Maestría en Educación Matemática

La modelación de situaciones problema por medio de una ecuación lineal

Rocio Melo, Catalina Páez y Carlos Velasco

Bogotá, noviembre de 2019

En este documento, presentamos la unidad didáctica diseñada por el grupo 8 de la séptima cohorte de la Maestría en Educación Matemática de la Universidad de los Andes. La unidad didáctica se implementó con 22 estudiantes de grado 6º del colegio Gimnasio Los Pinos, ubicado al norte de Bogotá.

Aunque la unidad didáctica se encontraba diseñada para grado 8°, al revisar los requisitos expuestos para cada grado en el programa de matemáticas del colegio Gimnasio los Pinos, decidimos cambiar la implementación a grado 6°. Debido a que, el currículo para grado 6° estipula para el tercer trimestre indicadores de logro relacionados con proponer patrones de comportamiento numéricos, expresar verbalmente o por escrito procedimientos matemáticos y trabajar sobre números desconocidos para dar respuestas a situaciones problema.

Con el fin, de establecer las contribuciones de la unidad didáctica a los requerimientos académicos para los alumnos de grado 6 en el área de matemáticas, revisamos los estándares básicos de competencia (MEN), el informe del programa internacional para la evaluación de estudiantes (PISA 2012) y los derechos básicos de aprendizaje (DBA). En cuanto a los estándares básicos de competencia las contribuciones se centran en el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos. Ya que, este pensamiento hace referencia al estudio de regularidades al identificar patrones y plantear los como algoritmos. Por lo que, permite que el estudiante desarrolle habilidades al momento de construir expresiones algebraicas lo que esta asociado al conocimiento matemático formal. Con respecto al documento PISA 2012, resaltamos los procesos de formular y emplear, debido a que cada situación problema planteada debe ser transformada en una ecuación lineal con una sola incógnita, sin llegar a un valor numérico específico. Esta transformación requiere capacidades como comunicación de los planteamientos, matematización de las relaciones encontradas, representación de la situación y utilización de operaciones como enlaces entre elementos al utilizar un lenguaje simbólico, formal y técnico. Dichas capacidades se pueden relacionar con lo establecido en algunos derechos básicos de aprendizaje de los grados 6º, 7º y 8º. Del DBA número 16 para grado 6° "usa letras para representar cantidades y las usa en expresiones sencillas para representar situaciones", tomamos los conceptos asociados con el planteamiento y solución de problemas al utilizar ecuaciones lineales con una incógnita. En el DBA número 7 para grado 7º "manipula expresiones lineales, las representa usando gráficas o tablas y las usa para modelar situaciones", identificamos que se espera que el estudiante encuentre distintas representaciones para modelar ecuaciones lineales. Con respecto al grado 8°, encontramos el DBA número 1 relacionado con "comprender que una función sirve para modelar relaciones de dependencia entre dos magnitudes", en el que se deben establecer diferentes relaciones entre los datos dados en el enunciado para encontrar una representación algebraica antes de solucionar la situación problema.

1. ANTES DE IMPLEMENTAR

En este apartado, presentamos la fundamentación y justificación de la unidad didáctica "La modelación de situaciones problema por medio de una ecuación lineal". Por lo que, incluimos información correspondiente al análisis de contenido, análisis cognitivo y a la estructura general de la unidad didáctica.

1. ARTICULACIÓN DE LOS CONTENIDOS

Describimos el análisis de la estructura del contenido del tema de ecuación lineal. Para ello identificamos conceptos y procedimientos relevantes, algunos sistemas de representación y las relaciones que se pueden establecer entre los procedimientos, los sistemas de representación y los contextos fenomenológicos que dan sentido al tema.

1.1. Conceptos y procedimientos

Las ecuaciones se definen como una igualdad algebraica dentro de un anillo conmutativo. Para nuestro caso, las ecuaciones lineales con una incógnita están definidas en los números racionales. En esta igualdad algebraica intervienen operaciones con propiedades multiplicativas y aditivas (asociativa, conmutativa, inverso aditivo o multiplicativo, distributiva, clausurativa y modulativa) lo que permite plantear algebraicamente los fenómenos que involucran ecuaciones con una sola incógnita. Por otro lado, la igualdad algebraica contiene relaciones entre términos independientes, coeficientes y una incógnita. La incógnita determina el grado de la ecuación. En este caso se trabaja con la de grado uno con única solución.

En las ecuaciones lineales se pueden diferenciar algunos tipos como, término independiente como factor entre una adición ($a(x+b)=c$), coeficiente igualado a un término independiente ($ax=b$), más de un coeficiente ($ax+b=dx+c$), producto de términos independientes ($x=ab$), adición de términos independientes ($x+a=b$), cociente de términos independientes $\left(x=\frac{a}{b}\right)$, cociente entre la adición de un coeficiente y un término independiente $\left(\frac{x+b}{a}=c\right)$ y adición entre coeficiente y término independiente ($ax+b=c$). Estos tipos de ecuaciones se generan según las condiciones dadas en una situación problema. Por ejemplo, Camila y Juliana observan un mapa donde la distancia entre dos pueblos es de $16\ cm$. Si la distancia real es de $32\ km$ ¿Cuántos kilómetros representan cada centímetro del mapa? Por lo que el estudiante puede plantear la expresión algebraica $16x=32$. En este enunciado se observa la condición de la distancia en kilómetros, según su relación con los centímetros, lo que genera una ecuación de tipo coeficiente igualado a un término independiente($ax=b$).

1.2. Campo procedimental

En el siguiente listado mostramos los pasos que se deben tener presentes al momento de plantear o modelar una situación por medio de una ecuación lineal.

- Identificar la incógnita.
- Establecer la relación entre los términos independientes y los coeficientes.
- Reconocer el término independiente de ecuación lineal asociado al concepto de proporcionalidad.
- Plantear ecuaciones lineales a partir de un enunciado.
- Plantear ecuaciones lineales según las propiedades de un anillo conmutativo en el conjunto de los números racionales.
- Formular ecuaciones lineales que modelen fenómenos de proporcionalidad.

A continuación, en la figura 1 exponemos las relaciones anteriormente mencionadas entre el campo conceptual y el procedimental por medio de un mapa conceptual.

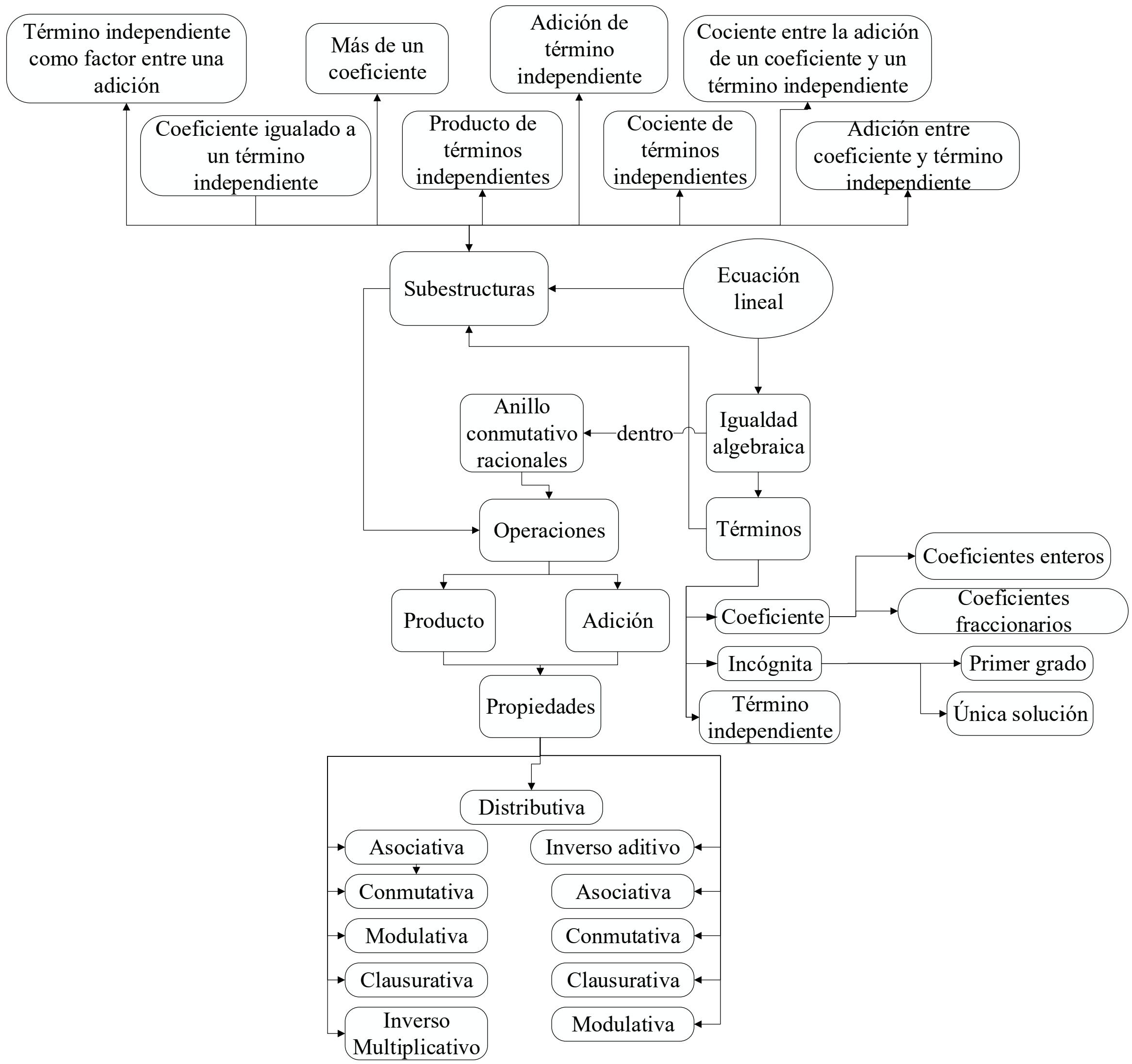


Figura 1. Estructura conceptual de la ecuación lineal con una incógnita

1.3. Sistemas de representación

Los sistemas de representación que se utilizan en situaciones que involucran ecuaciones lineales son numérico, simbólico, gráfico, verbal, tabular, geométrico, pictórico, ejecutable y manipulativo. Estos sistemas muestran las formas para ejemplificar un tema matemático y también, las transformaciones que se pueden hacer entre los mismos.

