

## Álgebra lineal y cónicas, relación implícita que se hace explícita

*Albert Stevent Sánchez Díaz\**  
*Jairo Alberto Acuña Quiroga\*\**  
*Jerson Leonardo Caro Reyes\*\*\**

### RESUMEN

Presentamos una experiencia de aula desarrollada en el espacio de formación de Tecnología en el aula del proyecto curricular Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, en la cual se pretende hacer uso por una parte del álgebra lineal para caracterizar las secciones cónicas, y por otra, el hacer uso de las TIC como herramienta en la demostración matemática. En este artículo encontraremos algunos

referentes teóricos necesarios para desarrollar la actividad, una descripción breve de la misma, seguida de los diferentes avances obtenidos con el desarrollo de esta, y para finalizar hacemos una reflexión con respecto al aporte brindado por el desarrollo de esta actividad en estudiantes para profesor de matemáticas.

**Palabras clave:** sistema de representaciones, cónicas, álgebra lineal, actividad, TIC

---

\* Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: tnevets@hotmail.com

\*\* Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: jaacunaq@correo.udistrital.edu.co

\*\*\* Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: leonardoreyes0202@hotmail.com

## CONTEXTUALIZACIÓN

La experiencia está centrada en cómo los estudiantes para profesor de matemáticas (EPP) del espacio de formación de Tecnología en el aula, de la Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, hacen uso de algunos conceptos del álgebra lineal para caracterizar las secciones cónicas y cómo hacen uso de las TIC como herramienta de demostración en una situación problema. La necesidad de realizar esta actividad surge de observar el mínimo trabajo que se desarrolla en la licenciatura con respecto al trabajo de álgebra lineal y de las secciones cónicas. Esta última hace parte de los conocimientos básicos en la Educación Básica, y con esto es necesario que nosotros como docentes tengamos un conocimiento más amplio que el que se considera que los estudiantes deben manejar.

## REFERENTES TEÓRICOS

Tomamos como referencia, en primer lugar, la definición de cónica que Del Río (1996) plantea en su libro, la cual es:

El lugar geométrico de los puntos del plano tales que el cociente entre sus distancias a un punto fijo, denominado foco, y a una línea recta, denominada directriz, es siempre el mismo, es decir, es constante, cuando esta constante es menor a la unidad es una elipse, cuando es igual, una parábola y cuando es mayor, una hipérbola (p. 41).

Las secciones cónicas se pueden clasificar en tres: elipse, hipérbola y parábola; cada una de estas se presentan en tres formas canónicas de ecuaciones de segundo grado: la primera para la elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , para la hipérbola  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Y para la parábola  $y^2 = kx$  (Del Río, 1996).

Por su parte, Fraleigh (1998) propone como aplicabilidad del cálculo de los valores propios de una matriz, caracterizando las formas cuadráticas con el producto de dichos valores. Nos propone, además, un camino específico para llevar al aula esta propuesta, en tres pasos, a saber: 1) Como primer paso propone la conceptualización de lo que se refiere una forma cuadrática, y cómo expresar esta como una matriz simétrica de orden  $n \times n$  (donde  $n$  es el número de variables de la forma cuadrática). 2) El cálculo de los valores propios de una matriz  $A$ , viendo este como los valores que puede tomar la variable  $\lambda$ , en la ecuación  $Det(A - \lambda I) = 0$ . 3) Finalmente, se encuentra la

caracterización de las formas cuadráticas, dependiendo del producto de los valores propios que la representan; en nuestro caso, como trabajamos sobre el plano cartesiano, tendríamos siempre dos variables; por tal razón tendremos siempre una matriz de orden  $2 \times 2$  y la caracterización es: Parábola si  $\lambda_1 \lambda_2 = 0$ , Elipse si  $\lambda_1 \lambda_2 > 0$  y Hipérbola si  $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ .

