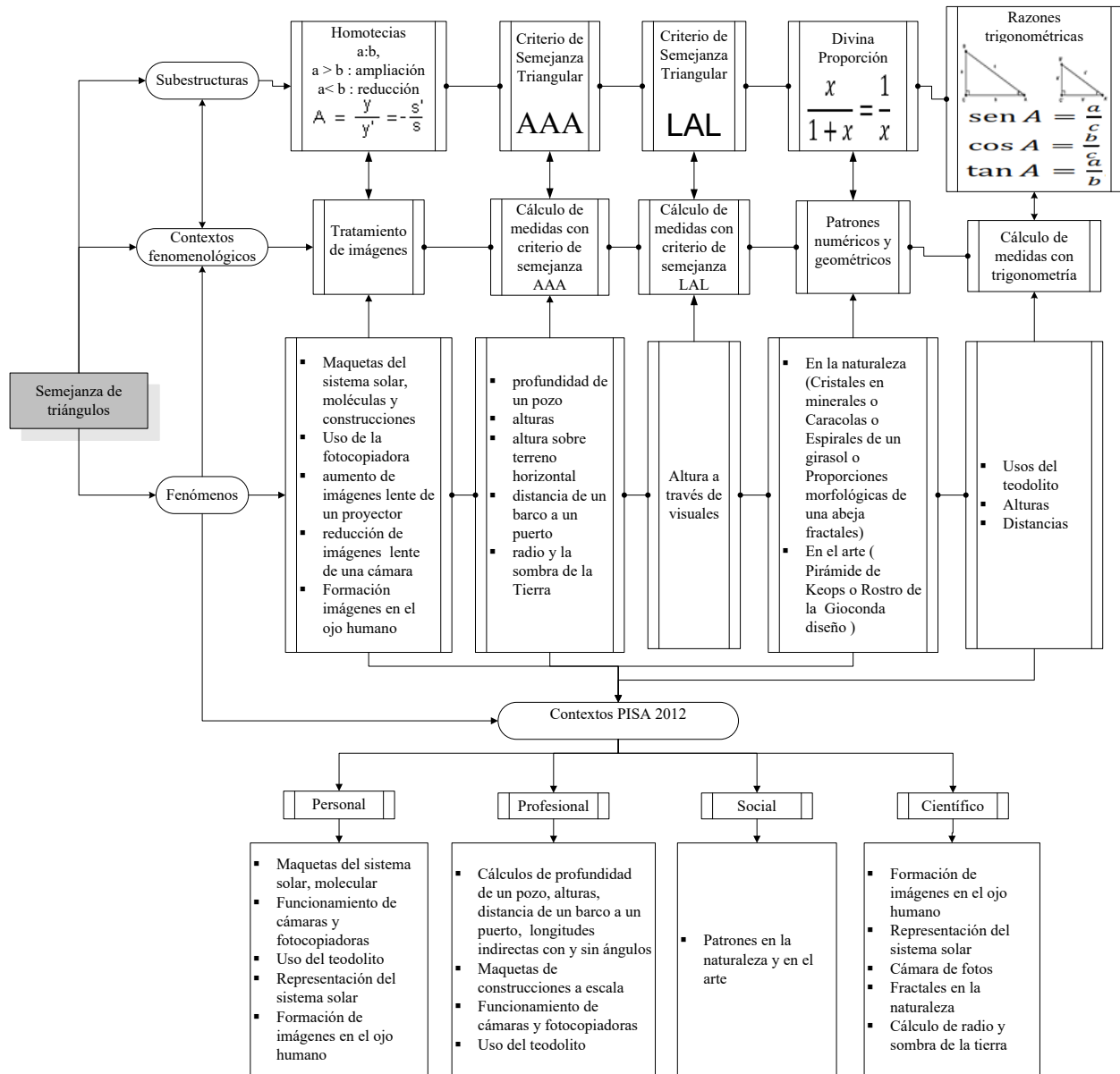


Figura 4. Fenomenología del tema Semejanza de Triángulos

En la figura anterior, hemos presentado la fenomenología de nuestro tema en cinco contextos estructurales: la reducción y ampliación de imágenes, los patrones numéricos y geométricos, el cálculo de medidas inaccesibles por criterios de semejanza, la divina proporción y el cálculo de medidas con trigonometría. También hemos abordado los fenómenos desde los contextos que se relacionan en el documento PISA 2012 como formación de imágenes en el ojo humano, patrones en la naturaleza, el cálculo de alturas y distancias inaccesibles. Las subestructuras que se relacionan uno a uno con estos contextos fenomenológicos son las homotecias, la divina proporción, los

criterios de semejanza AAA, LAL y las razones trigonométricas. Esta última, nos permite relacionar las medidas de los lados con los ángulos del triángulo para calcular medidas inaccesibles.

## 2. ASPECTOS COGNITIVOS

Los objetivos que esperamos alcanzar con nuestra unidad didáctica se fundamentan en varios aspectos cognitivos relacionados con las expectativas de aprendizaje, las limitaciones de aprendizaje, los criterios de logro y los grafos de los criterios de logro.

### 1. EXPECTATIVAS DE APRENDIZAJE

Con el fin de guiar el aprendizaje de los estudiantes, hemos abordado tres tipos de expectativas de aprendizaje en la unidad didáctica y las presentamos a continuación.

#### 1.1. Expectativas de aprendizaje de nivel superior

Las expectativas de aprendizaje de nivel superior (EANS) son los procesos matemáticos y las capacidades matemáticas fundamentales. Esta se encuentra definida en el estudio PISA 2012 que son transversales y comunes para todos los temas de matemáticas, consideramos que, con los objetivos que planteamos, contribuimos al desarrollo de los tres procesos generales y las siete capacidades matemáticas fundamentales.

A continuación, describimos cuál es el aporte de nuestra unidad didáctica a los a los procesos generales.

##### *Formular*

El proceso general de formular se desarrolla cuando el estudiante identifica situaciones susceptibles de ser representadas mediante triángulos semejantes, a partir de la determinación de los componentes de triángulos en situaciones de medición.

##### *Emplear*

En la implementación de esta unidad didáctica, el proceso general de emplear se puede evidenciar cuando el estudiante plantea proporciones entre las medidas de lados de triángulos previamente reconocidos como semejantes y aplica procedimientos y operaciones para encontrar las longitudes desconocidas.

##### *Interpretar y evaluar*

El proceso general de interpretar y evaluar se puede observar cuando el estudiante relaciona las longitudes obtenidas, soluciona problemas de medición de distancias inaccesibles, con las condiciones iniciales determinadas en el problema; realiza las mediciones de manera directa con el fin de contrastarlas con los valores obtenidos usando triángulos semejantes y cuando el estudiante reflexiona frente a sus planteamientos y procedimientos, y a sus procesos en caso de ser necesario.

Consideramos que, al implementar la unidad didáctica, ayudamos a activar las siguientes capacidades matemáticas fundamentales.

#### *Comunicación*

La capacidad matemática fundamental de comunicación se desarrolla cuando el estudiante lee enunciados, interpreta gráficos y extrae la información necesaria para dibujar los respectivos triángulos semejantes, también cuando justifica ante pares y docente, las elecciones realizadas frente a los criterios de semejanza y a los procedimientos elegidos para resolver un determinado problema.

#### *Matematización*

La capacidad matemática fundamental de matematización se desarrolla cuando el estudiante, al observar situaciones de medición indirecta, reconoce que los triángulos semejantes pueden servirle como estrategia para realizar mediciones de lugares de difícil acceso.

#### *Representación*

El estudiante activa la capacidad matemática fundamental de representación, al encontrar una situación que pueda representarse mediante triángulos semejantes, utilice dibujos, proporciones, ecuaciones y otros objetos matemáticos para hacer esa representación.

#### *Razonamiento y argumentación*

La capacidad matemática fundamental de razonamiento y argumentación se puede observar cuando el estudiante argumente por qué seleccionó este sistema de representación y explique por qué son triángulos semejantes a partir de los criterios de semejanza usados, de igual manera cuando reflexione frente a la solución y la contraste con el problema inicial.

#### *Diseño de estrategias para resolver problemas*

Podemos inferir que un estudiante activa la capacidad matemática fundamental de diseño de estrategias para resolver problemas cuando se enfrenta a situaciones en las que debe encontrar la medida de longitudes a las que no puede acceder directamente y deba plantar estrategias para realizar esta medición de manera indirecta.<sup>1</sup>

#### *Utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico.*

La capacidad matemática fundamental de utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico se desarrolla en el estudiante cuando utiliza varios sistemas de representación, siendo el lenguaje simbólico-numérico uno de los que le permite solucionar los problemas planteados, también cuando use definiciones de semejanza, proporcionalidad y despeje de ecuaciones para encontrar las medidas que busca en los problemas planteados.

---

<sup>1</sup> Con medición indirecta, hacemos referencia a la obtención de una longitud sin utilizar el instrumento de medición directamente sobre el objeto a medir. Usualmente se realiza mediante cálculos a partir de otras medidas relacionadas que sí se obtuvieron directamente, o de las cuales se conoce la medida de antemano.

### *Utilización de herramientas matemáticas*

La capacidad matemática fundamental de utilización de herramientas matemáticas se desarrolla cuando el estudiante realiza la medición de ángulos y longitudes, maneje y/o construya instrumentos como teodolitos caseros, transportadores y cintas métricas.

## **1.2. Objetivos de aprendizaje**

Como núcleo de nuestra unidad didáctica, hemos definido dos objetivos de aprendizaje.

*Objetivo 1.* Identificar en diferentes situaciones cómo se relacionan los lados y los ángulos correspondientes de los triángulos semejantes para justificar los criterios de semejanza.

*Objetivo 2.* Usar triángulos semejantes para resolver problemas que requieran calcular distancias de difícil medición y verificar el resultado obtenido.

El primer objetivo se centra en desarrollar la habilidad de los estudiantes para identificar y determinar que dos triángulos son semejantes en contextos diferentes, mientras que el segundo objetivo se centra en fortalecer las competencias de los estudiantes para calcular distancias de difícil medición empleando los criterios de semejanza; con estos objetivos contribuimos al desarrollo de los procesos de formular, emplear e interpretar y aportamos al desarrollo de las capacidades matemáticas fundamentales en nuestro estudiantes.

## **1.3. Expectativas de tipo afectivo**

Las expectativas de tipo afectivo muestran el vínculo de la motivación del estudiante con el contenido matemático. Planteamos cinco expectativas de aprendizaje de tipo afectivo, que mostramos en la tabla 3.

Tabla 3

### *Expectativas de tipo afectivo para la semejanza de triángulos*

EA	Descripción
1	Desarrollar el hábito de verificar resultados en la solución de situaciones, empleando la semejanza triangular
2	Desarrollar confianza para expresar y argumentar los resultados en una situación de semejanza triangular
3	Valorar el orden en el uso de procedimientos para establecer relaciones de semejanza
4	Tener una disposición favorable para desarrollar tareas de cálculo de medidas inaccesibles
5	Valorar la utilidad de la geometría para conocer y resolver diferentes situaciones de la vida real

*Nota.* EA: expectativa afectiva

Con la implementación de la unidad didáctica, pretendemos incentivar en los estudiantes la motivación hacia el aprendizaje de las matemáticas. Con la primera expectativa afectiva promovemos en los estudiantes el hábito de razonar y argumentar la validez de sus resultados; con la segunda,

fortalecemos el desarrollo de la habilidad de comunicación de los estudiantes; con la tercera, resaltamos la importancia de conservar el orden al realizar procesos matemáticos; con la cuarta, incentivamos en los estudiantes la buena disposición para el aprendizaje de un tema matemático en particular y con la quinta expectativa afectiva, pretendemos que los estudiantes valoren la utilidad de la geometría.

## 2. LIMITACIONES DE APRENDIZAJE

Dado que el análisis cognitivo también se ocupa de las limitaciones del aprendizaje, que retardan, dificultan o limitan el aprendizaje de los estudiantes, identificamos algunas dificultades que pueden presentar los estudiantes al desarrollar las tareas de aprendizaje, para ello tendremos en cuenta la clasificación de los tipos de dificultades realizada por Socas (1997) y la descripción de los errores en que los estudiantes pueden incurrir.

Socas (1997) propone organizar las dificultades matemáticas en 5 tópicos: (a) dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos, (b) dificultades asociadas a los procesos propios del pensamiento matemático, (c) dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas, (d) dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos y (e) dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas. En el desarrollo e implementación de nuestra unidad didáctica, logramos evidenciar las dos primeras.

Analizamos las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos e identificamos que los errores más comunes se dan, cuando el estudiante establece las relaciones de proporción en lados correspondientes de triángulos semejantes, al realizar los procesos multiplicativos no apropiados y al cambiar o sustituir términos en los procesos que realiza.

En la figura 5, mostramos cómo se puede dar el error al establecer la proporción de los lados correspondientes de triángulos semejantes. El origen de este error está en el concepto de semejanza, surge cuando el estudiante no identifica claramente cuáles son los lados correspondientes, especialmente si la posición de los triángulos es distinta, por ejemplo.

Ejemplo 1:

- Calcula la altura de una casa sabiendo que en un determinado momento del día proyecta una sombra de 3,5 m y una persona que mide 1,87 m tiene, en ese mismo instante, una sombra de 85 cm.

La casa y la persona forman con su sombra un triángulo rectángulo; ambos triángulos son semejantes por ser los rayos del sol, en cada momento, paralelos.

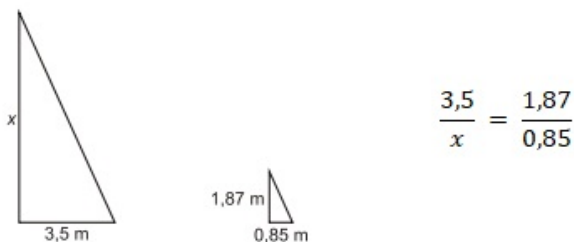


Figura 5. Ejemplo error asociado a la complejidad de los objetos matemáticos

El estudiante al escribir la proporción identifica que la relación que existe entre la sombra de la casa (3,5m) y la altura de la casa (x), es la misma que existe entre la sombra de la persona (0,85m) y la altura de la persona (1,87m), pero ubican los valores de manera incorrecta en la razón. Establecer de forma errónea la proporción impide que el estudiante tenga éxito en el desarrollo del problema.