Para nuestro tema ecuaciones lineales con una incógnita, hemos seleccionado cuatro sistemas de representación simbólico, geométrico, manipulativo y ejecutable. Debido a que, estos sistemas facilitan el manejo y la representación del concepto. Además, entre estos cuatro sistemas de representación se pueden generar equivalencias al solucionar una situación problema.

Encontramos que el sistema de representación simbólico utiliza números, letras y símbolos que incluyen las operaciones de suma y multiplicación, con sus respectivos inversos operativos. Una ecuación lineal está compuesta por dos miembros, separados por el signo igual. En el miembro izquierdo generalmente se escriben los términos que contienen la incógnita x. Se pueden establecer ocho expresiones generales referentes a los tipos de ecuación lineal con una incógnita.

- $ax = b$
- $x = ab$
- $x = \frac{a}{b}$
- $ax + b = c$
- $a(x + b) = c$
- $ax + b = dx + c$
- $\frac{x+b}{a} = c$
- $x + a = b$

Con respecto, al sistema manipulativo, diseñamos una balanza (figura 2) que permite generar una ecuación por medio de la comparación entre las masas de diferentes objetos que den muestra de los términos de la ecuación lineal. El equilibrio es el elemento indispensable en este sistema de representación, por ello la viga suple el signo igual de la ecuación.

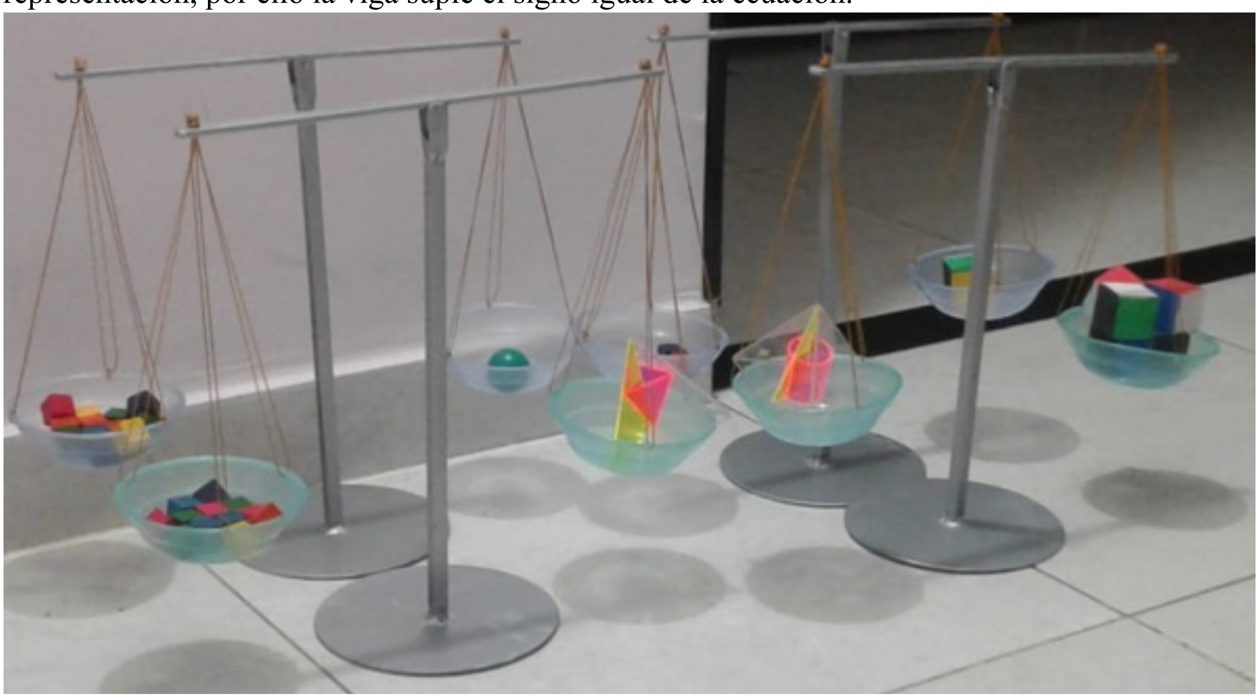


Figura 2. Sistema manipulativo

El sistema de representación geométrico permite modelar situaciones, en las que se solicita determinar el perímetro de un polígono o de una circunferencia y el área o alguno de los lados de los polígonos regulares. En cuanto a los polígonos irregulares es posible hallar lados y perímetros, siempre y cuando la relación entre sus lados se pueda expresar en términos de uno de ellos. La representación geométrica se considera un sistema, ya que, utiliza los elementos de una ecuación lineal como medidas dentro de una figura geométrica. Por ejemplo, al utilizar los postulados de Euclides y formar un segmento como nuestra unidad de medida, podemos encontrar el valor de la incógnita según la ecuación de perímetro o área de polígono. De esta manera, se establece una condición de medida según uno de los demás lados, como se muestra en la figura 3.

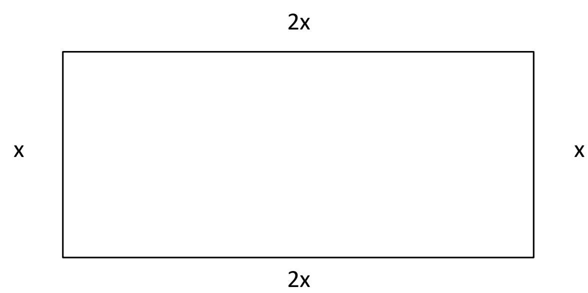


Figura 3. Sistema geométrico

Finalmente, la ecuación lineal cuenta con una variedad de sistemas de representación ejecutables, como Algebra Tiles. Esta aplicación permite representar dos situaciones: mantener la balanza en equilibrio con ayuda de una serie de figuras geométricas que pueden ser ubicadas a ambos lados sin importar el orden y ejemplificar diversas ecuaciones lineales por medio de rectángulos (que representan el coeficiente) y cuadrados (que representan los términos independientes), para luego poder determinar un posible número como respuesta del valor desconocido. Además, se tiene la opción de asignar color amarillo o verde en caso de utilizar valores positivos o, rojo para representar valores negativos.

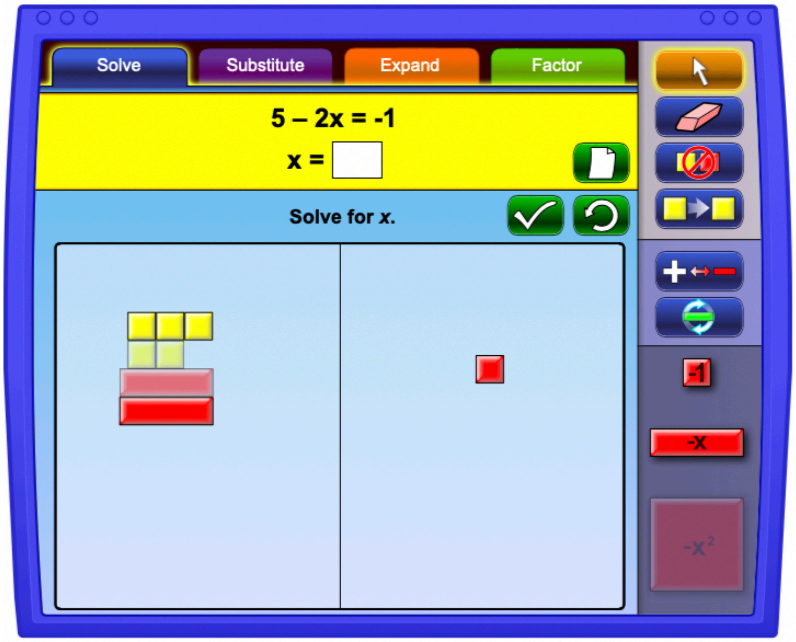


Figura 4. Sistema ejecutable

Las relaciones que se pueden establecer entre los diferentes sistemas de representación permiten interpretar la estructura conceptual que envuelve un tema de las matemáticas escolares. Por ejemplo, una situación puede ser representada mediante un dibujo y luego se puede representar de manera algebraica. En el mapa conceptual de la figura 5, presentamos los sistemas representación de la ecuación lineal. Las líneas punteadas corresponden a los cambios a pasar de un sistema de representación a otro y las flechas indican el paso que se puede hacer entre los sistemas de representación.