Por otro lado, con la utilización de programas de geometría dinámica se puede evidenciar un proceso de visualización tanto interna como externa en la que según Castro (s. f.) el estudiante interpreta el concepto o el problema, lo manipula mentalmente (uso de las representaciones internas) y lo expresa sobre un soporte material (representaciones externas). En este sentido, la principal ventaja del manejo de las TIC en la educación consiste en que las figuras dejan de ser estáticas, y de forma dinámica permiten observar distintos puntos de vista e incluso interactuar con ellas al modificar ciertas condiciones en el diseño y analizar qué es lo que ocurre (Mora, 2007). De este modo, una vez incluida la computadora en las clases, según Cuevas Vallejos (2000) la computadora se ve como una herramienta que nos permite la creación de ambientes de aprendizaje inteligentes, propósitos generales en la labor cotidiana del docente y/o alumno o como herramienta para generar matemática.

En cuanto a la metodología usada, se tomó como base fundamental la teoría de la objetivación de Radford (2006), donde se propone que una comunidad de aprendizaje tiene como fin la objetivación del saber; además, considera que cada miembro de la comunidad debe dar a conocer a los demás sus procesos realizados frente a determinado problema. Finalmente, en toda comunidad de aprendizaje se plantea el trabajo en grupos pequeños, en donde intervienen tres fases: EL TRABAJO (es el que realizan cada uno de los grupos interactuando entre ellos para la resolución de la situación), INTERCAMBIO (luego de tener conclusiones por cada grupo pequeño, estos comparten y reflexionan con los demás grupos para tener nuevas y más fuertes conjeturas) y DISCUSIONES GENERALES (es un momento donde se valida en cada grupo pequeño, lo obtenido en la fase del intercambio).

#### DESCRIPCIÓN DE LA EXPERIENCIA DE AULA

La experiencia se basa en una construcción planteada en el libro *Lugares geométricos. Cónicas*, de la Editorial Síntesis:


Dibuja una circunferencia y traza varias cuerdas perpendiculares a un diámetro. Cada una de estas cuerdas corta a la circunferencia en dos puntos,

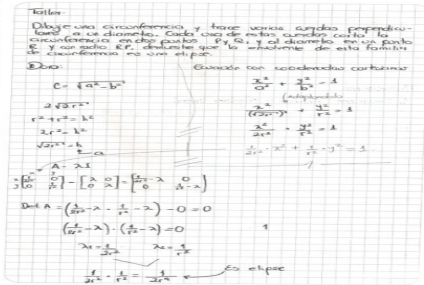

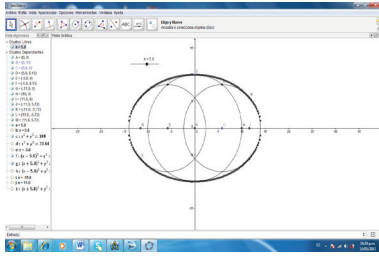
P y Q, y al diámetro en uno, R. Traza las circunferencias centradas en R y con radio RP. Demuestre que la envolvente de esta familia de circunferencias es una elipse (p. 198).

Teniendo en cuenta esta situación se propone desarrollarla a partir del trabajo en grupos pequeños en los cuales deberán enfrentar la situación. Posteriormente se realiza una socialización entre los diferentes grupos para generar nuevas conjeturas, y al finalizar generaremos el momento de validación de lo realizado por los diferentes grupos, todo esto basado en la teoría de la objetivación (Radford, 2006).

**LOGROS Y DIFICULTADES**

A continuación se mostrarán los resultados encontrados en el desarrollo de la actividad. A su vez relacionaremos el uso de las tecnologías en el aula con la resolución de una situación planteada, en la que se pide a los estudiantes usar los valores propios de una función cuadrática en el proceso de la demostración. En la siguiente tabla se evidenciarán dichos resultados:

	<i>Resolución de problemas</i>	<i>Uso de las tecnologías</i>
Algebra lineal (valores propios de una matriz)	<p>En el proceso de la resolución de problemas, se observa que los estudiantes tienen la capacidad de tanto de representar de manera matricial una forma cuadrática con dos y tres variables, como encontrar los valores propios de esta matriz, como se observa a continuación:</p> 	<p>En cuanto al uso de las tecnologías en el aula, no se trabajó de forma específica con el cálculo de los valores propios de una matriz. En ese sentido se observa que esta fue una dificultad en el sentido de encontrar valores propios de una matriz de 3x3, puesto que inmersa está una ecuación cúbica, y para obtener los valores propios es necesario utilizar métodos muy complejos como el de Cardano &amp; Tartaglia.</p>