Continuamos con las dificultades asociadas a los procesos propios del pensamiento matemático. Los errores que se presentan en el área de la geometría, específicamente, los que se relacionan con la semejanza triangular, son aquellos asociados con la falta de habilidad para imaginar, trazar, interpretar figuras geométricas y en la interpretación errónea del enunciado; “un estudiante incurre en este tipo de errores cuando dibuja una figura geométrica que no se corresponde con el enunciado de un problema geométrico propuesto” (Franchi y Hernández, 2004, p. 67). Esta dificultad surge cuando los estudiantes utilizan figuras desproporcionadas al realizar una representación gráfica que le ayudará a comprender el problema, como se observa en la figura 6.

Ejemplo 2:

- La sombra de una torre eléctrica mide 10 m y en el mismo instante, la sombra de un joven mide 1,5 m. Si el joven tiene una altura de 1,8 m.
- Realiza un dibujo que permita definir cuál es la altura de la torre.

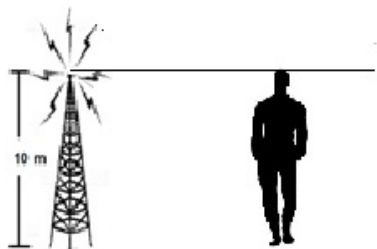


Figura 6. Ejemplo Error asociado a procesos propios del pensamiento matemático

Dibujar al hombre casi al mismo tamaño de la torre, es un error que le dificulta al estudiante ubicarse en el contexto de la situación planteada al no realizar el gráfico que le ayude a dar solución al problema. Este error le impedirá al estudiante razonar lógicamente acerca de la solución obtenida.

## 2.2. Listado de dificultades y errores

Las dos primeras categorías planteadas por Socas nos permiten definir las dificultades (D) y errores (E) para nuestra unidad didáctica.

### *Listado de dificultades y errores relacionados con la complejidad de los objetos matemáticos*

En la categoría “complejidad de los conceptos matemáticos”, identificamos dos dificultades, la primera se observa cuando el estudiante intenta determinar que dos triángulos son semejantes, incurriendo en errores relacionados con el manejo del concepto “semejanza triangular”, por ejemplo, un estudiante puede incurrir en un error al establecer correspondencia entre lados no correspondientes (E1), otro error es identificar lados proporcionales en el mismo triángulo (E59). La segunda es la dificultad que implica establecer correctamente la proporción entre los lados de triángulos semejantes, incurriendo en errores relacionados con el planteamiento y despeje de las proporciones. Por ejemplo, un estudiante puede incurrir en un error al establecer razones entre lados no correspondientes al formular la proporción (E18), otro es sumar las diagonales para hallar la incógnita de la proporción (E23).

### *Listado de dificultades y errores asociados a los procesos propios del pensamiento matemático*

Con relación a los procesos propios del pensamiento matemático, encontramos dos dificultades. La primera se refiere a la dificultad para representar mediante triángulos semejantes situaciones de medición de longitudes, incurriendo en errores relacionados con los procesos de representación gráfica, modelación y justificación de la solución obtenida. Por ejemplo, un estudiante puede incurrir en un error al realizar representaciones gráficas que no corresponden al enunciado (E31), otro error es omitir la importancia de la representación gráfica para solucionar el problema (E72).



La segunda es la dificultad asociada a la interacción y el uso de los elementos, incurriendo en errores relacionados con seguir instrucciones de tipo organizativo. Por ejemplo, un estudiante incurre en un error al organizar grupos con una cantidad diferente a las solicitadas en los requerimientos de la actividad.

En la tabla 4, a manera de ejemplo, mostramos los errores asociados a la primera dificultad.

Tabla 4

*D1. Dificultades para establecer que dos triángulos son semejantes*

Código del error	Descripción
E1	Establecer correspondencias entre lados no correspondientes
E2	Establecer correspondencias entre ángulos que no son congruentes
E3	Medir incorrectamente uno o más ángulos
E4	Determinar que dos triángulos son semejantes comprobando solo dos de los lados
E5	Determinar que un par de lados correspondientes son secantes, cuando son paralelos
E6	Encontrar dos pares de ángulos congruentes en diferentes triángulos y no determinar la congruencia de triángulos
E7	Confundir el criterio de semejanza AAA con el LAL
E8	Confundir el criterio de semejanza AAA con el LLL
E9	Confundir el criterio de semejanza LAL con el LLL
E10	Describir un criterio de semejanza diferente al usado, para determinar la semejanza de dos triángulos
E11	Identificar triángulos no semejantes, a pesar de que se usan los criterios de semejanza en el proceso
E12	Escribir la proporción determinada por los triángulos semejantes relacionando lados no correspondientes
E13	Considerar que los lados son elementos invariantes entre figuras semejantes

En la tabla, mostramos algunos de los errores asociados a la dificultad 1 (D1). La totalidad de los errores asociados a esta primera dificultad y a las otras dificultades los podemos observar en el anexo 1.

### 3. CRITERIOS DE LOGRO

La evaluación de nuestra unidad didáctica se fundamenta en la evaluación formativa. Para que el estudiante y el profesor puedan evaluar el avance del aprendizaje, vamos a plantear, previamente, unos criterios de logro que nos sirvan de indicadores de dicho progreso. El profesor debe compartir con los estudiantes, antes de implementar cada tarea, los objetivos de aprendizaje y los criterios de logro (Romero y Gómez, 2017 P. 73), para identificar el progreso de los estudiantes en el alcance de los objetivos de la unidad didáctica. Los criterios de logro permiten al estudiante ser consciente de los procedimientos consecutivos que debe seguir para dar solución a una tarea de aprendizaje.

En la tabla 5, presentamos los criterios de logro propuestos para el objetivo 1 de nuestra unidad didáctica. El listado completo de los criterios de logro para los dos objetivos se puede observar en el anexo 2.

Tabla 5  
*Descripción de los criterios de logro para el objetivo 1*

CdL	Descripción
CdL1.1	Extraigo los datos importantes del enunciado y de la gráfica
CdL1.2	Reconozco los triángulos que hay en la figura
CdL1.3	Decido qué revisar primero, si los ángulos o los lados de los triángulos
CdL1.4	Determino qué ángulos son iguales en triángulos diferentes
CdL1.5	Determino que dos triángulos son semejantes ya sea por el criterio AAA o por el criterio LAL, si no son semejantes justifico el porqué
CdL1.6	Tomo medidas en un triángulo para poder usar el criterio de semejanza AAA
CdL1.7	Justifico por qué usé el criterio de semejanza y escribo la semejanza de la forma $\triangle ABC \sim \triangle DEF$
CdL1.8	Encuentro el resultado y justifico mi respuesta
CdL1.9	Decido si voy a revisar que dos triángulos son semejantes por el criterio LAL o porque están en posición de Thales
CdL1.10	Reconozco que dos triángulos están en posición de Thales, y por lo tanto son semejantes
CdL1.11	Identifico medidas en un triángulo para poder usar el criterio de semejanza LAL
CdL1.12	Determino que dos triángulos no son semejantes ya que no cumplen ningún criterio de semejanza

Tabla 5  
*Descripción de los criterios de logro para el objetivo 1*

CdL	Descripción
CdL1.13	Identifico pares de lados proporcionales en triángulos diferentes
CdL1.14	Determino que dos triángulos son semejantes por el criterio LLL y si no son semejantes justifico el porqué
CdL1.15	Identifico medidas en un triángulo para poder usar el criterio de semejanza LLL

*Nota:* CdL: criterio de logro

En la tabla 5, observamos los criterios de logro (CdL) para el objetivo 1. El primer criterio de logro (CdL1.1) permite determinar si el estudiante lee la formulación de la tarea de aprendizaje y extrae los datos que necesita para dar solución al problema, el segundo criterio de logro (CdL1.2) muestra si el estudiante reconoce los triángulos que observa en la formulación, en el tercer criterio de logro (CdL1.3) el estudiante decide si le es más fácil reconocer los lados o los ángulos en la representación gráfica de la tarea. El estudiante continúa recorriendo los caminos de aprendizaje hasta llegar al último criterio de logro (CdL 1.8), que permite observar si el estudiante encuentra el resultado y justifica su respuesta. En la figura 7, mostramos con más claridad esta secuencia por medio del grafo de criterios de logro.

Como hemos identificado que los estudiantes pueden presentar dificultades e incurrir en errores durante el desarrollo de las tareas de aprendizaje, diseñamos ayudas para cada una de las tareas. Las ayudas son los estímulos que el profesor da a los estudiantes, para reorientarlos durante el desarrollo de las tareas de aprendizaje, estas ayudas pueden ser: una pregunta que reorienta, información adicional que se le entregue al estudiante, explicaciones dadas por el profesor..., etc. siempre buscando que sea el estudiante quien pueda dar solución a su dificultad y no el docente.

En la tabla 6, presentamos las ayudas para la tarea de aprendizaje 1.1 (T1.1) del objetivo 1.

Tabla 6  
*Descripción de las ayudas de la T1.1 ¿es lo mismo igual que semejante?*

E	A	Descripción
51	1	¿Tienen claro lo que deben hacer?
53	38	Revisen el gráfico nuevamente por si faltan datos que no han tenido en cuenta
39	2	¿Qué figuras encontraron en la gráfica?
71	3	¿Qué elemento del triángulo van a revisar?
59	39	¿Dónde deben estar ubicados los lados proporcionales de los triángulos?
68	7	¿Todas las parejas de lados mantienen la misma razón?
69	8	¿Por qué hizo corresponder este lado con este otro?

Tabla 6

*Descripción de las ayudas de la T1.1 ¿es lo mismo igual que semejante?*

<i>E</i>	<i>A</i>	<i>Descripción</i>
12	9	¿Qué componentes del triángulo relacionaron?
13	10	¿Qué componentes del triángulo relacionaron?
54	6	¿Las parejas de lados deben ser iguales? ¿Los ángulos deben mantener la misma proporción de los lados?
14	19	¿Qué componentes del triángulo relacionaron?
43	40	Seguro que está bien escrita la expresión $\Delta ABC \sim \Delta CDE$

Nota. E = Error; A = Ayuda

En la tabla anterior, mostramos que si un estudiante incurre en un error como el 51 -Omitir datos importantes para la resolución del problema-, el profesor podría reorientar el proceso del estudiante implementado una ayuda como la A1, que consiste en realizarle al estudiante la siguiente pregunta, ¿Tienen claro lo que deben hacer?, De esta forma prevemos que para las posibles dificultades que presente el estudiante, siempre podamos tener a la mano un posible estímulo para que el estudiante pueda continuar. Las ayudas para las demás tareas de aprendizaje pueden ser observadas en el anexo 3.

#### 4. GRAFOS DE CRITERIOS DE LOGRO DE LOS OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

El grafo de criterios de logro muestra los procedimientos concretos que los estudiantes pueden seguir, para dar solución a una tarea de aprendizaje. En la figura 7, mostramos el grafo de criterios de logro para el objetivo de aprendizaje 1.

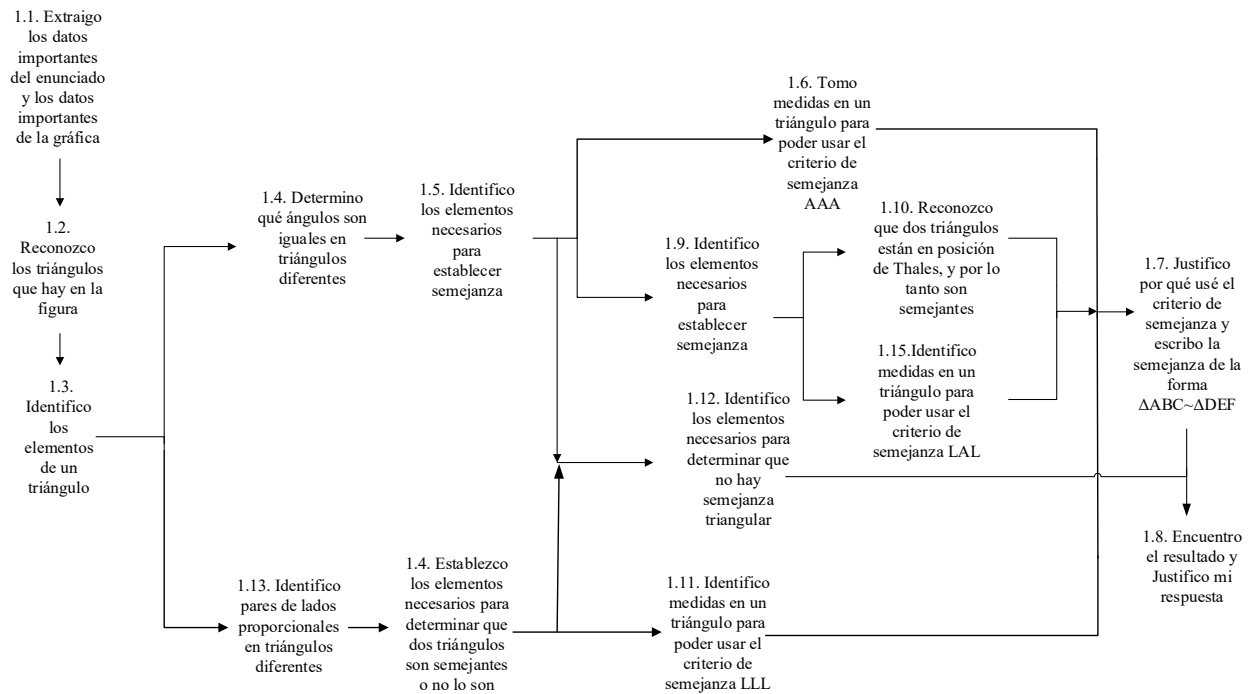


Figura 7. Grafo de criterios de logro para el objetivo 1

Un estudiante al solucionar una tarea de aprendizaje recorre el grafo por uno de los caminos, mientras que otro estudiante puede dar solución a la misma tarea recorriendo un camino diferente. Por ejemplo, los procedimientos que realizan los estudiantes al solucionar la primera tarea de aprendizaje son: (a) 1.1 inicia con la lectura de la formulación de la tarea para extraer los datos importantes, (b) 1.2 reconoce los triángulos presentes, (c) 1.3 decide si la información obtenida lo lleva a identificar los ángulos o los lados en los triángulos (esta decisión conducirá a los estudiantes por caminos diferentes), (d) si el estudiante identifica los ángulos, continua el recorrido del grafo por el criterio de logro 1.4, que lo lleva a dar solución a la tarea utilizando el criterio de semejanza AAA o el teorema de Thales; pero si identifica los lados de los triángulos puede continuar por el criterio de logro 1.13, llevándolo a dar solución a la tarea por medio de los criterios de semejanza LAL o LLL. Finalmente, el estudiante justifica el uso del criterio de semejanza (CdL 1.7), encuentra el resultado y da una justificación a su respuesta (CdL1.8). El grafo de criterios de logro para el objetivo 2 puede ser observado en el anexo 4.