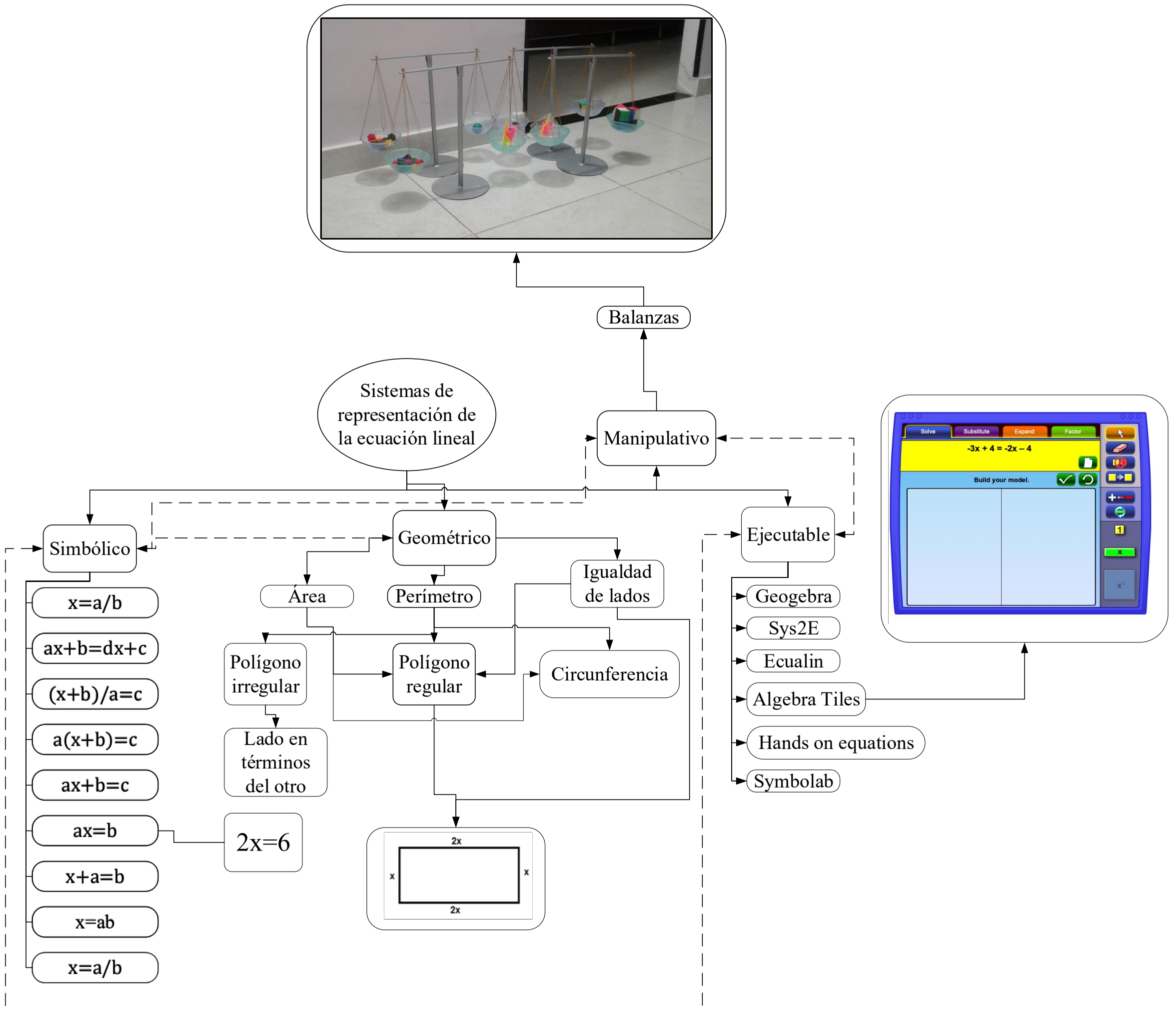


Figura 5. Sistemas de representación

1.4. Contextos fenomenológicos que involucran una ecuación lineal

En este apartado exponemos los fenómenos que dan sentido a las ecuaciones lineales con una incógnita, basándonos en la estructura conceptual del tema que establece la relación entre la incógnita y los términos independientes. Realizamos un listado minucioso de fenómenos relacionado a continuación.

Los primeros fenómenos pertenecen a la física. Por ejemplo, encontramos la ley de Ohm como la relación existente entre el voltaje, la resistencia y la corriente. Se define de la siguiente manera V=I×R, donde V es el voltaje, I la corriente y R es resistencia. Es decir que la intensidad de la corriente que circula a través de un conductor es directamente proporcional a la diferencia de potencial entre los extremos del conductor e inversamente proporcional a la resistencia el conductor. También, identificamos la velocidad en función de distancia y tiempo v=x/t, la densidad de una sustancia que es la razón entre la masa de un cuerpo y el volumen que ocupa definida con la siguiente expresión ρ=m/V. La elongación que se conoce como el desplazamiento respecto al punto de equilibrio y se refiere comúnmente a los sistemas oscilantes, se expresa por la ecuación $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$, donde A es la amplitud, ω es la frecuencia angular, t es el tiempo y φ es la fase inicial que indica el estado de oscilación. Dicha situación física involucra una función trigonométrica. Por último, tenemos la ley de Hooke que afirma que la deformación elástica de un cuerpo es proporcional a la fuerza que produce tal anomalía, siempre y cuando no se sobrepase el límite de elasticidad ϵ=δ/L, δ el alargamiento y L la longitud original.

En la química encontramos el balanceo de ecuaciones por tres métodos tanteo, redox y método algebraico. Consideramos el método algebraico, que consiste en el antiguo método de "falsa posición", en el que se le asigna una letra a cada elemento químico y con esto se generan varias ecuaciones lineales. Luego utiliza el método griego en el que se establece un valor numérico a una de las incógnitas para encontrar el otro valor desconocido. Con el siguiente ejemplo ilustramos la explicación dada anteriormente: a $a\,Mn\,O_2 + b\,H\,Cl \rightarrow c\,Mn\,Cl + d\,Cl_2 + e\,H_2\,O$, $Mn\;a = c$, $O\;2a = e$, $H\;b = 2e$, $Cl\;b = c + 2d$. Este método corresponde a la ecuación de la forma $ax + b = c$.

En matemáticas, encontramos fenómenos de tipo numérico para hallar el valor desconocido a partir de relaciones entre números; por ejemplo, si la quinta parte de un número es igual a 120, ¿cuál es el número? La ecuación que modela este problema es de la forma $\frac{x}{5} = 120$. También, en trigonometría, encontramos situaciones donde se puede crear una ecuación a partir de las razones trigonométricas; por ejemplo, un ornitólogo observa un pájaro a una distancia de $30\ m$ en la copa de un árbol con un ángulo de elevación de 60° ¿A qué altura está el pájaro? La ecuación asociada a la situación corresponde a $sin60° = \frac{30}{h}$.

De la misma manera, en geometría, se presentan problemas en los que hay que encontrar lados desconocidos de los polígonos al conocer el área y/o el perímetro de estos. Por ejemplo, si se sabe que el área de un triángulo es $144\ cm^2$ y la base $36\ cm$, hallar la altura del triángulo. La ecuación asociada a esta situación seria $144 = \frac{36\times h}{2}$. Asimismo, hay fenómenos en estadística, que permiten hallar el promedio o uno de los valores que lo integran a partir de una ecuación lineal. Por ejemplo, calcular el valor de m, de manera que la media de los datos $12,12,12,15,17,13,19,11, m, 14,14$ sea 14,7 (Joya, 2016, p.269) y se puede relacionar con una ecuación del tipo $\frac{(a+x)}{n} = b$.

Finalizamos con los fenómenos referentes a situaciones de la vida cotidiana que pueden modelarse a partir de ecuaciones lineales con una incógnita. Entre estos identificamos problemas donde hallamos porcentajes y precios desconocidos. Por ejemplo, Lorena compra un televisor LED de 32 pulgadas por un valor de $1.200.000, pero por cambio de tecnología, le ofrecen un descuento del 30%. ¿cuál es el precio final del televisor? El descuento del 30% que ofrece la tienda se obtiene con la ecuación $\frac{30}{100} = \frac{x}{1.200.000}$(Joya, 2016, p.136).

Además, encontramos situaciones en las que intervienen edades de personas, momentos temporales y en donde hay que repartir algo. Por ejemplo, una empresa repartirá auxilios para educación por $6.400.000 a tres familias. La distribución se realizará directamente proporcional al número de hijos en cada familia. Si las familias a las cuales se les dará el auxilio tienen $3,4\ y\ 5$ hijos,

¿cuánto dinero le corresponderá a cada una? La ecuación asociada a las familias con 3 hijos es $\frac{6.400.000}{12}=\frac{x}{3}$, después de simplificaciones tiene la forma $12x = 19.200.000$ (Joya, 2016, p.132).

2. EXPECTATIVAS DE APRENDIZAJE

A continuación, presentamos las expectativas de nivel superior, los objetivos de aprendizaje y las expectativas afectivas planteadas para la unidad didáctica.

2.1. Expectativas de nivel superior

Las expectativas de nivel superior son aquellas que necesitan de un periodo formativo extenso. Por consiguiente, es necesario asociar las capacidades matemáticas fundamentales con los procesos matemáticos. Seleccionamos algunas de las capacidades fundamentales, expuestas en el documento de PISA 2012, que permitieran establecer aportes y expectativas en el desarrollo de la unidad didáctica. Dichas capacidades son comunicación, matematización, representación, razonamiento y utilización de operaciones. Estas capacidades permiten al estudiante evidenciar la relación entre los lenguajes natural y algebraico, en los procesos de formular y emplear. El proceso de formular relacionado con identificar oportunidades para aplicar y utilizar las matemáticas y el proceso de emplear asociado a aplicar razonamientos matemáticos y utilizar conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas. En la tabla 1, puntualizamos los aspectos que tuvimos en cuenta para la unidad didáctica.