	Resolución de problemas	Uso de las tecnologías
Secciones cónicas	<p>Es importante resaltar que los estudiantes ya habían trabajado con secciones cónicas, por tanto, conocían la expresión canónica de estas, entre ellas elipse, hipérbola y parábola.</p> <p>Por otra parte, hubo dificultades en el momento de comprender el hecho de que para poder expresar la ecuación de una cónica en una matriz era necesario hacer de esta una forma cuadrática; por lo tanto, esta debía pasar por el origen del sistema de coordenadas (el caso de la parábola), o que dicho origen sea el punto medio de los focos (como es el caso de la elipse e hipérbola).</p>	<p>En cuanto al uso de las tecnologías con respecto a las secciones cónicas, se usa el programa Geogebra, donde se construyen estas secciones y el programa mismo calcula la ecuación, y es aquí donde se llega a la ecuación canónica de cada una de estas, teniendo como referencia la traslación de la gráfica, tanto en el eje y como en el eje x.</p>
	<p>Se observa que hubo dificultad en el desarrollo de la situación, era necesario identificar cuál era la función de la cobertura de la familia de circunferencias, y a partir de esto observar si esta era una forma cuadrática y si así fuese qué clase de cónica sería. Pese a esto, un grupo concluyó partiendo de que esta ya era una cónica, y encontró sus semiejes, como se observa a continuación:</p>  <p>Aunque no se podría ver este proceso como una demostración, sí se aplica todo lo visto en clase que es lo importante de la actividad como tal, como se observa en la siguiente imagen:</p> 	<p>En la demostración como tal se observa que los estudiantes utilizan el programa geogebra como modelador de la situación, pero no la usan en el desarrollo de la misma.</p> <p>En ese sentido nos vemos en la necesidad de profundizar y, como parte del proceso, de las discusiones generales (Radford, 2006), demostrar con rigor el porqué la cobertura de la familia de las circunferencias es una elipse, a partir de lo visto en clase añadiendo el uso de la derivada parcial y de las tecnologías en el aula como justificación de la demostración específica, como se observa a continuación; cabe resaltar que esta demostración hará parte de la exposición del proyecto.</p> 
Demostración de la situación		

## REFLEXIÓN

Hemos evidenciado que los diferentes software o TIC son utilizados por los estudiantes para profesor como herramienta de modelación de diferentes situaciones, limitando el potencial de estos instrumentos tienen. Es importante que los EPP refuercen el proceso de demostración, ya que fue donde se evidenciaron dificultades, además de los problemas de lograr identificar una forma cuadrática como cónica o de caracterizarlas, lo cual de cierta manera se logró avanzar en el desarrollo del álgebra lineal. En este sentido es donde se observa la importancia de lograr relacionar los diferentes tipos de representación de un mismo objeto matemático, en este caso, las cónicas: desde la expresión algebraica, expresada también de manera matricial, o a través de la representación geométrica.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Del Río, José (1996) *Lugares geométricos: Cónicas*. Madrid. Editorial: Síntesis.
- Radford, L (2006) Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Relime*, Número especial, pp. 103 -129
- Fraleigh, John. (1998) *Álgebra lineal*. México: Addison-Wesley
- Castro, E. (S. F.). *Representaciones y modelización*. Universidad de Granada. [Consulta: 12 de abril de 2012]. Disponible en: <http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/CastroE97-2531.PDF>
- Mora Sánchez, J. A. (2007). *Geometría dinámica en secundaria*". [Consulta: 2 de abril de 2011].
- Cuevas Vallejos, C. (2000) *¿Que es software educativo o software para la enseñanza?* [Consulta: 2 de abril de 2011] Disponible en: <http://www.matedu.cinvestav.mx/~ccuevas/SoftwareEducativo.htm>