### 3. ESQUEMA GENERAL DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

En la tabla 7, explicamos la secuencia de las tareas teniendo en cuenta el orden en que se desarrollan las sesiones de clase, la relación con los objetivos y las metas de cada tarea con el tiempo estimado para cada una.

Tabla 7  
*Descripción de la secuencia de tareas*

Sesión	Objetivo	Tarea	Metas	Tiempo (minutos)
1		Prueba diagnóstica	Con la prueba diagnóstica, esperamos identificar en los estudiantes los conocimientos previos relativos a la identificación de ángulos, identificar ángulos correspondientes entre rectas paralelas cortadas por una secante, razones y proporciones, establecer correspondencia entre los lados y los ángulos de dos triángulos.	90
2	1	Realimentación prueba diagnóstica	Con la realimentación de la prueba diagnóstica se busca clarificar los conceptos en los que los estudiantes muestran mayor dificultad y afianzar aquellos en los que se observan fortalezas.	90
3		T1.1 Hagamos parejas	Con esta tarea buscamos que el estudiante determine que un par de triángulos son semejantes por el criterio LAL y triángulos en posición de Thales. Además, esperamos que el estudiante desarrolle confianza para expresar y argumentar qué relaciones, entre lados y ángulos, son importantes para determinar la semejanza triangular.	90

Tabla 7  
*Descripción de la secuencia de tareas*

Sesión	Objetivo	Tarea	Metas	Tiempo (minutos)
4		Realimentación T1.1	Mediante la realimentación esperamos realizar los refuerzos necesarios de acuerdo con las dificultades observadas durante el desarrollo de la T1.1 y realizar la introducción a la T1.2	45
5		T1.2 ¿Es lo mismo igual que semejante?	Con esta tarea, pretendemos que el estudiante determine la semejanza entre dos triángulos, empleando los criterios LLL, LAL y AAA mediante la comparación entre los lados y ángulos correspondientes de ambos triángulos. Además, que desarrolle el hábito de verificar resultados en la solución de situaciones, empleando la semejanza triangular.	90
6		Realimentación T1.2	Por medio de la realimentación realizamos los ajustes de acuerdo con las dificultades observadas durante el desarrollo de la T1.2 y realizar la introducción a la T2.1	45
7	2	T2.1 Distancia al caño de Fucha	Con esta tarea, pretendemos que el estudiante, utilizando los criterios de semejanza AAA y LAL, desarrolle habilidad para calcular de distancias inaccesibles y esperamos que el estudiante valore el orden de los procedimientos y el uso de la geometría para el cálculo de este tipo de distancias.	90
8		Realimentación T2.1	Mediante la realimentación esperamos realizar el refuerzo de acuerdo con las dificultades observadas durante el desarrollo de la T2.1 y realizar la introducción a la T2.2	45

Tabla 7  
*Descripción de la secuencia de tareas*

Sesión	Objetivo	Tarea	Metas	Tiempo (minutos)
9		T2.2 Altura de la torre	Con esta tarea, pretendemos que el estudiante aplique el criterio de semejanza LAL o las características de semejanza de los triángulos en posición de Thales, desarrolle la habilidad de calcular distancias inaccesibles usando la semejanza de triángulos y valore el uso de la geometría para resolver situaciones de la vida real y desarrollar el hábito de verificar resultados.	135
10		Examen final	El examen final permite evaluar la habilidad de los estudiantes al realizar correspondencias entre triángulos e identificar un criterio de semejanza en contextos matemáticos y no matemáticos	90

*Nota.* T1 = Nombre de la tarea 1; ...; Tn = Nombre de la tarea n.

En la tabla 7, mostramos la planeación de nuestra unidad didáctica organizada en 10 sesiones. Las sesiones 1 y 2, de 90 minutos cada una, corresponden a la prueba diagnóstica y su realimentación. Con estas sesiones esperamos verificar si los estudiantes se han apropiado de los conocimientos previos requeridos para desarrollar la unidad didáctica, luego realizamos la realimentación respecto a las dificultades observadas.

Las sesiones 3 a la 9 corresponden al desarrollo y realimentación de las tareas de aprendizaje. Finalmente cerramos la implementación de nuestra unidad didáctica con la aplicación del examen final en un tiempo de 90 minutos. El docente puede plantear una sesión adicional para socializar los resultados de la implementación de la unidad didáctica y realizar una última realimentación con los estudiantes que presenten desempeños bajos.

## 1. TAREA DIAGNÓSTICA Y TAREAS DE APRENDIZAJE PARA EL PRIMER OBJETIVO

La unidad didáctica del tema semejanza de triángulos está compuesta por dos tipos de tareas, las tareas de evaluación (prueba diagnóstica y examen final) y las tareas de aprendizaje, la tarea diag-



nóstica permite averiguar si los estudiantes tienen los conocimientos previos necesarios para entender el tema de la unidad, de no ser así, el docente debe planificar sesiones de repaso antes de la implementación de la misma.

Las tareas de aprendizaje “son aquellas tareas que el profesor propone a los estudiantes con el propósito de contribuir a que logren las expectativas que ha establecido y superen sus limitaciones de aprendizaje” (Gómez, Mora y Velázquez, 2018, p. 202). En el primer apartado, mostramos la prueba diagnóstica y en el segundo, presentamos las tareas de aprendizaje organizadas para que los estudiantes las realicen en sesiones programadas.

### 1.1. Tarea diagnóstica

La prueba diagnóstica está diseñada para identificar conocimientos previos relacionados con: elementos básicos de la geometría (lados, ángulos y vértices) y los procedimientos relacionados a estos elementos, tipos de rectas y sus relaciones, el uso de instrumentos de medición, determinar razones entre magnitudes relacionadas y proporcionalidad. Estos conocimientos permiten entender las relaciones existentes entre los lados y los ángulos de dos triángulos, para establecer criterios de semejanza. Es importante que los estudiantes hayan apropiado estos conocimientos para que la unidad didáctica cumpla con los objetivos propuestos.

En la tabla 8, observamos el listado de conocimientos previos determinados para la implementación de la unidad didáctica.

Tabla 8

*Listado de conocimientos previos del tema semejanza de triángulos*

CP	Descripción
1	Reconocer los elementos de un triángulo
2	Identificar ángulos entre paralelas cortadas por una secante
4	Despejar incógnitas en una ecuación determinada por una proporción
6	Utilizar instrumentos de medición
8	Reconocer proporciones entre números
9	Operar números decimales
10	Identificar rectas paralelas
12	Identificar rectas perpendiculares
14	Identificar rectas secantes
16	Reconocer relaciones entre magnitudes
17	Determinar razones entre magnitudes relacionadas
18	Identificar la proporción como igualdad de razones
21	Reconocer las unidades de longitud

Tabla 8

*Listado de conocimientos previos del tema semejanza de triángulos*

CP	Descripción
22	Realizar conversiones entre unidades de longitud
25	Determinar cuándo dos ángulos son complementarios
26	Determinar cuándo dos ángulos son suplementarios
29	Realizar medición de ángulos
30	Usar el teorema de Pitágoras
31	Utilizar la cuadrícula para determinar la medida de los lados
32	Reconocer que la distancia entre una recta y un punto, está determinada por la medida del segmento perpendicular a la recta que tiene como extremos el punto y la recta

*Nota.* CP: conocimientos previos.

La tabla 8 muestra el listado de conocimientos previos necesarios para la implementación de la unidad didáctica. Es posible que, al implementar la tarea diagnóstica, el estudiante pueda incurrir en algunos errores que se deben tener en cuenta para realizar una realimentación adecuada y pertinente, que describimos a continuación.

Los estudiantes pueden incurrir en errores asociados a tres dificultades diferentes, primero aquellas relacionadas con la determinación y características de elementos geométricos, la segunda relacionada con la medición y el uso de instrumentos y la tercera, aquella que tiene que ver con el despeje de ecuaciones y establecer proporciones. El listado completo se puede encontrar en el anexo 5.

Tabla 9

*Listado de dificultades y errores asociados a los conocimientos previos*

Código del error	Descripción	Conocimiento previo asociado
<i>D1. Dificultad relacionada con determinación y características de elementos geométricos</i>		
1	Confundir vértices con lados o viceversa	1
2	Confundir ángulos con lados o viceversa	1
3	Confundir vértices con ángulos o viceversa	1
4	Determinar que dos ángulos son congruentes sin que estos lo sean, en los ángulos formados por dos paralelas cortadas por una secante	2
5	Determinar que rectas secantes son rectas paralelas	10

Tabla 9

Listado de dificultades y errores asociados a los conocimientos previos

6	Determinar que dos rectas son perpendiculares cuando se Forma entre ellas un ángulo diferente a un ángulo recto	12
7	Determinar que dos rectas paralelas tienen puntos en común	14
8	Confundir ángulos complementarios con suplementarios	25
9	Confundir ángulos suplementarios con complementarios	26
10	Determinar que la distancia entre un punto y una recta corresponde a cualquier segmento diferente del segmento perpendicular	32

En la tabla 9, encontramos el código del error, la descripción y el conocimiento previo asociado a ese error. Por ejemplo, el error número cinco, determinar que rectas secantes son rectas paralelas, está asociado al conocimiento previo diez (identificar rectas paralelas).

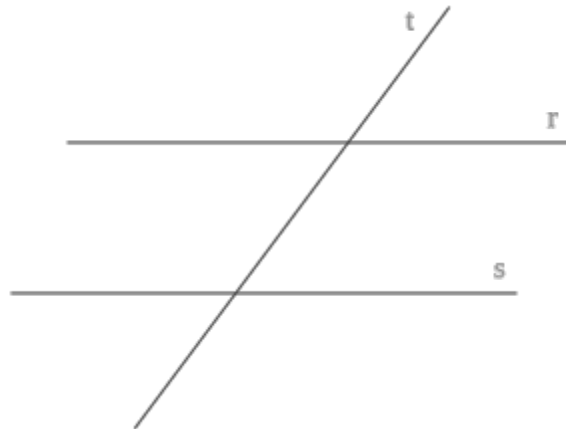
La prueba diagnóstica consta de 10 puntos, que describimos a continuación: En el primer punto, identificamos si el estudiante reconoce ángulos (agudos y obtusos), rectas secantes, ángulos que se forman al cortar dos rectas paralelas con un secante; en el segundo punto, el estudiante muestra que despeja apropiadamente la incógnita en una proporción; el punto tres, está diseñado para identificar conocimientos relacionados con unidades de medida y conversiones entre unidades; en el cuarto punto, el estudiante identifica rectas paralelas y perpendiculares en la imagen; en el quinto punto, el estudiante establece proporciones y halla la razón de proporcionalidad; en el sexto punto, el estudiante establece unidades de medida en un contexto determinado; en el séptimo punto, el estudiante identifica en una imagen ángulos complementarios, suplementarios y opuestos por el vértice; en el octavo punto, el estudiante utiliza una cuadrícula para hallar el perímetro de un triángulo, además el teorema de Pitágoras para hallar la hipotenusa del triángulo; en el noveno punto, el estudiante utiliza de forma apropiada la cinta métrica; en el décimo punto, el estudiante usa los instrumentos de medición (transportador, compas, regla) para construir triángulos y establecer correspondencias entre lados y ángulos. Este último punto requiere de tiempo adicional y se debe prever que los estudiantes tengan los instrumentos de medición, además, de ser un tema de gran importancia dentro de la unidad didáctica, ya que este conocimiento permite establecer criterios de semejanza entre dos triángulos. La tarea diagnóstica completa se puede encontrar en el anexo 6.

A continuación, mostramos la formulación de los puntos 1, 2 y 3 de la tarea diagnóstica.

### *Formulación*

1. Observa la imagen
  - a) Utiliza el color amarillo para señalar los ángulos agudos opuestos por el vértice.
  - b) Utiliza el color verde para mostrar los ángulos obtusos opuestos por el vértice.

- c) ¿Observas rectas secantes? Justifica tu respuesta, en caso de ser afirmativa la respuesta, utiliza el color rojo para la secante. Debes mostrar un par de líneas secantes.
- d) Asigna un mismo número a los ángulos que sean congruentes.