Tabla 1
Relación entre los procesos matemáticos y las capacidades matemáticas fundamentales

Capacidades matemáticas fundamentales	Procesos matemáticos	
	Formular	Emplear
Comunicación	Leer información, interpretarla y asociarla con un lenguaje algebraico	
Matematización	Identificar incógnitas, constantes y operaciones en un lenguaje natural y formular una ecuación	
Representación	Utilizar cualquier esquema no matemático para facilitar la comprensión de la situación	Emplear varios tipos de representación con el fin de interpretar el problema
Razonamiento y argumentación	Argumentar el planteamiento simbólico	
Utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico	Reconocer símbolos asociados a un lenguaje natural	Postular una representación simbólica de la situación en contexto planteada

Las capacidades que no involucramos en el planteamiento de la unidad didáctica son las de diseño de estrategias para resolver problemas y utilización de herramientas matemáticas, porque nuestra propuesta se centra en el planteamiento de una ecuación y no en su solución.

Por otro lado, no consideramos el proceso interpretar dentro del planteamiento de la unidad didáctica, ya que, no exigimos encontrar un resultado numérico en la solución de una situación. Además, en la definición del proceso de emplear en el marco de PISA 2012 (Ministerio de Educación Cultura y Deporte, 2013, p.13), se estipula la reflexión sobre explicaciones y justificaciones de los resultados matemáticos en cada uno de los procesos desarrollados antes de llegar al modelo de una ecuación lineal.

2.2. Objetivos de aprendizaje

Para nuestra unidad didáctica, establecimos dos objetivos que abarcan conceptos relacionados con extraer variables explícitas e implícitas de un enunciado, como términos para el planteamiento de una ecuación lineal con una sola incógnita. A continuación, presentamos y describimos los objetivos.

Objetivo 1. Representar mediante una ecuación lineal la relación entre los elementos explícitos del enunciado de una situación.

Objetivo 2. Generar una ecuación lineal desde el reconocimiento de sus elementos implícitos en una situación.

Con el primer objetivo, se espera que el estudiante reconozca la igualdad y el concepto de coeficiente al plantear una ecuación lineal con una incógnita. Cuando el estudiante lea, decodifique y relacione los datos dados dentro de un enunciado que le permitan establecer diferentes relaciones geométricas.

Con el segundo objetivo, se busca que el estudiante identifique los elementos de una ecuación lineal a partir de las relaciones que se encuentran o no en el enunciado. Es decir, se espera que el estudiante decodifique el enunciado, extraiga datos que permitan ser relacionados con el uso de herramientas (calendarios, balanzas, figuras geométricas, propiedades de las figuras geométricas) que no aparecen en la formulación de la situación y luego plantearlos como elementos de una ecuación lineal con una sola incógnita.

Dentro de los objetivos se definen los criterios de logro, que hacen referencia a una serie de procedimientos que el estudiante desarrolla para alcanzar un objetivo a corto plazo. Que en muchos casos se determinan como indicadores de logro. Además, los criterios de logro permiten identificar los errores en los que incurren los estudiantes al desarrollar un procedimiento. En el apartado, de las limitaciones se amplia la información sobre los criterios de logro y su relación con los errores.

2.3. Expectativas de tipo afectivo

Cada contenido matemático requiere de aspectos afectivos como la motivación, la confianza, la disposición y la curiosidad. Para que el estudiante se sienta en optimas condiciones emocionales y desarrolle procedimientos algebraicos con mayor destreza. En la tabla 2 concretamos las cuatro expectativas de tipo afectivo, que hacen parte del desarrollo de cada una de las actividades propuestas.

Tabla 2
Listado de expectativas de tipo afectivo

EA	Descripción
1	Muestra interés hacia el estudio de situaciones modeladas por medio de ecuaciones lineales con una incógnita
2	Desarrolla con confianza el planteamiento de ecuaciones asociadas a una situación problema
3	Muestra disposición para desarrollar actividades relacionas con las ecuaciones lineales con una incógnita
4	Desarrolla curiosidad por el conocimiento relacionado con las ecuaciones lineales

EA: Expectativa afectiva.

Con la expectativa afectiva 1, se espera que el estudiante desarrolle interés por plantear una ecuación lineal con una incógnita, al comprender las relaciones y transformaciones que se desarrollan al extraer información de un enunciado. Para la expectativa afectiva 2, se quiere que el estudiante desarrolle con confianza el planteamiento de ecuaciones asociadas a una situación problema, desde las relaciones aritméticas que se puedan establecer con uno o más elementos hallados en la situación. Para la expectativa afectiva 3 relacionada con una buena disposición no solo para el planteamiento de relaciones aritméticas, sino para la comprensión del contexto en el que se desarrolla la situación. Por último, consideramos importante que el estudiante desarrolle curiosidad, expectativa afectiva 4, por el estudio de situaciones que se modelan a partir de una ecuación lineal con una incógnita, con lo que esperamos que el estudiante comprenda la utilidad de las matemáticas en diferentes contextos.

3. LIMITACIONES DE APRENDIZAJE

Para establecer las limitaciones de aprendizaje es importante plantear procedimientos (criterios de logro, ver anexo 1) que permitan identificar cada uno de los procesos que puede realizar el estudiante, al momento de enfrentar una situación problema. En la tabla 3, mostramos un ejemplo de la relación que existe entre los criterios de logro y los errores en los que un estudiante puede incurrir cuando se enfrenta y desarrolla una tarea.

Tabla 3
Criterios de logro

CdL	Descripción	Error	Descripción
CdL1.11	Utilizo una multiplicación para determinar la dependencia entre los datos del enunciado	E4	Escribir el producto como una potencia

CdL: Criterio de logro

Para cada uno de los criterios de logro, estipulamos una serie de errores en los que un estudiante puede incurrir al plantear una operación. Por ejemplo, al utilizar la multiplicación para determinar la dependencia entre dos elementos (CdL1.11) el estudiante puede incurrir en errores como escribir el producto como una potencia (E4). Cuando el estudiante incurre en este tipo de errores se evidencia una dificultad para determinar operaciones asociadas a la situación.

Todos los errores pueden ser relacionados con una dificultad general. Por ejemplo, cuando el estudiante incurre en el error de escribir una operación de una manera diferente a la pedida, se establece que la dificultad del estudiante es la de identificar las operaciones asociadas a la situación de la ecuación lineal (ver anexo 5).

Cualquier procedimiento que se desarrolle está expuesto a la aparición de estancamientos o de errores, por lo que, para cada criterio de logro hay al menos un error. Por ejemplo, el estudiante puede incurrir en un error bien sea al reconocer los elementos de la ecuación de una forma diferente a la pedida en un enunciado o al ejecutar un procedimiento o planteamiento inadecuado.

4. Grafos de criterios de logro de los objetivos de aprendizaje

Al plantear los criterios de logro y los posibles errores en los que el estudiante puede incurrir, se plantean los caminos o rutas posibles que surgen al enfrentarse a problemas que requieran el planteamiento de una ecuación lineal con una sola incógnita. A continuación, presentamos los grafos de criterios de logro para cada uno de los objetivos de la unidad didáctica.

4.1. Grafo de criterios de logro del objetivo 1

En el grafo de la figura 6, evidenciamos los posibles caminos que el estudiante puede utilizar para extraer la información detallada en el enunciado, relacionar la información con ayuda de materiales tangibles o intangibles, plantear operaciones entre los elementos hallados y finalmente, partir de la igualdad para diseñar una ecuación lineal con una sola incógnita, que de muestra de lo registrado en el enunciado.