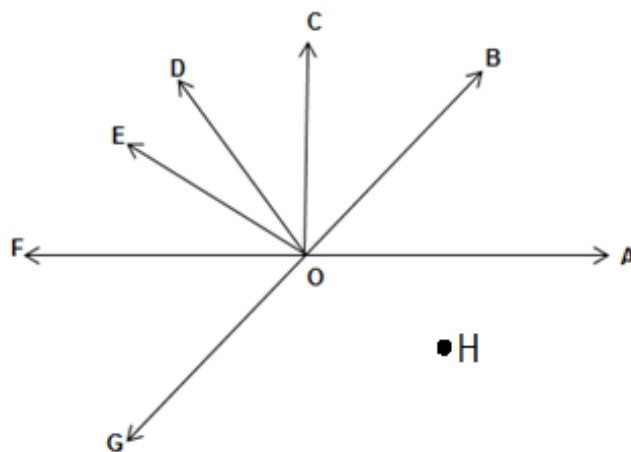
2. Las siguientes parejas de números son proporciones ¿Cuál debe ser el valor de  $X$  para que se cumpla cada proporción?

a)  $\frac{6}{15} = \frac{x}{10}$

b)  $\frac{0,15}{x} = \frac{6}{4}$

c)  $\frac{x}{10} = \frac{19}{15}$

3. Para la figura dada responde:



- a) ¿Existen ángulos opuestos por el vértice? En caso afirmativo, indica cuales son.
- b) Nombra dos ángulos suplementarios.
- c) Con el transportador, mide los ángulos  $\sphericalangle AOB$  y  $\sphericalangle BOC$  ¿son complementarios? Justifica tu respuesta.
- d) Nombra dos ángulos complementarios. sin usar la semirrecta B
- e) Dibuje un segmento que represente la distancia entre un punto H y la recta AF, ¿qué características tiene ese segmento con respecto a la recta?

### *Realimentación*

Somos conscientes que los estudiantes presentan dificultades con algunos de los conceptos previos. Por tal motivo hemos previsto realizar una serie de actividades, como la de agrupar a un escolar que ha mostrado un desempeño alto y uno que ha mostrado un desempeño bajo, esto les permitirá realizar un trabajo colaborativo. Además, se pueden presentar videos de apoyo que permiten mostrar los temas y relacionarlos a contextos matemáticos. Finalmente, sugerimos algunos ejercicios enfocados al reconocimiento de elementos geométricos, para los puntos relacionados con proporcionalidad y despeje de ecuaciones, consideramos pertinente que el docente realice explicaciones por grupos de estudiantes, donde muestre cómo realizar el despeje teniendo en cuenta las propiedades de la igualdad y las operaciones con números decimales. La realimentación completa se encuentra en el anexo 7.

### *Sugerencias metodológicas*

Para implementar la tarea diagnóstica, el docente debe entregar a cada estudiante una hoja impresa con la tarea, esta debe ser trabajada de manera individual, se debe pedir con anterioridad los instrumentos de medición necesarios (regla, cinta métrica, transportador). En el punto diez de la tarea, se les pide a los estudiantes medir una puerta, se pueden hacer algunas recomendaciones teniendo en cuenta las características de la institución y así, evitar desorden en la actividad. Por último, sugerimos subir los videos propuestos, en una plataforma, página web o blog, para que los estudiantes los repasen en casa.

## **1.2. Tareas de aprendizaje para el objetivo 1**

En esta sección, presentamos las tareas de aprendizaje, que son los elementos principales de la unidad didáctica semejanza de triángulos. Describimos cada una de las tareas a partir de los requisitos que deben tener los estudiantes para abordarla, la contribución de cada una al logro del objetivo, los materiales, los recursos que se emplean, la formulación de cada una de ellas y algunas sugerencias metodológicas y aclaraciones.

### *Tarea T1.1 Hagamos Parejas*

Con el desarrollo de la T1.1 esperamos que el estudiante reconozca y use los criterios de semejanza, esto contribuye al logro del objetivo 1 “identificar, en diferentes situaciones, las relaciones existentes entre los lados y los ángulos correspondientes de dos triángulos, para justificar si son

semejantes”, porque en esta tarea, los procedimientos más importantes corresponden a la elección de lados y ángulos homólogos entre triángulos semejantes y también a la elección de criterios de semejanza adecuados para justificar que dos triángulos son o no semejantes.

Con relación a los sistemas de representación utilizados, la tarea privilegia el sistema de representación geométrico, que se usa al analizar los datos presentados en el gráfico; y al sistema de representación simbólico de la semejanza, que es utilizado luego de plantear la semejanza entre dos triángulos y muestra la correcta correspondencia entre los lados de dos triángulos semejantes.

En referencia a los contextos PISA, esta tarea presenta un contexto científico, dado que la tarea está ambientada en un contexto netamente matemático.

*Requisitos.* Como requisito para poder abordar la tarea, el estudiante debe reconocer los elementos de un triángulo, identificar lados y ángulos correspondientes entre dos triángulos, reconociendo y diferenciando el concepto de ángulos complementarios y suplementarios y utilizar adecuadamente el transportador y la regla.

*Meta.* Esperamos que el estudiante reconozca, qué relaciones entre lados y ángulos de dos triángulos son importantes para determinar que un par de triángulos son semejantes. Esta tarea está orientada a que el estudiante establezca las relaciones entre ángulos y lados (criterio de semejanza LAL) y hacia el reconocimiento de triángulos en posición de Thales (que es una particularidad del criterio de semejanza LAL). También se espera que el estudiante justifique, por medio de un criterio de semejanza, que un par de triángulos cumplen las condiciones suficientes para poder determinar que son semejantes y en caso de no cumplirse algún criterio, poder determinar que dos triángulos no son semejantes. Esta tarea aporta a la consecución del objetivo en la medida que permite que los estudiantes reconozcan y puedan usar los criterios de semejanza para determinar si dos triángulos son semejantes o no.

*Formulación.* El docente inicia la sesión entregando una hoja con triángulos para ser recortados, estos triángulos tienen la particularidad que a cada uno le corresponde una pareja semejante, para que el estudiante pueda observar cada criterio. Se proyecta una presentación, donde se muestra la definición del criterio de semejanza (LAL) y los triángulos en posición de Thales. En esta presentación los estudiantes deben ir recreando el criterio con los triángulos que se le entregaron. A continuación, mostramos imágenes de lo que se encuentra en la presentación. La hoja con los triángulos para recortar se encuentran en el anexo 8.

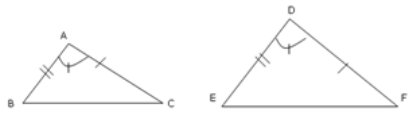
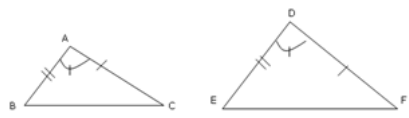
Triángulos semejantes	Triángulos semejantes
<p><b>Analicemos el criterio de semejanza (LAL)</b>            Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados proporcionales y congruente el ángulo comprendido entre ellos.</p> 	 <p>Es decir, en los triángulos <math>\triangle ABC</math> y <math>\triangle DEF</math>,            Si <math>\angle A = \angle D</math> y <math>\frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE}</math>            Entonces <math>ABC \sim DEF</math></p>

Figura 8. Presentación T1.1

Terminada la presentación (esta presentación se puede encontrar en el anexo 9), los estudiantes se deben reunir en parejas, a cada pareja se le entrega una hoja y tres parejas de triángulos en cartulina con el siguiente enunciado.

*Enunciado de la tarea*

Utilice los triángulos en cartulina para identificar un criterio de semejanza, pegue los triángulos en la hoja y explique el primer criterio de semejanza que usó para determinar que cada pareja de triángulos son semejantes, no olvide utilizar la representación simbólica de la semejanza de triángulos en sus explicaciones.

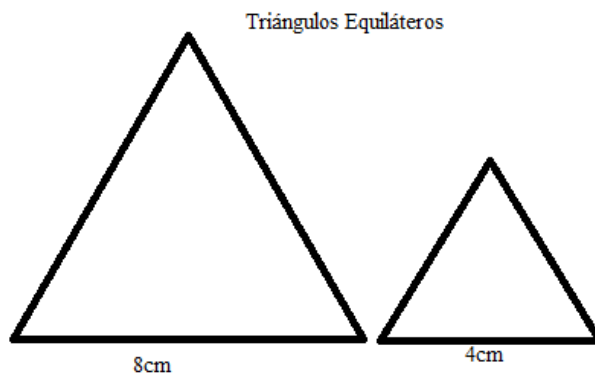


Figura 9. Triángulos en cartulina

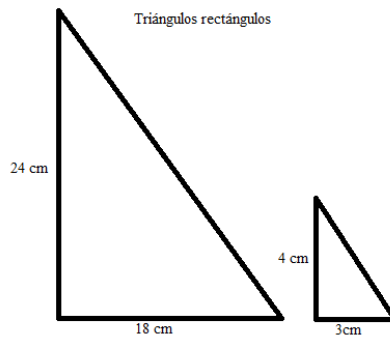


Figura 10. Triángulos en cartulina

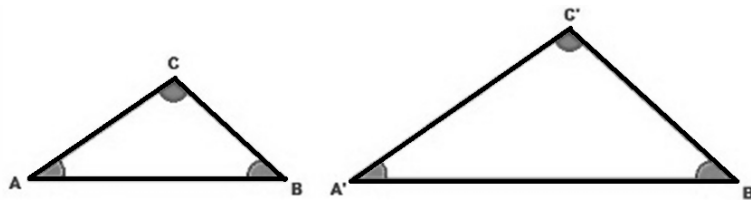


Figura 11. Triángulos en cartulina

*Materiales y recursos.* Los materiales pertinentes para esta actividad son: Televisor o proyector, donde se pueda mostrar una presentación, transportador para medir ángulos, tijeras para recortar triángulos, fotocopias con la tarea y colores.

*Agrupamiento.* El agrupamiento será en parejas, para poder discutir y establecer la respuesta. Al terminar el trabajo en parejas se realiza un nuevo agrupamiento, se unen dos grupos de parejas, para comparar resultados e identificar el criterio de semejanza usado. En esta parte, el docente debe estar atento y agrupar las parejas que hayan justificado su tarea con criterios de semejanza diferentes. El docente debe hacer énfasis en la representación simbólica y asegurarse que se expongan todos los criterios de semejanza. Finalmente, un estudiante por grupo comenta a todos los estudiantes las observaciones realizadas en el segundo agrupamiento.

*Interacción comunicación en clase.* La interacción docente-estudiante se da durante toda la tarea, en esta se responden preguntas y se hacen aclaraciones. La segunda interacción está dada entre estudiantes, nos parece importante que los estudiantes tengan la oportunidad de compartir e intercambiar ideas. La tercera interacción corresponde a la exposición de los resultados finales.

*Temporalidad.* El tiempo estipulado para esta tarea es de tres horas de clase, la cual estará distribuida en cuatro momentos. En el primero momento el profesor muestra la presentación. En el segundo momento el profesor solicita a los estudiantes que se organicen por parejas, entrega la hoja con la tarea y los triángulos en cartulina, se da el tiempo suficiente de realización. En el tercer momento, el docente les pide a los estudiantes que se reúnan en dos parejas y que comparen sus resultados y justificaciones. El docente dialoga con cada pareja y con cada par de parejas acerca de los resultados obtenidos y en el cuarto momento, los escolares exponen los resultados obtenidos



en la clase. Durante esta exposición, el docente debe estar atento para que todos los criterios de semejanza sean explicados y que no queden duda de ellos, dado que esto es fundamental para el adecuado desarrollo de las siguientes tareas.

*Grafo de criterios de logro.* En la figura 12 presentamos el grafo de criterios de logro, que muestra los caminos de aprendizaje que los estudiantes pueden recorrer.

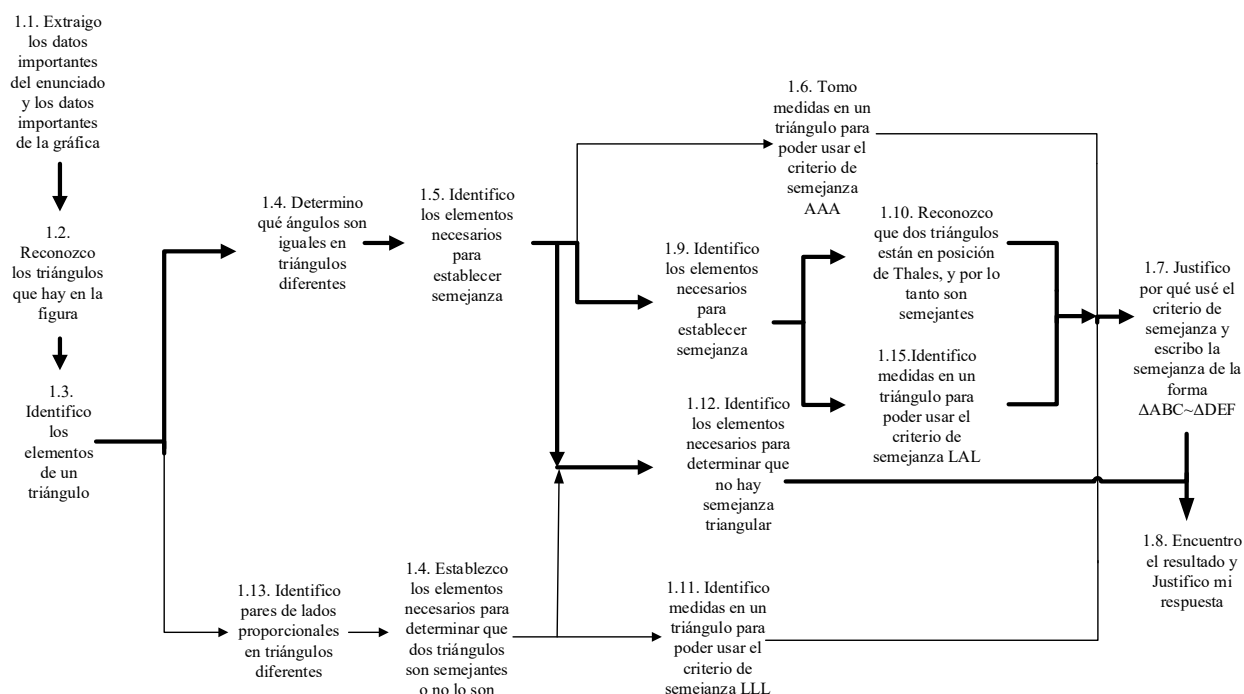


Figura 12. Criterios de logro T1.1 Hagamos parejas

En la figura 4 se pueden observar los diferentes caminos de aprendizaje que pueden recorrer los estudiantes para resolver la tarea. En esta tarea, los estudiantes podrán recorrer el grafo por todos los caminos de aprendizaje. Durante las interacciones docente-estudiantes, es posible que el profesor necesite usar ayudas para lograr que los estudiantes salgan de los errores en los cuales están incurriendo. Un ejemplo de estos errores es que los estudiantes hagan corresponder ángulos que no son congruentes, en este caso la ayuda proporcionada por el maestro corresponde a pedirle a los estudiantes que le señalen cuáles son los ángulos con medidas iguales, con esta acción se busca que los educandos puedan darse cuenta que no son congruentes.

Como sugerencia metodológica, recomendamos que el docente lleve los triángulos ya recortados y de diferentes colores, para que, al realizar la actividad, el docente no pierda el tiempo en estas labores manuales.

### Tarea T1.2 ¿Es lo mismo igual que semejante?

Con la T1.2, esperamos que los estudiantes profundicen en el reconocimiento y uso de los criterios de semejanza AAA y LLL. El aporte al objetivo 1, “identificar en diferentes situaciones las relaciones existentes entre los lados y los ángulos correspondientes de dos triángulos, para justificar

si son semejantes” se realiza en la medida en que se trabajan las relaciones entre lados y ángulos de dos triángulos a partir de los criterios de semejanza enunciados.

De manera semejante a la tarea T1.1 “Hagamos parejas”, los procedimientos más importantes corresponden a la elección de lados y ángulos homólogos entre triángulos semejantes y también a la elección de criterios de semejanza adecuados para justificar que dos triángulos son o no semejantes. Con relación a los sistemas de representación utilizados, además de los sistemas geométrico y simbólico, se utiliza también el sistema de representación manipulable, dado que el uso de material concreto es importante en el desarrollo de la tarea.

Esta tarea está enmarcada en un contexto científico de acuerdo con el marco conceptual PISA, dado que la tarea está ambientada en un contexto netamente matemático.

*Requisitos.* Para que el estudiante pueda resolver los interrogantes presentados en la tarea, es necesario que ya sepa reconocer los elementos de un triángulo, utilizar instrumentos de medición, reconocer proporciones entre números, identificar rectas paralelas, identificar rectas secantes, determinar características de las rectas secantes, identificar la proporción como igualdad de razones y usar el teorema de Pitágoras.

*Meta.* Esperamos que el estudiante determine la semejanza entre dos triángulos, al emplear los criterios LLL y AAA mediante la comparación entre los lados correspondientes y los ángulos congruentes de ambos triángulos.

### Formulación

Martin le dice a Juliana: “el triángulo AFG no es semejante a ningún triángulo, porque no es igual a ninguno de los otros”. Juliana contradice esta afirmación y le dice: “sí hay triángulos semejantes al triángulo AFG, porque al medir sus lados y sus ángulos correspondientes, y compararlos, podemos determinar que sus ángulos son de igual medida y sus lados son proporcionales”.

Ayuda a Juliana para que pueda mostrar que sus afirmaciones son correctas, argumenta por qué hay triángulos semejantes y cuáles parejas de triángulos son semejantes.

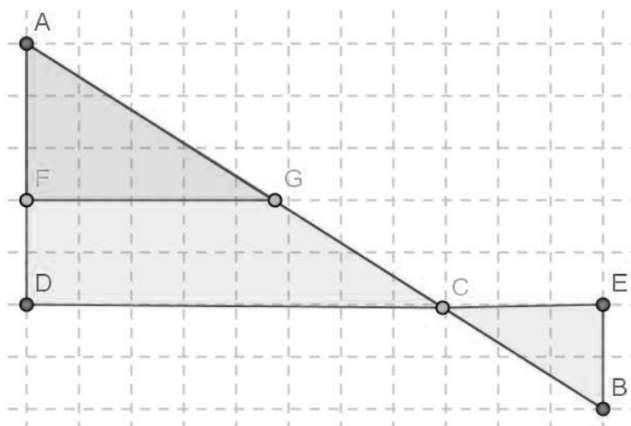


Figura 13. T1.2 ¿Es lo mismo igual que semejante?

Tabla de justificaciones	
Procedimiento	Justificación
<b>Complete</b>	$\Delta \underline{\hspace{2cm}} \sim \Delta \underline{\hspace{2cm}}$

*Materiales y recursos.* Los materiales pertinentes para esta actividad son: Televisor, regla, transportador, compás, guía de trabajo.

*Agrupamiento.* El agrupamiento es en parejas, para poder discutir y redactar la respuesta. Luego se reúnen dos parejas que hayan resuelto el problema por criterios de semejanza iguales con el fin de confrontar sus resultados y, finalmente, ante el gran grupo de la clase, se comunican las respuestas de los diferentes grupos.

*Interacción y comunicación en clase.* Los estudiantes observan un video, en el que se muestra el concepto de semejanza de triángulos y la definición de cada uno de los criterios de semejanza. Después de esto, los estudiantes se reúnen en parejas y cada pareja de estudiantes recibe una ficha para completar. La ficha contiene la descripción del criterio de semejanza AAA o la descripción del criterio de semejanza LLL (figura 14) con algunos espacios vacíos que los educandos completan de acuerdo a lo visto en el video. Posteriormente, resuelven la tarea de aprendizaje con la asesoría del profesor. Finalmente, entre parejas de estudiantes que hayan tomado el mismo criterio, comparan sus resultados y los exponen al grupo de clase.

<b>Criterio AAA</b>	<b>Criterio LLL</b>
El criterio conocido como AA (ángulo - _____), significa que si dos _____ tienen _____ medida en dos de sus ángulos correspondientes, entonces son triángulos _____.	El criterio conocido como LLL (lado - lado - lado), significa que si _____ triángulos tienen _____ proporcionales entre sus _____ pares de lados correspondientes, entonces los _____ son semejantes.
Justificación:	Justificación:

Figura 14. Actividad de completar y justificar criterios AAA y LLL (anexo 11)

*Temporalidad.* El tiempo estipulado para esta tarea es de tres horas de clase. Esta sesión está distribuida en cuatro etapas. En la primera etapa, el profesor a partir de un video, presenta el concepto de semejanza y los criterios de semejanza. En la segunda parte, el docente entrega la guía de trabajo y solicita a los estudiantes que se organicen por parejas. El profesor le pide a cada pareja de estudiantes que resuelva la tarea y consignen las respuestas en la guía impresa entregada. En la tercera parte, el profesor solicita a los educandos que se reúnan de a dos parejas y que comparen sus resultados y justificaciones. En la parte final, el docente dialoga con cada pareja y con cada par de parejas acerca de los resultados obtenidos y finalmente los escolares exponen los diferentes resultados obtenidos en la clase.

Grafo de criterios de logro. A continuación, presentamos el grafo de criterios de logro para la tarea T1.2.

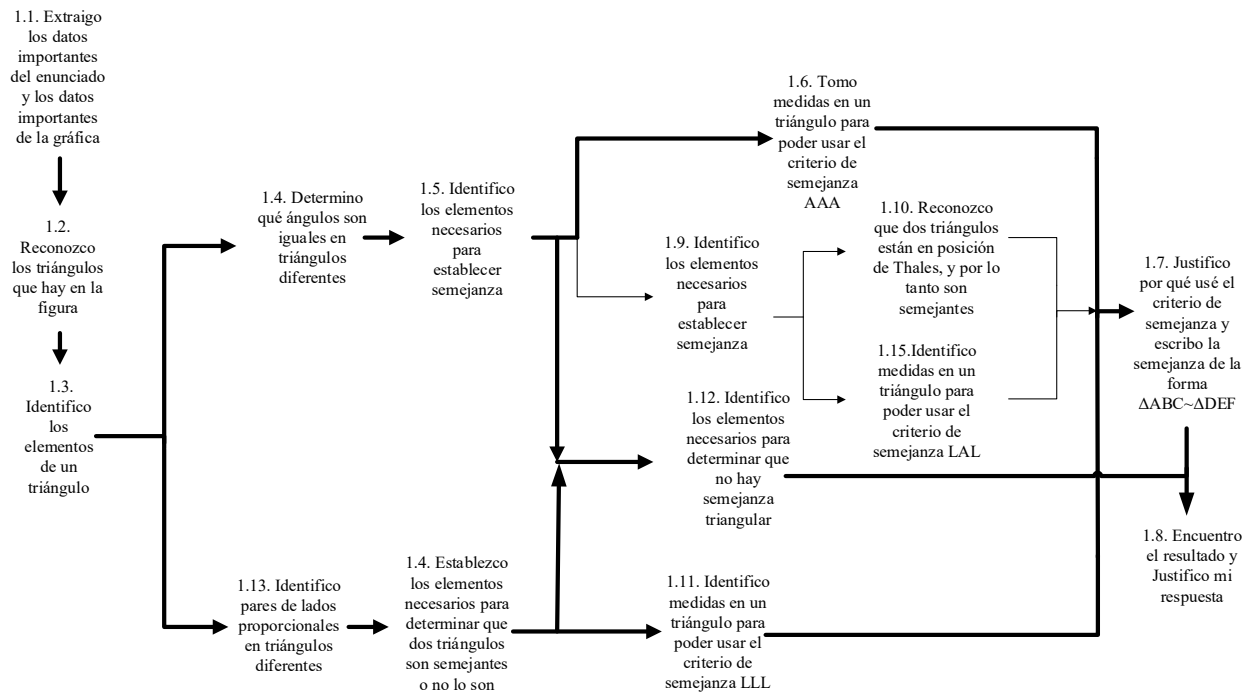


Figura 15. Grafo de criterios de logro T1.2 ¿Es lo mismo igual que semejante?

En la figura 15, se pueden observar los diferentes caminos de aprendizaje que pueden recorrer los estudiantes al resolver la T1.2 “Es lo mismo igual que semejante”. En esta tarea, los estudiantes recorren los caminos de aprendizaje que pasan por el criterio de logro 1.6, relacionado con el criterio de semejanza AAA, o por el criterio de logro 1.11, relacionado con el criterio de semejanza LLL. En la interacción entre el docente y los estudiantes, es posible que el docente observe errores en que estén incurriendo los estudiantes. Por ejemplo, si el docente observa que los estudiantes están escribiendo de manera errónea la representación simbólica de la semejanza, podrá pedirles que revisen el orden en que lo escribieron y justifiquen el orden propuesto. Esta ayuda, así como todas las determinadas para esta tarea, podrán encontrarse detalladamente en el anexo 3.

Se sugiere que el docente esté atento a la escritura de la representación simbólica por parte de los estudiantes, dado que esta permite corroborar la adecuada correspondencia entre lados y es importante para el desarrollo de las tareas del objetivo 2.

## 2. TAREAS DE APRENDIZAJE DEL SEGUNDO OBJETIVO Y EL EXAMEN FINAL

El segundo objetivo de nuestra unidad didáctica está diseñado para que el estudiante desarrolle la habilidad de calcular distancias de difícil medición, por medio del uso de los criterios de semejanza de triángulos y para que observe el uso de la geometría en contextos de la vida real y cotidiana.

### 2.1. Tareas de aprendizaje para el objetivo 2

A continuación, describimos las tareas de aprendizaje propuestas para el segundo objetivo de nuestra unidad didáctica “Usar triángulos semejantes para resolver problemas que requieran calcular distancias de difícil medición y verificar el resultado obtenido”. Describimos las tareas de aprendizaje T2.1 Distancia al árbol en el caño y T2.2 Altura de la torre, a partir de los requisitos que deben tener los estudiantes para abordarlas, la contribución de cada una al logro del objetivo, los materiales, los recursos que se emplean, la formulación de cada una de ellas y algunas sugerencias metodológicas y aclaraciones.

#### *Tarea T2.1 Distancia al árbol en el caño*

La T.2.1 aporta al segundo objetivo porque el estudiante utiliza la semejanza de triángulos como una herramienta, que le permite dar una solución matemática a un problema de distancias inaccesibles que puede encontrar en su cotidianidad.

*Requisitos.* Para esta tarea, el estudiante debe saber utilizar instrumentos de medición en un contexto cotidiano, identificar ángulos de igual medida entre paralelas y rectas perpendiculares, además reconocer triángulos semejantes, teorema de Thales y los criterios de semejanza AAA y LAL.

En caso de no contar con un caño o algo similar cerca de su institución puede usar el salón de clase o el patio del colegio. La figura 1 muestra un ejemplo de cómo el profesor aplica la T2.1 en el salón de clase.



*Figura 16.* Ejemplo de Tarea 2.1 en el salón de clase

En la figura 16, observamos cómo el profesor puede demarcar el piso del aula de clase y con los pupitres generar un área que corresponda al caño y a la que no pueden ingresar los estudiantes, de esta forma se recrea la situación planteada en la tarea de aprendizaje.

*Metas de la tarea.* Con esta tarea, pretendemos que el estudiante identifique la secuencia de pasos que se deben seguir para calcular una distancia de difícil medición y demuestre que el resultado obtenido es correcto.

#### *Formulación de la tarea*

Ustedes (los estudiantes) van a participar en un concurso cuyo objetivo es encontrar la distancia desde un punto fijo, que está marcado en el piso, hasta el árbol marcado con el banderín.

Lean primero todas las instrucciones del concurso y a continuación, realicen cada una de ellas en el orden establecido.

Instrucciones del Concurso.

Organícense en equipos de 4 integrantes y elijan a un representante para que recoja el material que está en la mesa.

El material que le corresponde a cada equipo está compuesto por un banderín de color diferente al de los otros grupos, cuatro estacas o conos, un transportador, una cinta métrica y cuerda.