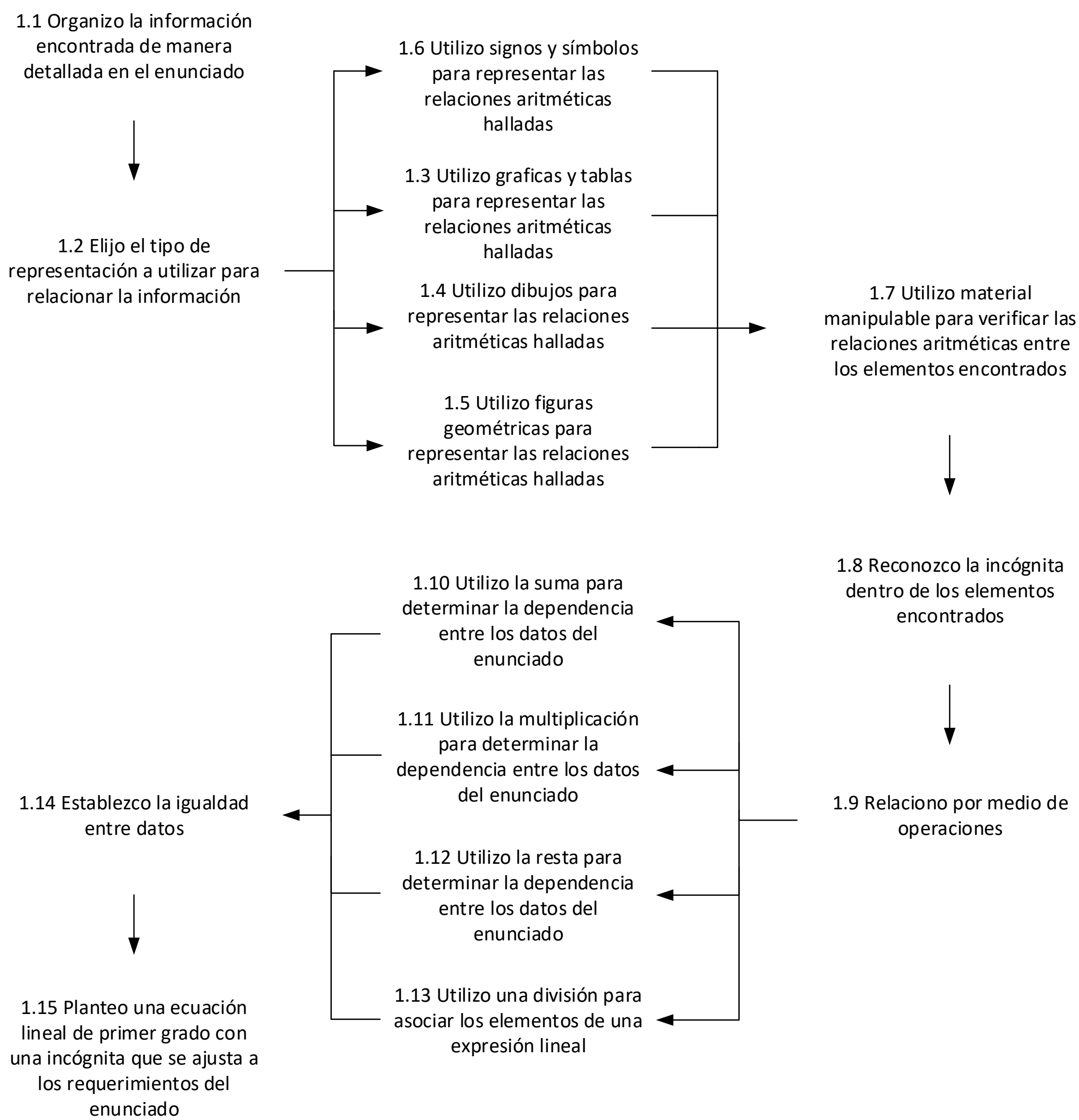


Figura 6. Grafo de criterios de logro objetivo 1

4.2. Grafo de criterios de logro del objetivo 2

El estudiante determina relaciones entre valores numéricos explícitos e implícitos del enunciado y luego establece una relación de dependencia que le permita el planteamiento de una ecuación lineal con una incógnita. En el grafo de la figura 7, mostramos aquellos posibles caminos para que el estudiante realice las tareas pertenecientes al objetivo.

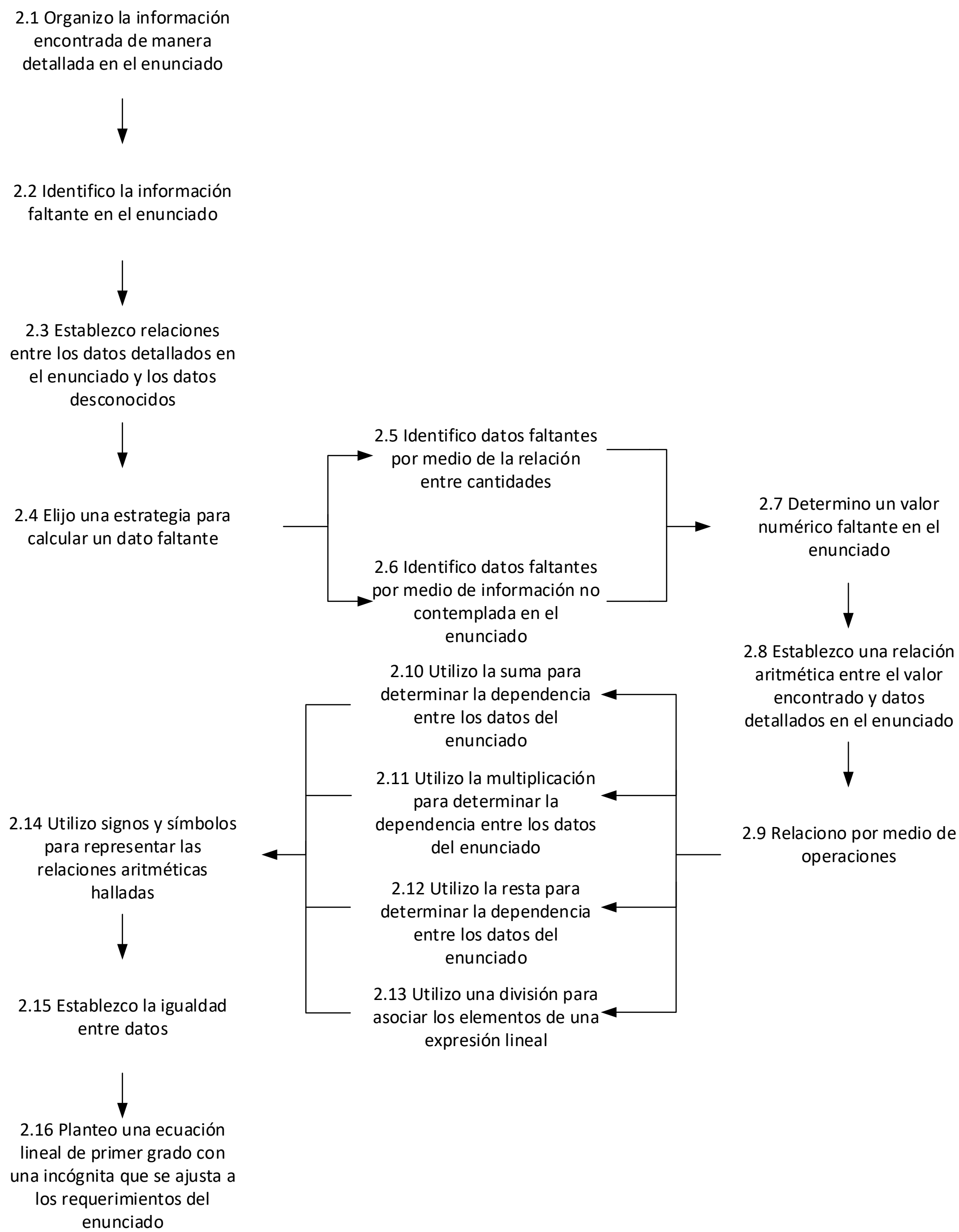


Figura 7. Grafo de criterios de logro objetivo 2

5. Esquema general de la unidad didáctica

Luego de estipular los objetivos, los caminos de aprendizaje (grafos) y los criterios de logro enlazados con los posibles errores, se establecen las tareas por objetivo. Recordamos que planteamos dos objetivos para la de la unidad didáctica. Por ello, establecemos para el primer objetivo dos tareas 1.1 Balanza y 2.2 Siembra. (ver anexo 3) De igual manera para el objetivo 2, planteamos dos tareas 2.1 Almuerzo y 2.2 Calendario. (ver anexo 3) En la tabla 4, mostramos la secuencia de las tareas de aprendizaje de nuestra unidad didáctica.

Tabla 4
Descripción de la secuencia de las tareas

Sesión	Objetivo	Tarea	Metas	Tiempo
5	Objetivo 1	T1.1 Balanzas	Pretendemos que los estudiantes reconozcan el concepto de equilibrio, con el fin de aportar a la superación de errores como los de relacionar elementos de diferentes masas, tomar la igualdad como una operación y reconocerla como una relación de equivalencia	50 min
6		T1.2 Siembra	Esperamos que los estudiantes logren identificar el papel que juegan la incógnita y el término independiente como elementos de una ecuación lineal	50 min
7 y 8	Objetivo 2	T2.1 Almuerzo	Buscamos que los estudiantes reconozcan, primero la incógnita como valor a encontrar por medio de operaciones y luego un término independiente como resultado de la relación entre dos valores no explícitos en el enunciado de la tarea (número total días de almuerzo y de no almuerzo)	100 min
9 y 10		T2.2 Calendario	Esperamos que los estudiantes identifiquen el término independiente y el coeficiente dentro de una situación en la que los datos no se encuentran explícitos en el enunciado. Además, con dichas relaciones potenciar el reconocimiento de la incógnita a partir de la equivalencia entre dos o más términos independientes	100 min

En la tabla 5, presentamos la descripción de la estructura del diseño de la unidad didáctica con cada una de las tareas diseñadas.

Tabla 5
Cronograma de actividades

Sesión	Actividad	Tiempo	Descripción
1	Presentación de los objetivos de aprendizaje	50 min	En la sesión inicial por medio de un juego se dan a conocer los objetivos a los estudiantes
2	Implementación tarea diagnóstica	50 min	Aplicación de la tarea diagnóstica
3 y 4	Realimentación de los conocimientos previos	100 min	Revisión de procedimientos realizados en la tarea diagnóstica
5	Tarea 1 objetivo1	50 min	Aplicación de la tarea 1.1 Balanzas
6	Tarea 2 objetivo 1	50 min	Realimentación de la tarea 1.1 y aplicación de la tarea 1.2 Siembra
7 y 8	Cierre del primer objetivo y Tarea 1 del objetivo 2	10 min	Se explican las fortalezas y falencias evidenciadas en el desarrollo de cada una de las tareas, tanto por parte del profesor como por parte de los estudiantes Aplicación de la tarea 2.1 Almuerzo
9 y 10	Tarea 2 del objetivo 2 Cierre del objetivo 2	100 min	Realimentación de la tarea 2.1 y aplicación de la tarea 2.2 Calendario
11	Evaluación final y realimentación de la secuencia didáctica	50 min	Aplicación de la evaluación final y realimentación de las metas alcanzadas y de las dificultades por superar

2. Tareas de aprendizaje

En este apartado, presentamos la tarea diagnóstica y las tareas de aprendizaje diseñadas para los dos objetivo de nuestra unidad didáctica. Describimos las tareas y proporcionamos algunas ideas que el profesor puede tener en cuenta a la hora de implementarlas. Además, incluimos un listado de anexos para que el profesor se remita a los documentos si desea conocer o profundizar en algunas de las temáticas relacionadas con las tareas.

1. Tarea diagnóstica

El diseño de nuestra unidad didáctica cuenta con una tarea diagnóstica que consta de diez ítems, con los que se espera verificar los conocimientos previos que debe tener el estudiante para abordar situaciones que involucran ecuaciones lineales con una incógnita (ver anexo 2). El propósito de esta tarea esta enfocado en que el estudiante afiance los conocimientos con los que cuenta, para luego utilizarlos en las tareas de aprendizaje de la unidad didáctica. Por otro lado, la tarea permite que el profesor reconozca aquellos conocimientos previos que se deben reforzar previamente a la implementación. A continuación, explicamos en detalle cada uno de los componentes que tenemos presente para la implementación de la tarea diagnóstica.

1.1. Requisitos

El estudiante debe poseer conocimientos previos asociados a realizar operaciones entre los números racionales, identificar las características y operaciones de expresiones algebraicas. Además, debe reconocer conceptos básicos de geometría como el perímetro de figuras.

1.2. Formulación

A continuación, presentamos los diez puntos que deben desarrollar los estudiantes.

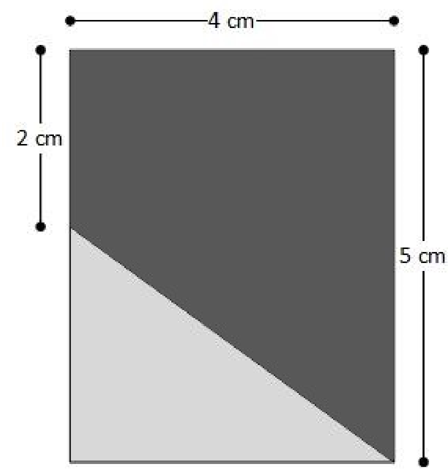
1. El clip: su simplicidad y funcionalidad lo convirtieron en un hit instantáneo. El clip más popular y el que obtuvo mayor éxito era de marca Gem (de origen británico). Este invento jamás fue patentado y se calcula que hoy en día se producen alrededor de 18 billones de clips cada año, solo en los Estados Unidos. Descubre el año en que apareció el clip en el mercado de tal manera que se cumplan las siguientes condiciones (Colombia aprendiendo, 2018).

    - El año está formado por cuatro dígitos diferentes cuya suma es 20.
    - El digito de las decenas es un cuadrado y el de las centenas es un cubo.
    - Corresponde a un número par.

2. En un mapa, la distancia entre dos pueblos es de 16 centímetros. Al revisar, se evidencio que la distancia real entre los dos pueblos es de 48 kilómetros. ¿Cuántos kilómetros representa cada centímetro del mapa? (ICFES, 2013).

a. $\frac{1}{4}$
b. $\frac{1}{3}$
c. 3
d. 4

3. Observa la figura que se muestra a continuación (ICFES, 2013).



¿Cuál o cuáles de los siguientes procedimientos permite(n) hallar el área del trapecio sombreado?

a. $(4cm * 2cm) + \left[\frac{(4cm*3cm)}{2}\right]$
b. $(4cm * 5cm) - \left[\frac{(4cm*3cm)}{2}\right]$
c. $(4cm * 3cm) - \left[\frac{(4cm*3cm)}{2}\right]$
d. $(4cm * 3cm) + \left[\frac{(4cm*2cm)}{2}\right]$

4. Para un experimento, dos estudiantes agregaron vinagre en partes diferentes (Quintero, 2018).

La cantidad total que agregó cada estudiante fue:

a. La misma, porque, aunque lo hicieron en diferente orden la suma es el mismo resultado.

b. La misma, porque usaron el mismo recipiente.

c. Diferente, porque no podían tomar las mismas medidas.

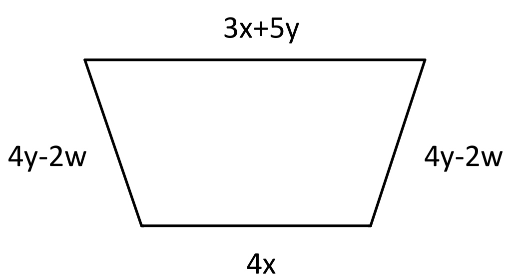
d. Diferente, porque las cantidades se agregaron en diferente orden y la suma cambia.

5. Dados los siguientes polinomios, desarrolla la siguiente suma $P(x) + Q(x)$:

$$P(x) = 3\text{m} - 2p + 5$$

$$Q(x) = -\text{p} + 3m - 7$$

6. Las medidas de un terreno están dadas a continuación (Quintero, 2018).



El perímetro del terreno viene dado por la expresión:

a. $7x + 13y - 4w$

b. $7x - 13y + 4w$

c. $7x + 13y$

d. $13y + 4w$

7. Tienes un cuadrado en el cual el lado mide $8cm$. Desplaza solo 2 vértices para formar otro cuadrado en el cual el lado sea de poco más de $5.5\ cm$ (https://acertijosyenigmas.wordpress.com/category/geometria/).

8. Escribe, para cada uno de los siguientes apartados, un monomio que cumpla las condiciones requeridas.

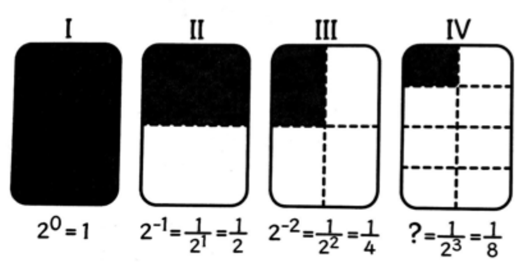
   a. Que tenga coeficiente 12 y el mismo grado que el monomio $3x^5$
   b. Que tenga grado 5 y el mismo coeficiente que el monomio $-2x^6$
   c. Que tenga por parte literal x^2 y cuyo valor numérico para $x = 5$ sea 50

(http://www. edu365.cat/eso/muds/matematiques/edad/eso1/1quincena7/1quincena7.pdf)

9. La expresión $2^{30} + 2^{30} + 2^{30} + 2^{30}$ no es equivalente a (Colombia aprendiendo, 2018):

   a. 2^{32}
   b. 8^{11}
   c. 4^{16}
   d. 16^{8}

10. ¿Cuál es la expresión matemática que completa el paso IV? (Ochoa, 2018)



1.3. Conceptos y procedimientos

Con la tarea diagnóstica, podemos verificar que el estudiante comprende el uso del valor posicional de un número, identifica las características de un conjunto numérico, asocia términos semejantes y realiza operaciones entre ellos, reconoce el área y el perímetro de algunas figuras geométricas.

1.4. Sistemas de representación

Durante el desarrollo de la tarea se fomenta el uso del sistema de representación simbólico, al utilizar la información y las imágenes como elementos dentro de un lenguaje matemático para plantear una expresión algebraica. Además, la representación geométrica que permite mostrar la relación existente entre el perímetro o área de una figura y la expresión algebraica que lo modela.

1.5. Contextos

Para la tarea diagnóstica, incluimos los contextos profesional y científico. Con respecto al contexto profesional utilizamos una situación que involucra el perímetro de terrenos. En cuanto al contexto científico, planteamos situaciones que se relacionan con problemas propios de las matemáticas. Al hallar la distancia entre dos lugares y cuando se calcula la suma de dos polinomios.

1.6. Materiales y recursos

Los recursos para el desarrollo de esta tarea son la hoja en la que se encuentra los literales de la tarea diagnóstica, lápiz, borrador y tajalápiz.

1.7. Agrupamiento e interacción

Para la implementación de la tarea diagnóstica, inicialmente el profesor debe motivar a los estudiantes al dar a conocer la finalidad de la tarea y la manera en que se agruparán para solucionarla. Luego, el profesor distribuye la hoja donde se encuentra la formulación de la tarea y da las indicaciones necesarias para que el estudiante comience. Durante el desarrollo de la tarea los estudiantes están organizados de forma individual, de esta manera el profesor puede observar el dominio de los conceptos previos por estudiante. Por ello, la interacción será entre estudiante-profesor.

1.8. Temporalidad

La tarea diagnóstica esta diseñada para ser desarrollada en 50 minutos. La tarea se distribuirá en dos etapas. En la primera, el profesor presenta la tarea a los estudiantes. En la segunda, los estudiantes abordan y desarrollan la tarea con ayuda de los recursos.

1.9. Errores

Presentamos cada uno de los ítems de la tarea diagnóstica y su relación con los conocimientos previos. Además, los errores en los que puede incurrir un estudiante al momento de desarrollar cada ítem. También, incluimos las posibles ayudas que le permiten al estudiante superar un estancamiento o evitar incurrir en un error.

Con el primer ítem, pretendemos que el estudiante de muestra del manejo del concepto de valor posicional de un número y de algunas características de los números naturales, para determinar un subconjunto dentro de un conjunto de estos. De esta manera, el estudiante identifica las particularidades de un conjunto numérico determinado, lo que, se encuentra relacionado con un conocimiento previo. En el desarrollo de este ejercicio, el estudiante puede incurrir en errores asociados con alterar el orden del valor posicional, traducir una relación como un número, registrar datos incorrectos obtenidos por el ensayo y error y determinar un patrón que no esta asociado a la información de la situación. Las posibles ayudas que el profesor puede brindarle al estudiante están relacionadas con dos preguntas "¿dentro de la situación, observas dos o más elementos desconocidos?" y "¿los datos extraídos representan lo mostrado en el dibujo?"