Con el material asignado, el grupo debe dibujar los triángulos rectángulos, tomar las medidas de los lados y ángulos, y realizar un gráfico que represente el problema. Luego utilizar el concepto y los procedimientos de semejanza triangular para encontraran la distancia del punto **A**, donde se enterró la primera estaca, al banderín asignado.

Diríjense al sitio que el profesor le tiene asignado a su equipo.

En el sitio asignado, los integrantes del equipo se ubicarán en frente del árbol marcado con el banderín y seguirán las siguientes especificaciones.

- Un estudiante del equipo se ubica en frente del árbol marcado con el banderín y entierra una estaca en el piso o ubica un cono en este sitio, a este punto lo marcaremos con la letra **A**
- Un segundo estudiante se ubica a una distancia **X** metros a la derecha del punto **A** y coloca otra estaca en el piso o un cono, este punto lo marcaremos con la letra **B**. Utilicen la pita para formar la línea recta entre las dos estacas o conos
- El equipo verifica que, la línea que se forma entre los puntos **A** y **B** y la línea que se forma entre el punto **A** y el árbol, formen ángulo recto
- Un tercer estudiante se ubica en el punto **B** y retrocede una distancia **Y** metros, siempre en línea recta y formando ángulo de  $90^\circ$  con la línea  $\overline{AB}$  (utilice la pita para orientarse), en este punto ubicará una tercera estaca o cono y lo marcará con la letra **C**
- El estudiante que está en **C** mira hacia el banderín que está ubicado en el árbol, al mismo tiempo, un cuarto compañero coloca una estaca o cono en el punto donde la línea de visión del estudiante **C** se cruza con la línea  $\overline{AB}$ , este punto lo marcara con la letra **D**

1. El equipo ganador es el primero que logre hallar correctamente la distancia desde el punto **A** al árbol.

2. Ilustre en esta hoja el procedimiento realizado y explique cómo halló la distancia desde la estaca del punto **A** al banderín que se encuentra al otro lado del caño.

<b>Tabla de justificaciones</b>
<b>Gráfica del problema</b>



<b>Procedimiento</b>	<b>Justificación</b>
<b>Complete</b>	$\Delta$ _____ $\sim$ $\Delta$ _____



*Figura 17. T2.1 distancia al árbol en el caño del río Fucha*

*Conceptos y procedimientos de la tarea.* Al resolver la tarea de aprendizaje, los estudiantes leen las instrucciones para realizar el montaje de la tarea, toman las medidas de los lados y los ángulos, representan los triángulos, establecen relaciones de semejanza y determinan las razones y proporciones. Después de efectuar los procedimientos anteriormente mencionados, los estudiantes calculan la distancia del punto A hasta el banderín. Los conceptos que aplican los estudiantes en el desarrollo de la tarea son: semejanza, razón y proporción, proporcionalidad, medida y criterio de semejanza.

*Sistemas de representación y contextos PISA.* En esta tarea, los estudiantes utilizan el sistema de representación geométrico al tener que dibujar los triángulos semejantes y determinar las medidas de los lados y ángulos; usan el sistema de representación simbólico al analizar los datos obtenidos y plantear la proporción de la semejanza triangular, que muestra la correcta correspondencia entre los lados de dos triángulos semejantes. Con respecto a los contextos PISA, la tarea se encuentra enmarcada en un contexto profesional, porque son situaciones inherentes a la ingeniería civil y a la arquitectura.

*Materiales y recursos.* Para el desarrollo de la tarea, utilizaremos estacas o conos, transportador de madera, cuerda, cinta métrica, cinta amarilla de delimitación y el espacio del caño.

*Agrupamiento.* La organización será en pequeños grupos de cuatro estudiantes y este agrupamiento se mantendrá durante el desarrollo de toda la tarea.

*Interacción y comunicación en la clase.* El docente comunica la instrucción al gran grupo de la clase, luego interactúa con cada grupo para constatar el desarrollo de la actividad. Sugerimos al profesor identificar las dificultades de cada grupo para poder orientar la tarea de forma particular.

*Temporalidad.* El tiempo estipulado para esta tarea es de tres horas de clase, en la primera y segunda hora de clase, el profesor presenta la tarea en su contexto, realiza las indicaciones pertinentes, forma los grupos de trabajo, da inicio a la solución de la tarea y finalmente, el profesor recoge el trabajo de cada grupo y le asigna el orden de entrega. En la tercera hora de clase, el profesor permite que los estudiantes comprueben sus resultados y comuniquen al gran grupo de clase los resultados obtenidos. Finalmente, el profesor determina cual fue el equipo ganador.

*Errores y ayudas.* Al realizar la tarea, esperamos que el estudiante supere errores como el E39 y el E52, relacionados con identificar y seleccionar los triángulos semejantes, con ayudas como la 67 y la 94 donde el profesor pregunta a los estudiantes ¿Los triángulos son semejantes? y ¿Seguro que ese es el criterio de semejanza correcto? La totalidad de los posibles errores en los que pueden incurrir los estudiantes y sus respectivas ayudas se pueden observar en el anexo 3.

*Grafo de criterios de logro de la tarea.* En la figura 18, presentamos el grafo de criterios de logro para la tarea 2.1 Distancia al árbol en el caño y resaltamos los posibles caminos que pueden recorrer los estudiantes al dar solución a la tarea.

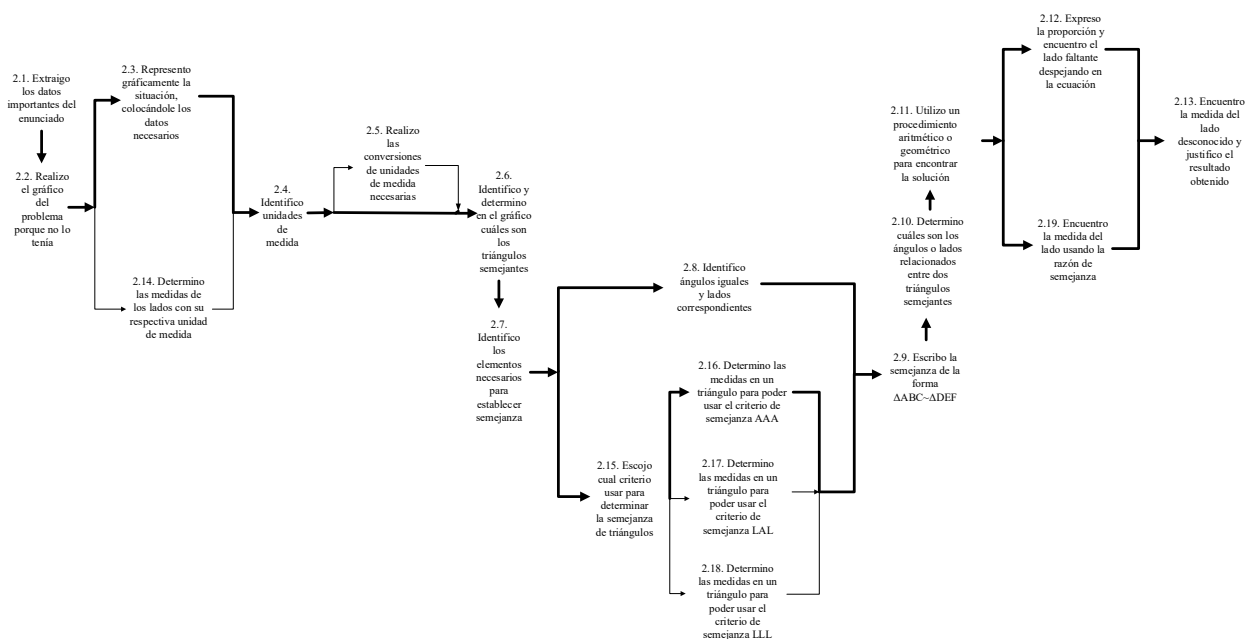


Figura 18. Grafo de criterios de logro de la tarea T2.1. “Distancia al árbol en el caño”

En la figura 18, identificamos los procedimientos que realizan los estudiantes al realizar la tarea de aprendizaje. Un estudiante, luego de leer la formulación del problema, extrae los datos relevantes, representa gráficamente la situación planteada (CdL 2.1) e identifica los triángulos que

son semejantes (CdL 2.6). En este momento, los estudiantes deben tener claro los criterios de semejanza que aprendieron, porque esto les permitirá relacionar los lados proporcionales y encontrar la proporción que finalmente le permitirá dar respuesta a la pregunta planteada en la tarea.

*Evaluación.* Para esta tarea, los estudiantes deben tener claridad al momento de dibujar los triángulos semejantes y ser muy precisos al tomar y ubicar las medidas en los lados o ángulos de los triángulos. Realizar el procedimiento anterior de forma correcta permitirá a los estudiantes relacionar los lados homólogos y determinar la proporción adecuada para solucionar la tarea.

### *Tarea T2.2 Altura de la torre*

Diseñamos la tarea altura de la torre, para que el estudiante comprenda que la semejanza de triángulos es una herramienta muy útil para resolver situaciones matemáticas de su entorno.

*Requisitos de la tarea.* Para que los estudiantes puedan resolver la tarea, se requiere que tengan conocimientos de medidas de longitud y que puedan relacionar la figura que se les presenta con esas medidas, también es necesario que puedan identificar triángulos semejantes y determinar las relaciones entre sus lados.

*Meta de la tarea.* Mediante esta tarea, esperamos que el estudiante resuelva situaciones que involucren los criterios de semejanza de triángulos en posición Thales. Además, que desarrolle el hábito de verificar resultados, valore la utilidad de la geometría para resolver situaciones de la vida real, entienda la importancia del orden de los procedimientos y desarrolle confianza para expresar y argumentar sus resultados.

### *Formulación de la tarea*

Durante un paseo, un niño le pregunta a su abuelo por la altura de la torre de la iglesia. El abuelo para explicar a su nieto una forma sencilla de calcular esta altura, sugiere la utilización de un palo, de cien centímetros de largo. Le pide a su nieto que se pare contra la pared de la torre y camine en línea recta hasta el muro del pozo contando sus pasos, el niño cuenta 38 pasos, (donde cada paso se tomara como un metro). El abuelo apoyó el palo sobre el muro del pozo, que tiene un metro de ancho por un metro de alto, le pide al niño que se incline y observe que la punta del palo quede alineada con la punta de la torre.

Esta escena la podemos ver en la figura.

Utilizando los triángulos que se forman y realizando un cálculo sencillo se contesta la pregunta: 40 metros aproximadamente.

Describe en un texto ¿Cómo se empleó la semejanza de triángulos, para hallar la altura de la torre?"

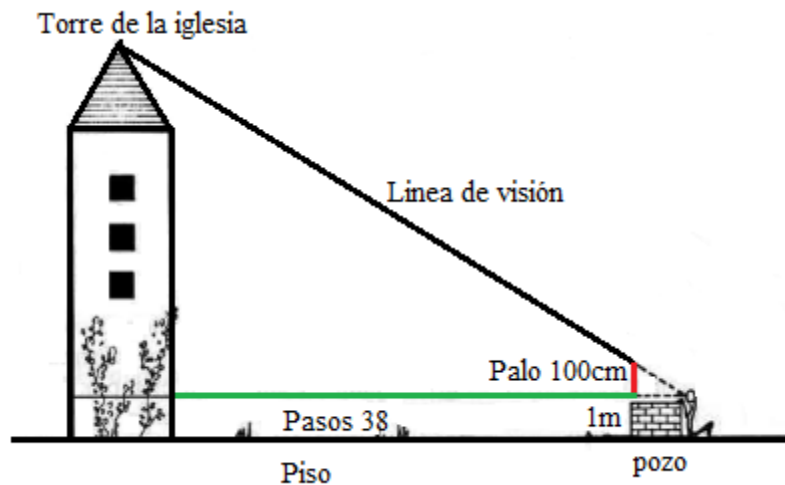


Figura 19. Formulación T2.2. Altura de la torre

Tabla de justificaciones	
Procedimiento	Justificación
Complete	$\Delta \sim \Delta$

*Conceptos y procedimientos.* Al resolver la tarea de aprendizaje, los estudiantes deben extraer la información necesaria para realizar el planteamiento, identificar triángulos, establecer relaciones de semejanza y determinar las razones y proporciones. Después de efectuar los procedimientos anteriormente mencionados, los estudiantes deben calcular la medida de la torre. Tomamos este cálculo no de forma numérica, sino de la forma en que el estudiante explica los posibles cálculos que realizó para hallar la altura de la torre. Los conceptos que aplican los estudiantes en el desarrollo de la tarea son: semejanza, razón y proporción, proporcionalidad, medida y criterio de semejanza.

*Sistemas de representación y contextos PISA.* La tarea privilegia los sistemas de representación geométrico y simbólico. Los estudiantes utilizan estos sistemas de representación cuando analizan los datos presentados en el gráfico y al plantear la semejanza triangular, que muestra la correcta correspondencia entre los lados de dos triángulos semejantes.

Con referencia a los contextos PISA, la tarea se encuentra enmarcada en un contexto personal, porque la tarea surge de la inquietud de un niño por saber la medida de una torre y el desarrollo de la tarea se centra en explicar al niño la forma de calcular la altura de la torre.

*Materiales y recursos.* Los materiales pertinentes para esta actividad son: fotocopia con el planteamiento del problema, cuaderno, regla y lápiz. Como sugerencia al lector, proponemos que, dependiendo del nivel de sus estudiantes, se agreguen o quiten partes del dibujo aumentando o disminuyendo el nivel de dificultad de la tarea. Por ejemplo, se puede eliminar la línea visual del observador a la punta de la torre, para que sea el estudiante quien deba realizar la representación geométrica de este fenómeno.

*Agrupamiento, interacción y comunicación en la clase.* La clase inicia con la interacción docente-estudiantes. El profesor realiza una breve introducción de la actividad que se va a realizar y presenta el objetivo y la meta de la tarea de aprendizaje, esto con el fin de motivar a los estudiantes y generar inquietud. Luego de motivar a los estudiantes, el profesor les solicita que se agrupen en parejas y entrega a cada pareja la hoja que contiene la formulación de la tarea y donde realizarán los procedimientos. Ahora pasamos a la interacción estudiante-estudiante, el profesor le pide a cada pareja que realice la tarea de aprendizaje y luego de un tiempo prudencial (20 minutos), solicita a los estudiantes que unan dos parejas y armen grupos de cuatro estudiantes, para que comparen los procesos y resultados obtenidos por cada pareja. Durante este tiempo, el profesor se desplaza por el salón de clase e interviene en caso de observar que una pareja incurra en un error previsto y utiliza las ayudas que considere necesarias. Finalmente, el profesor solicita a cada grupo que comunique sus resultados en el gran grupo de clase.

*Temporalidad.* La tarea se desarrolla en cuatro momentos. En el primero, el profesor presenta la tarea en su contexto, resaltando la importancia de identificar los triángulos que son semejantes, luego pide a los estudiantes que resuelvan la tarea en parejas. En el segundo momento, el docente dialoga con cada pareja acerca de los razonamientos y resultados. En el tercer momento se hace un nuevo agrupamiento entre las parejas para comparar los resultados obtenidos. Finalmente, en el cuarto momento, algunos grupos pasan al frente y exponen sus procedimientos y resultados. El docente modera la discusión en este último momento realizando los comentarios pertinentes para que los conceptos y procedimientos usados por los estudiantes queden entendidos.

*Errores y ayudas.* Durante el desarrollo de la tarea, los estudiantes pueden incurrir en errores como el E51 al omitir datos importantes, el cual esperamos que supere con la ayuda número 58, al hacerle la pregunta ¿tiene claro lo que va a hacer? De igual forma, los estudiantes pueden incurrir en errores como el E7, E8 o E9, al confundir o no identificar los criterios de semejanza, consideramos que pueden superar estas dificultades con: la ayuda número 77, preguntando a los estudiantes ¿Los triángulos son congruentes?, la ayuda 78 con la pregunta ¿Qué componentes del triángulo relacionaron? o la ayuda 79 con la pregunta ¿Qué componentes del triángulo relacionaron?

La totalidad de los errores y sus correspondientes ayudas, pueden ser observados en los anexos 1 y 3 respectivamente.

*Grafo de criterios de logro de la tarea.* En la figura 20, presentamos el grafo de criterios de logro para la tarea 2.2 altura de la torre y resaltamos los posibles caminos que pueden recorrer los estudiantes al dar solución a la tarea.

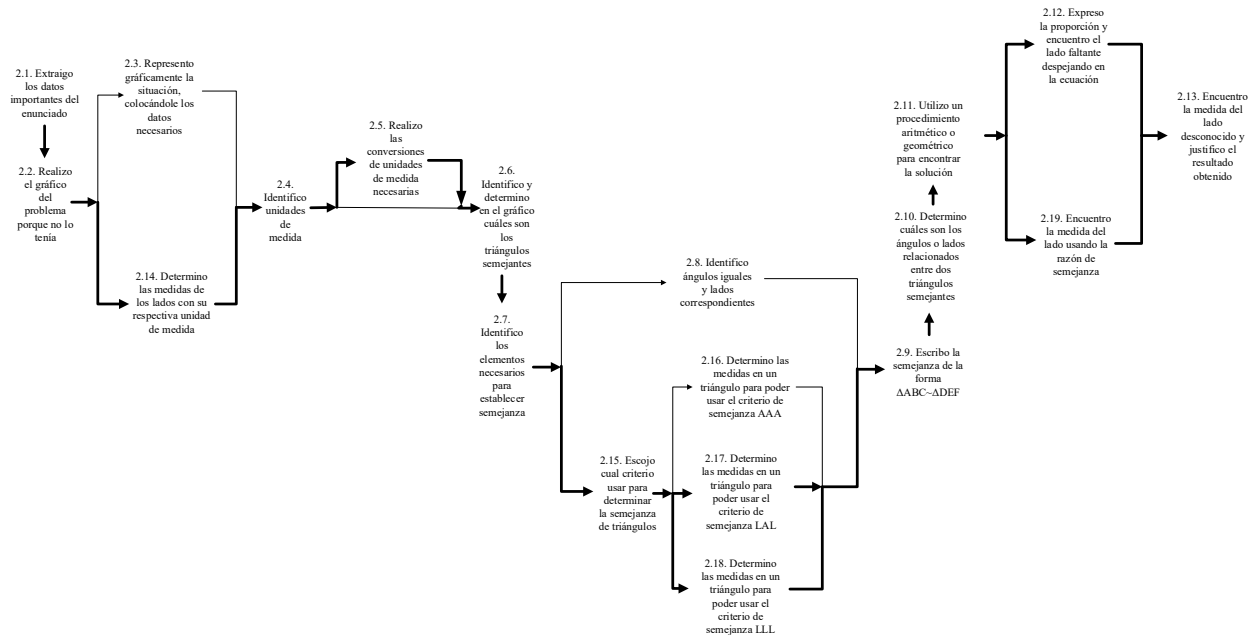


Figura 20. Grafo de criterios de logro de la tarea T2.2. “Altura de la torre”

En el grafo de la figura 20, observamos que el estudiante al solucionar la tarea de aprendizaje primero hace la lectura del problema, que es una anécdota sobre un abuelo y su nieto (en ella se explica cómo se halló la altura de una torre), el estudiante debe determinar qué datos son importantes en el enunciado (CdL 2.1), el estudiante debe identificar si el enunciado le brinda la representación gráfica pertinente para la solución del mismo o debe realizarla (CdL 2.2), teniendo en cuenta que se le puede dar una imagen incompleta del enunciado, luego, y utilizando sus conocimientos de semejanza triangular debe dibujar la parte faltante y colocar los datos relevantes para la solución del problema.

En el CdL 2.4, el estudiante debe identificar si debe hacer alguna conversión de unidad de longitud o no, en esta tarea específicamente debe hacer este cambio de unidad de medida, por lo tanto el estudiante pasa por CdL 2.5 para realizar la conversiones de unidades de longitud pertinentes, en los CdL 2.6 y 2.7 determina la semejanza triangular teniendo en cuenta las características que observa en los triángulos, allí se abren dos posibilidades en las que el estudiante identifica semejanza triangular por que observa que los triángulos están en posición de Thales o establece la semejanza triangular seleccionando algún criterio de semejanza. Esta parte es muy importante porque en ella se espera que el estudiante utilice los conocimientos adquiridos con el desarrollo del primer objetivo, por esta razón al estudiante se le abren dos posibilidades: en la primera, el estudiante reconoce las características de semejanza por el criterio AAA y en la segunda, que los triángulos están en posición de Thales.

Teniendo en cuenta que, en esta tarea el estudiante debe comprobar que la respuesta que se da en el enunciado es correcta, el camino de aprendizaje pasa por el CdL 2.9. El estudiante establece la semejanza en su representación simbólica, en el CdL 2.10 identifica los elementos correspondientes entre dos triángulos semejantes. En el CdL 2.11 se abre el camino para que el estudiante

decida sí, encontrar el lado faltante escribiendo la proporción y despejando la incógnita o usando la razón de proporcionalidad como factor del lado correspondiente. Si decide tomar el CdL 2.12, expresa la proporción que determina la semejanza de triángulos y encuentra el valor desconocido de la misma usando despeje de ecuaciones, o si toma el criterio de logro 2.19 encuentra la razón de semejanza y con este valor como factor de la medida de un lado, encuentra la medida del lado faltante. Finaliza el camino de aprendizaje al determinar la medida del lado desconocido en el CdL 2.13, para dar la información de salida, debe explicar la forma en que se usó la semejanza triangular para hallar la altura de la torre, que se entiende es una distancia de difícil medición.

Se sugiere que el docente interactúe constantemente con los estudiantes, esto permite que los educandos aclaren las dudas que tengan. El profesor también debe enfatizar en la importancia de escribir y realizar los procedimientos algorítmicos en forma ordenada. Es importante tomar un buen tiempo de la clase para la exposición de los diferentes resultados en el gran grupo de clase.

*Evaluación.* Es muy importante identificar que los estudiantes recorran la mayor parte del grafo de criterios de logro. De manera primordial que el profesor observe la habilidad de los estudiantes para determinar la semejanza triangular (CdL 2.6 y 2.7), también que el estudiante exprese las proporciones que relacionan los lados de los triángulos semejantes y utilice un método que le permita dar solución a la pregunta (CdL 2.12 y 2.19). Finalmente, verificamos que el estudiante justifique el resultado obtenido. El imprimible de las tareas para ser implementadas se puede encontrar en el anexo 10.

## **2.2. Examen final**

Una de las partes más importantes de esta unidad es la evaluación, porque permite identificar el progreso de los estudiantes e identifica las debilidades que se puedan presentar durante el proceso de aprendizaje. A partir de los resultados de la evaluación, el docente puede planear sesiones de realimentación que contribuyan para que el aprendizaje de los estudiantes mejore.

Para la evaluación final de la unidad didáctica diseñamos un examen que permite observar el aprendizaje final de los estudiantes al implementar la unidad didáctica. El examen consta de cinco preguntas, tres para el primer objetivo y dos para el segundo.

Las preguntas uno, dos y tres están diseñadas para verificar que el estudiante identifica los criterios de semejanza y los usa para justificar que dos triángulos son semejantes.

Las dos preguntas restantes del examen evalúan el aprendizaje de los estudiantes con respecto al segundo objetivo. Se puede observar si el estudiante usa apropiadamente los criterios de semejanza en la solución de situaciones problema.

En las dos últimas preguntas, el estudiante tiene la posibilidad de usar la semejanza de triángulos como estrategia de solución y encontrar la medida del lado faltante. En esta parte del examen el estudiante debe realizar procedimientos relacionados con la extracción de datos del enunciado, establecer correspondencias entre lados y ángulos, identificar criterios de semejanza y desarrollar la ecuación para hallar el lado faltante. El examen para imprimir se encuentra en el anexo 11. A continuación, mostramos el diseño de las preguntas.

1. Determine usando un criterio de semejanza, si los triángulos ABC y CDE son semejantes.



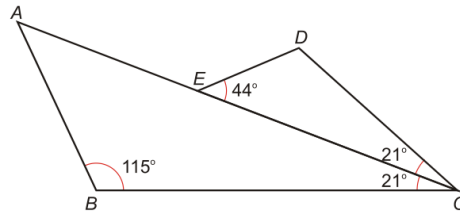


Figura 21. Triángulos semejantes

2. En la siguiente figura, ¿Son semejantes el triángulo interior y el exterior? Explique el criterio de semejanza usado para responder la pregunta.

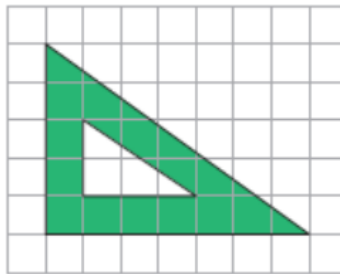


Figura 22. Triángulos en cuadrícula

3. En las figuras siguientes, a partir de la información dada, determine las parejas de triángulos que son o no semejantes. En caso positivo, indique cuál es el criterio que lo confirma y justifique su respuesta.

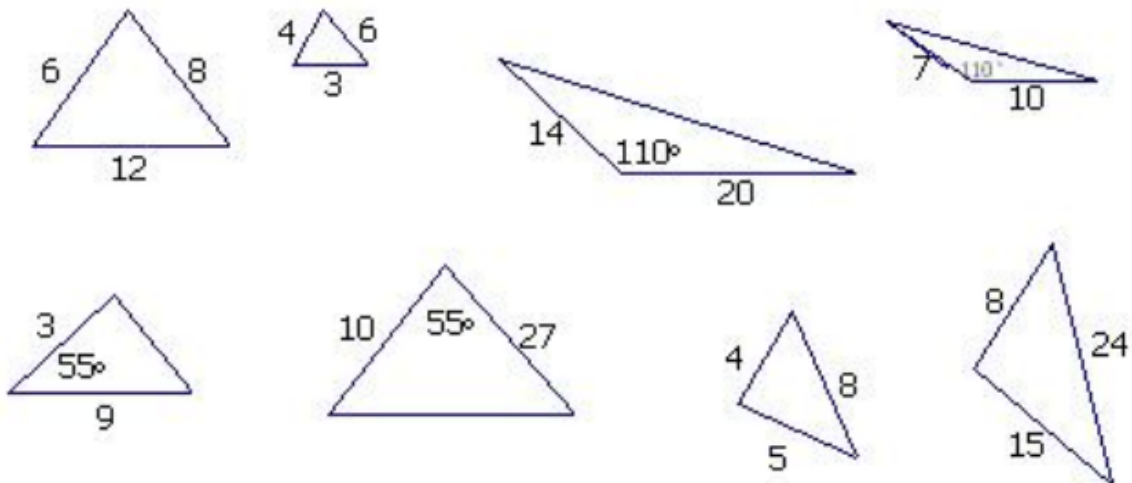


Figura 23. Triángulos

4. Miguel y Juliana están desarrollando una actividad para el colegio en la que deben calcular la altura de un poste de luz, para ello utilizan un espejo.

Para poder realizar el cálculo, Miguel coloca el espejo en el suelo a 8,5 m del poste y desde ese punto empieza a retroceder hasta que puede observar en el espejo la bombilla. En ese instante, Juliana toma las medidas que se observan en la figura.

Para hallar la altura del poste, primero Miguel y Juliana deben determinar si los triángulos son semejantes. Determine la semejanza triangular usada por Miguel y Juliana, y encuentre la altura del poste. Justifique su respuesta.