Con el segundo ítem, esperamos que el estudiante use la noción de parte de un todo entre números racionales, a partir de la comparación de unidades de medida. Lo que hace referencia a utilizar números racionales en sus diferentes representaciones para resolver situaciones que se encuentran en contexto. El posible error en el que un estudiante puede incurrir está asociado a determinar heterogeneidad entre dos o más magnitudes. Proponemos como ayudas para que el estudiante supere el estancamiento preguntas como “¿es posible relacionar ambas magnitudes desde una sola expresión?” y “¿existe alguna relación entre las unidades de medida mencionadas en el enunciado?”.

Con los ítems tres y cuatro, pretendemos que el estudiante utilice la figura incluida en la formulación de la tarea para generar una representación simbólica de la información allí expuesta. En este procedimiento, el estudiante puede incurrir en errores relacionados con hacer referencia a diferentes cantidades con una misma figura, variar los lados de la figura que no corresponden a la situación y asignar el mismo valor a diferentes figuras. Las ayudas diseñadas para este error son “¿existe relación entre los lados opuestos del rectángulo?”, “¿dentro de la figura es posible observar otro tipo de polígonos?”, ¿es posible determinar expresiones que determinen la relación entre los lados de una figura’?” y “¿al girar las figuras cambia en algo la dimensión?”.

En cuanto, a los ítems cinco y seis, queremos abarcar dos conocimientos previos. El primero que corresponde a asociar términos semejantes al operar expresiones algebraicas y el segundo relacionado con reconocer operaciones, símbolos y números dentro de una expresión algebraica. En el desarrollo de estos ejercicios, el estudiante puede incurrir en errores como escribir una operación que no corresponde a la situación o escribir el producto como potencia. La posible ayuda que el profesor puede brindarle al estudiante corresponde a la pregunta “¿al emplear una operación diferente a la suma, permanece la relación que se muestra en el enunciado?"

En el séptimo ítem, abarcamos el conocimiento previo correspondiente a utilizar diferentes métodos para comprender la ampliación de una figura desde el desplazamiento de uno de sus vértices o lados. En este proceso el estudiante puede incurrir en errores asociados al reconocimiento de figuras geométricas. Por lo que planteamos la siguiente ayuda, “¿qué ocurre al mover solo un vértice de la figura?”.

1.10. Sugerencias metodológicas y aclaraciones

Sugerimos que el profesor este al tanto de los procesos que los estudiantes desarrollan durante cada punto de la tarea, para garantizar que se registren los procedimientos utilizados durante el desarrollo de la tarea. Es pertinente que el profesor planee una sesión de realimentación de conocimientos previos, posterior a la sesión de resolución de la tarea diagnóstica. Con el propósito de que los estudiantes tengan la posibilidad de identificar los errores en los que incurrieron y aclarar las dudas que se les haya presentado.

1.11. Evaluación

El profesor verifica los procedimientos realizados por el estudiante y observa su desempeño durante el desarrollo de la tarea diagnóstica. En esta parte el profesor reconoce los conocimientos previos con los que cuenta cada estudiante y cuáles de ellos es necesario reforzar. Por ejemplo, si las ayudas no fueron suficientes para que el estudiante pudiera solucionar alguno de los puntos. Se debe retomar dichos conocimientos en la sesión de realimentación, con el fin de asegurarse que el estudiante puede abarcar las tareas de aprendizaje.

2. Tareas de aprendizaje

A continuación, presentamos las tareas de aprendizaje para los dos objetivos de la unidad didáctica. La tarea Balanzas contribuye al objetivo 1 al favorecer la comprensión de la equivalencia desde la manipulación de una balanza y al tener que garantizar el equilibrio entre las masas de los objetos comparados. La tarea Siembra contribuye al objetivo 1, con respecto al reconocimiento de la incógnita y del término independiente como elementos de una ecuación lineal. Cuando el estudiante indaga sobre el número de veces que se puede sembrar un árbol y la relación que se puede generar al aumentar los espacios que se deben dejar entre cada siembra. La tarea Almuerzo contribuye al objetivo 2 al exhibir la importancia de la incógnita y el término independiente. La incógnita esta determinada como elemento que representa un valor desconocido. El término independiente esta asociado a una cantidad que no depende de ningún factor. Finalmente, la tarea Calendario contribuye al objetivo 2, al promover la búsqueda de la incógnita de una ecuación lineal dentro de un enunciado que relaciona datos explícitos e implícitos.

2.1. Balanzas

La tarea Balanzas permite al estudiante extraer información de la formulación y verificar relaciones entre las masas de diferentes objetos, con el uso de elementos manipulables (balanza, esferas, cubos, pirámides), y por medio de dibujos o tablas.

Requisitos

Para el desarrollo de esta tarea, es necesario que el estudiante tenga conocimiento informal sobre el concepto de equilibrio (reconocimiento de la balanza).

Metas

Con el desarrollo de esta tarea, pretendemos que el estudiante reconozca el concepto de equilibrio al utilizar el método "ensayo y error" y que exprese por medio de lenguaje escrito situaciones de comparación como tantas veces un elemento equivale a tantas veces otro elemento. Por ejemplo 2 veces un número equivale a cuatro veces otro número "2n=4c", por lo que las letras n y c hacen referencia a aquellos números desconocidos y los números 2 y 4 a los coeficientes que se muestran en el enunciado como dos veces y cuatro veces respectivamente. Con el fin de evitar que el estudiante incurra en errores asociados a relacionar elementos sin tener en cuenta el equilibrio y tomar la igualdad como una operación.

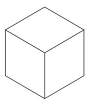
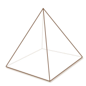
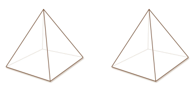
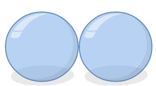
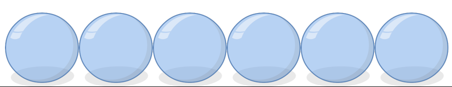
Formulación

> Reúnete con dos compañeros para solucionar la siguiente tarea. Para esta tarea, van a utilizar el prototipo de una balanza, los cubos, las esferas y las pirámides. Deben ubicar las figuras en un plato de la balanza, como se indica en la tabla y ubicar en el plato contrario diferentes figuras a las usadas en el otro plato hasta que logren equilibrar la balanza. Luego, registren en la tabla las figuras utilizadas, repitan el procedimiento para cada una de las filas de la tabla y respondan ¿Qué cantidad de objetos (solo uno de los utilizados) se deben utilizar para que la balanza quede en equilibrio, si se tiene como referencia la última cantidad de esferas mostradas en la tabla? Es importante tener en cuenta que las formas de las figuras que ya utilizaron en un

plato de la balanza no pueden usarse en el otro plato. Además, no se pueden compartir figuras entre grupos.

Tabla 1

Recolección de datos tarea Balanzas

Plato	Plato
	
	
	
	
	
	

Conceptos y procedimientos

La tarea Balanzas permite que el estudiante verifique, desde la comparación de masas, el significado de equilibrio y pueda escribir esa relación por medio de un igual. Con lo que el estudiante establece relaciones de equivalencia entre cantidades de objetos, que se convierten en los elementos de una ecuación lineal con una sola incógnita.

Sistemas de representación

El desarrollo de la tarea implica el uso del sistema de representación manipulativo al utilizar la balanza para verificar las diferentes relaciones existentes entre las masas de las figuras geométricas dadas. Además, el estudiante puede utilizar dibujos para registrar lo observado durante el proceso de comparación por medio de la balanza, lo que corresponde al sistema de representación pictórico. Por último, se puede evidenciar el uso del sistema simbólico cuando el estudiante utiliza los datos recolectados para plantear una expresión algebraica acorde a la situación.

Contextos

La tarea Balanzas esta asociada al contexto científico, porque la situación involucra comparación de masas de figuras geométricas.

Materiales y recursos

Los recursos para el desarrollo de esta tarea son la hoja, en la que se encuentra el enunciado de la situación, y la tabla que los estudiantes deben completar. Este recurso facilita la recolección de datos a partir de lo observado, en la interacción con materiales concretos: la balanza y las formas geométricas (6 cubos grandes, 15 cubos pequeños, 2 pirámides y 3 esferas). El uso de este tipo de material promueve la motivación de los estudiantes frente a situaciones que involucran lenguaje algebraico.

Agrupamiento e interacción

La tarea se realiza en grupos de tres estudiantes. A cada estudiante se le asigna un rol diferente. Los roles son un facilitador, que es el encargado de manejar las balanzas y las figuras, un escritor, que es el encargado de registrar en la tabla los datos obtenidos y un coordinador, que lidera el trabajo en equipo lleva los tiempos y modera las discusiones.

La interacción será entre estudiante-estudiante durante el desarrollo de la tarea con ayuda de la balanza, estudiante-profesor al momento de la presentación de dudas y estudiante-grupo cuando tengan que explicar lo desarrollado y encontrado por el grupo.

Temporalidad

La tarea Balanzas está diseñada para ser desarrollada en 50 minutos. La tarea se organiza en tres etapas. En la primera, el profesor presenta la tarea a los estudiantes. En la segunda, los estudiantes abordan y desarrollan la tarea con ayuda de los materiales y recursos. Por último, se realiza la realimentación de la resolución de la tarea para que los estudiantes sustenten la solución y procedimientos utilizados.