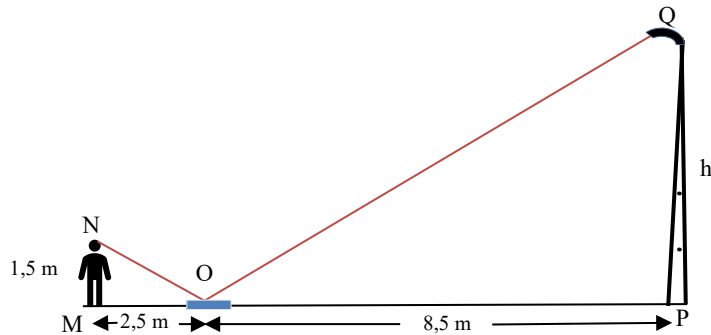


Figura 24. Punto 4 del examen

5. Un deportista quiere llegar a la isla a nadar, pero antes le gustaría conocer la distancia que hay entre la isla y la orilla. A partir de la información suministrada en el gráfico, justifica cómo obtener dicha distancia y calcúlala.

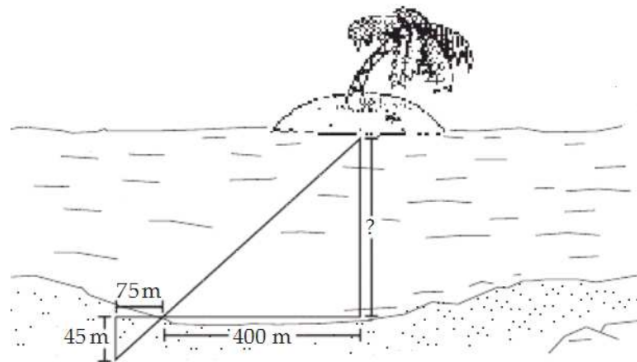


Figura 25. Distancia de un punto a la isla.

### 2.3. Rúbrica

A continuación, presentamos la rúbrica que nos permite evaluar la consecución de cada uno de los criterios de logro, que se ajustan a los niveles de desempeño establecidos en la institución.

Tabla 1

*Niveles de logro e indicadores para los dos objetivos de la unidad didáctica semejanza de triángulos*

Nivel de desempeño	Indicadores
Objetivo 1	
Superior	El estudiante activa todos los criterios de logro previstos en alguno de los caminos de aprendizaje del objetivo 1, sin incurrir en errores.
Alto	El estudiante incurre en el (E14) “describir un criterio de semejanza diferente al usado para determinar la semejanza de dos triángulos” o en el (E46) “sustentar su respuesta con información del enunciado del problema que no corresponde”, errores que no le impiden completar el camino de aprendizaje del objetivo 1
Básico	El estudiante es capaz de reconocer los lados y los ángulos de los triángulos en los numerales 1, 2 y 3, como elementos necesarios para determinar la semejanza triangular (CdL1.1 y CdL1.3), pero incurre en los errores E65-67-69, al relacionar las medidas de los lados o los ángulos con un criterio de semejanza que no corresponde o incurre en los errores E64-65-66-67-68-69, al determinar la semejanza triangular con datos insuficientes de medidas de ángulos o lados, lo que conlleva a un uso inadecuado de los criterios de semejanza triangular.
Bajo	El estudiante no identifica la información necesaria de la representación gráfica (CdL1.1) y omite datos que debe ubicar para determinar la semejanza triangular (E53).

Objetivo 2

Tabla 1

*Niveles de logro e indicadores para los dos objetivos de la unidad didáctica semejanza de triángulos*

Nivel de desempeño	Indicadores
Superior	El estudiante activa todos los criterios de logro previstos en el camino de aprendizaje del objetivo 2, sin incurrir en errores
Alto	El estudiante incurre en el (E80) “da justificaciones que no relacionan su respuesta con el enunciado original”. error que no le impiden completar el camino de aprendizaje del objetivo 2
Básico	El estudiante establece la proporción (CdL2.12), pero incurre en los errores de relacionar los lados no correspondientes, invertir la posición de los términos o sumar las diagonales de la proporción (E20, 21, 22, 23).  El estudiante identifica la razón de semejanza (CdL2.19) como un método para dar solución al problema, pero incurre en los errores de sumar, restar o multiplicar los lados correspondientes de dos triángulos semejantes (E27, 28,29)
Bajo	El estudiante es capaz de reconocer los triángulos en la representación gráfica, pero no puede ubicar los datos relevantes para la solución del problema en los numerales 4 y 5, (CdL2.1 y CdL2.3), pero incurre en el error (E47) “ubicar medidas que no corresponden en los diferentes elementos del triángulo” y (E51) “Omitir datos importantes para la resolución del problema”

Para la implementación del examen final se deben organizar los estudiantes de forma individual, esto con el fin de observar los procedimientos de cada estudiante. Se le proporciona a cada educando el examen impreso, se sugiere desarrollar en dos horas de clase, según la intensidad horaria de la institución.

## 4. CONCLUSIONES

La unidad didáctica que presentamos en esta propuesta, está diseñada para que los estudiantes de grado noveno perciban la geometría como una asignatura útil para la vida. En el proceso de construcción, se estudiaron los documentos públicos nacionales que brinda el ministerio de educación colombiano. Los primeros documentos estudiados son el plan de estudios y el Proyecto Educativo institucional (PEI) de la institución educativa donde se implementaría la propuesta. Este análisis permite identificar la pertinencia del tema para el grado escogido. También hicimos un análisis comparativo entre el plan de estudios y el documento de Estándares Básicos de Competencia (EBC) y Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA). Otro documento que estudiamos a profundidad es el documento PISA 2012. En este se explican en detalle los procesos matemáticos (formular, emplear e interpretar) y las capacidades matemáticas fundamentales (comunicación, matematización, representación, razonamiento y argumentación diseño de estrategias para resolver tareas, operaciones y un lenguaje simbólico formal y uso de herramientas). Además se encuentran los contextos matemáticos (científico, personal, social y profesional). Tanto los procesos como las capacidades y los contextos son la base que sostiene nuestra propuesta y deben tenerse presentes durante el proceso de implementación de la unidad didáctica.

Después de revisar los documentos legales, iniciamos la búsqueda de los conceptos que estructuran el tema de semejanza de triángulos, algunos hechos históricos, teoremas o postulados. Esta información nos permitió construir el mapa conceptual general del tema semejanza de triángulos, que presentamos en la primera parte del trabajo.

Las tareas de aprendizaje están diseñadas para recorrer algunos caminos de aprendizaje en los grafos de criterios de logro. En la primera parte del trabajo se explica la importancia de estos grafos y la forma en que el estudiante puede recorrer los caminos de aprendizaje. Una característica importante de los grafos de criterios de logro es que reflejan que el estudiante tiene más de una posibilidad de solución y toma decisiones en relación con los procedimientos utilizados. Con las tareas de aprendizaje, el estudiante aprenderá a reconocer criterios de semejanza y a usarlos en la solución de situaciones problema.

Además de las tareas de aprendizaje, la unidad didáctica tiene diseñadas tareas de evaluación (la tarea diagnóstica y el examen final). La implementación de la tarea diagnóstica nos permitió evidenciar si los conocimientos previos que tenían los estudiantes eran los necesarios para la implementación de la unidad didáctica, el examen nos permite observar el progreso de los estudiantes en su proceso de aprendizaje.

El listado de errores que mostramos en la primera parte del documento se diseñó antes de la implementación de la unidad didáctica. Los errores son previsiones que hacemos de las posibles dificultades que pueden presentar los estudiantes al resolver las tareas, al reconocerlos, podemos

diseñar ayudas que le contribuyan a los estudiantes a superar estos errores. Después de haber implementado la unidad didáctica, observamos que ningún estudiante incurrió en un error que no se tuviera previsto, esto nos demuestra que la previsión y la planeación son fundamentales para lograr los objetivos propuestos.

Durante la implementación de la unidad didáctica, observamos que, a pesar de haber realizado con los estudiantes actividades de realimentación, los educandos incurrieron en errores relacionados con: la correspondencia entre lados y ángulos, omitir la representación simbólica de la semejanza y plantear la proporción y despejar la incógnita. La tarea “hagamos parejas” permite aprender a establecer criterios de semejanza con la sobreposición de triángulos en cartulina. La tarea “Es lo mismo igual que semejante” le permite al estudiante establecer conjeturas y construir el concepto de criterios de semejanza a partir de videos y fichas de trabajo. La tarea “Distancia al caño de Fucha” fue una experiencia enriquecedora para los estudiantes, les permitió aclarar algunas dudas y desarrollar la tarea con autonomía. La tarea “altura de la torre” le genera un reto cognitivo al estudiante. En ella el educando debe reconocer el criterio de semejanza LAL o triángulos en posición de Thales. En el enunciado de la T2.2 “Altura de la torre” se encuentra una explicación de la forma en que se puede medir dicha altura. Es función del estudiante demostrar y justificar que esta afirmación es verdadera.

Consideramos que una limitación del aprendizaje está relacionada con la tarea “Distancia al caño de Fucha” ya que, si cerca de la institución educativa no existe un caño, quebrada, río o lago para hacer la tarea, el docente que la desee implementar podría descartarla. Sin embargo, sugerimos una simulación en el aula de clase, el docente puede establecer puntos fijos a cierta distancia y simular que en medio se encuentra un río.

Diseñamos la unidad didáctica semejanza de triángulos durante dos años y creemos que puede ser una herramienta útil en el aula de clase, ya que por medio de ella se repasan los elementos básicos de la geometría (lados, vértices, ángulos) y se utilizan conceptos y procedimientos de razones y proporcionalidad, que le permitirá mejorar sus desempeños en el pensamiento geométrico.

Por último, queremos agradecerle al docente Federmán Alfonso, nuestro tutor, quien durante estos dos años dedicó gran parte de su tiempo a acompañarnos en este proceso. También queremos agradecer a los compañeros y formadores que compartieron con nosotros su conocimiento y contribuyeron en la elaboración de la unidad didáctica, en especial a Andrés Pinzón, Paola Castro y Pedro Gómez.

## 5. LISTADO DE ANEXOS

A continuación, presentamos los anexos que complementan el análisis de contenido y cognitivo de nuestra unidad didáctica “ semejanza de triángulos”.

- ◆ Anexo 1. Listado de dificultades y errores, muestra los errores en los que pueden incurrir los estudiantes para cada una de las dificultades propuestas en la unidad didáctica
- ◆ Anexo 2. Listado de criterios de logro, muestra los criterios de logro relacionados con la unidad didáctica
- ◆ Anexo 3. Ayudas para las tareas de aprendizaje, muestra las ayudas que el profesor da a los estudiantes que incurran en errores durante el desarrollo de las tareas de aprendizaje
- ◆ Anexo 4. Grafos de criterios de logro, muestra los caminos de aprendizaje que un estudiante puede recorrer al solucionar las tareas de aprendizaje
- ◆ Anexo 5. Dificultades y errores de los conocimientos previos, muestra las dificultades relacionadas a los errores encontrados con la aplicación de la prueba diagnóstica
- ◆ Anexo 6. Prueba diagnóstica, muestra la prueba que nos permitirá determinar si un estudiante ha adquirido los conceptos necesarios para abordar nuestra unidad didáctica
- ◆ Anexo 7. Realimentación de la prueba diagnóstica, muestra las actividades que proponemos para lograr que los estudiantes afiancen o adquieran los conocimientos previos, que nos permitan dar inicio a las tareas de aprendizaje del tema semejanza de triángulos
- ◆ Anexo 8. Triángulos para recortar T1.1
- ◆ Anexo 9. Presentación tarea T1.1
- ◆ Anexo 10. Formulación de las tareas
- ◆ Anexo 11. Examen final

### Referencias

- Gómez, P. (2018). modulo 9: Compartir el trabajo con los colegas. En G. Pedro, *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (págs. 413-425). Bogotá: Universidad de los Andes.
- Romero, I., & Pedro, G. (2018). Análisis de actuación. En P. Gomez, *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (págs. 269-231). Bogotá D.C.: Universidad de los Andes.
- MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencia en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá: Autor.
- Ministerio de educación, c. y. (2013). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: Matemáticas, Lectura y Ciencias*. Madrid: Secretaría general técnica.,

- MEN. (2016). *Derechos básicos de aprendizaje V.2*. Bogotá: Autor.
- Bernal, P., Osorio, D., Toloza, J., y Alfonso, F. (2018). Documento final de la actividad 1.4 de MAD 7. Documento no publicado. Bogotá: Universidad de los Andes.
- Bernal, P., Osorio, D., Toloza, J., y Alfonso, F. (2018). Documento final de la actividad 2.4 de MAD 7. Documento no publicado. Bogotá: Universidad de los Andes.
- Bernal, P., Osorio, D., Toloza, J., y Alfonso, F. (2018). Documento final de la actividad 3.4 de MAD 7. Documento no publicado. Bogotá: Universidad de los Andes.
- Bernal, P., Osorio, D., Toloza, J., y Alfonso, F. (2018). Documento final de la actividad 4.4 de MAD 7. Documento no publicado. Bogotá: Universidad de los Andes.
- Bernal, P., Osorio, D., Toloza, J., y Alfonso, F. (2019). Documento final de la actividad 5.1 de MAD 7. Documento no publicado. Bogotá: Universidad de los Andes.
- Bernal, P., Osorio, D., Toloza, J., y Alfonso, F. (2019). Documento final de la actividad 7.2 de MAD 7. Documento no publicado. Bogotá: Universidad de los Andes.
- Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En L. R. Coord, E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M. M. Socas (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: ice - Horsori. Disponible en <https://goo.gl/g2cS1G>.
- Cañas M, Gómez P y Pinzón A. (2017). módulo 3: Análisis de contenido. En G. Pedro, *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (págs. 73). Bogotá: Universidad de los Andes.
- Franchi L., H. d. (2004). Tipología de Errores en el Area de la Tipología Plana. *Edurece Lrevista venezolana de educación*, 63-71.
- Kaput, J. (1992). Technology and mathematics education. En D. A. Grouws (Ed.), *Research on mathematics teaching and learning* (pp. 515–556). New York: Macmillan