Grafo de criterios de logro

En la figura 8, presentamos el grafo de criterios de logro del objetivo 1. En el grafo señalamos los criterios de logro que conforman las estrategias de solución para resolver la tarea Balanzas. Además, ubicamos los errores asociados a cada criterio, en los que puede incurrir el estudiante al desarrollar estos procedimientos. El listado completo de errores se encuentra en el anexo 5.

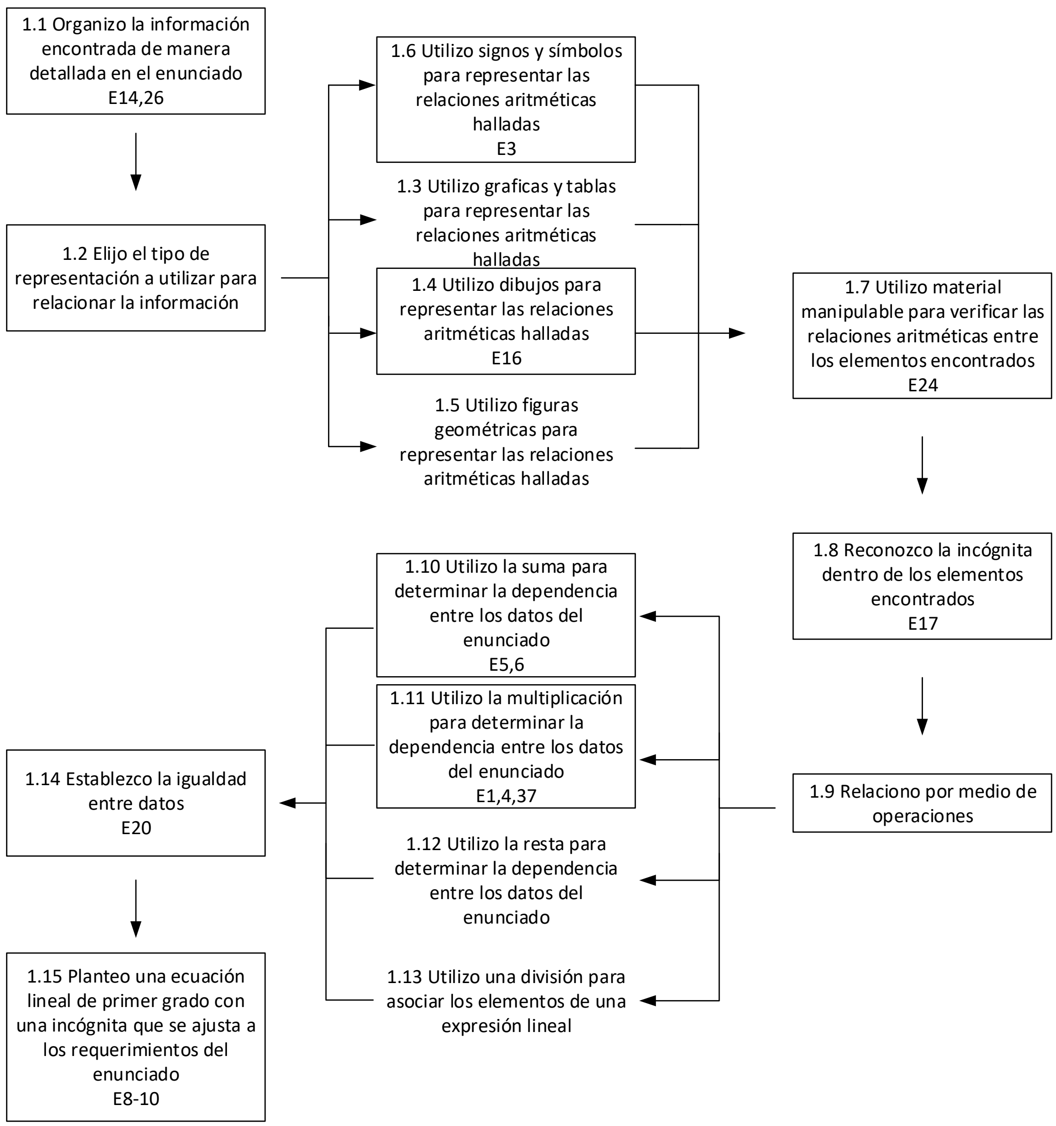


Figura 8. Grafo de criterios de logros de la tarea Balanzas

Con el desarrollo de la tarea Balanzas, el estudiante reconoce los elementos de la ecuación lineal que se encuentran de manera explícita dentro del enunciado. Para este caso en particular, los elementos son los objetos que se usan para equilibrar la balanza, el equilibrio pasa a ser representado como el igual.

Es necesario recurrir al método de ensayo y error por medio del uso de la balanza en el proceso de comparación de las formas geométricas. Esto conlleva a que el estudiante registre en una tabla las equivalencias que observa durante el desarrollo de la tarea. De esta manera, el estudiante puede establecer todas las relaciones de dependencia que se logren en el proceso, con el fin de determinar la última relación solicitada en la formulación de la tarea.

Errores

Durante el desarrollo de la tarea, es posible que el estudiante incurra en algunos errores que le impidan realizar los procedimientos de manera adecuada. Por lo anterior, diseñamos unas ayudas con el fin de evitar que el estudiante no pueda culminar la tarea (ver anexo 6). Cuando el estudiante extrae información del enunciado que está asociada con las formas geométricas a comparar. El estudiante puede incurrir en errores relacionados con no tener presente todas las figuras dadas y determinar homogeneidad entre los objetos manipulables. Cuando el estudiante decide representar las relaciones encontradas en la comparación de figuras por medio de algún sistema de representación, puede incurrir en errores asociados a determinar las diferentes incógnitas como términos independientes, asignar el mismo número a diferentes cantidades o dibujar una figura diferente a la utilizada. Las posibles ayudas que el profesor puede brindarle al estudiante están relacionadas con las preguntas "¿se puede expresar el peso de una figura con ayuda de otras?", "¿es posible comparar pirámides y esferas?" y "¿es posible comparar pirámides y cubos?" El estudiante puede incurrir en el error de identificar datos incorrectos obtenidos en el proceso de ensayo y error, por lo que utiliza la balanza para verificar las relaciones halladas. Cuando el estudiante relaciona los elementos de la ecuación lineal por medio de operaciones, puede incurrir en errores como escribir una resta en cambio de una multiplicación o una división. La ayuda que el profesor puede darle al estudiante es la pregunta "¿al emplear una operación diferente a la suma, permanece en equilibrio la balanza?". Finalmente, al establecer la igualdad y plantear la ecuación lineal, el estudiante puede incurrir en errores relacionados con escribir el igual como una operación. Las preguntas "¿qué hace que la balanza quede en equilibrio?", "¿cuáles figuras deben ubicar en el otro plato para que la balanza mantenga el equilibro?" y "¿puede tomarse el desequilibro de la balanza como una igualdad?", son las ayudas que le profesor le brinda al estudiante.

Actuación del profesor

Vale la pena aclarar que para el desarrollo de esta tarea se contó con un prototipo de balanza y unos elementos con formas geométricas. Sugerimos que el profesor verifique que se cuenta con estos materiales para iniciar con la tarea. Para comenzar la tarea, el profesor debe dar a conocer la finalidad de la tarea, la manera en que se agruparan los estudiantes y el rol que cada estudiante debe asumir al desarrollarla. Después, el profesor distribuye la hoja donde se encuentra la formulación de la tarea y los materiales que se van a usar durante la solución de la tarea (balanza y formas geométricas). Además, el profesor debe verificar el accionar de los estudiantes con el propósito de identificar cuando el estudiante ha incurrido en algún error y así, brindar las ayudas respectivas oportunamente (Ver anexo 6).

Sugerencias metodológicas y aclaraciones

Sugerimos que el profesor verifique constantemente que los estudiantes sigan las instrucciones de la tarea. Además, el profesor debe estar al tanto de que el grupo registre los procedimientos que realizan durante la comparación de las figuras. También, sugerimos que el profesor realice una realimentación de la tarea, para que cada grupo exponga los hallazgos encontrados en la solución de la tarea Balanzas.

Evaluación
El profesor analiza los datos registrados por el grupo de estudiantes y los procedimientos realizados para proponer la solución de la tarea. Además, el profesor puede utilizar el grafo de criterios de logro pará verificar en que medida se logró la meta propuesta por la tarea. Para la tarea Balanzas los criterios de logro que permiten evidenciar el buen desarrollo de la tarea son los asociados con utilizar gráficas y tablas para representar las relaciones aritméticas halladas, establecer la igualdad entre los datos y utilizar material manipulable para verificar las relaciones aritméticas entre los elementos encontrados.

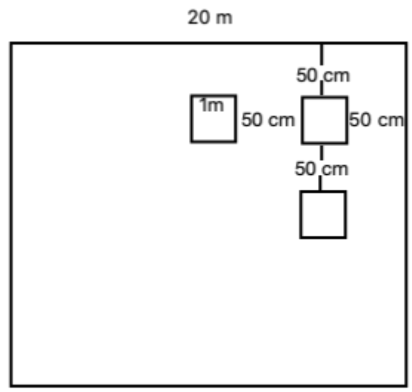
2.2. Siembra
La tarea Siembra permite que el estudiante determine la igualdad, el coeficiente y el término independiente como elementos de la ecuación lineal.

Requisitos
El estudiante debe conocer el concepto de perímetro y procedimiento para hallar el perímetro de una figura rectangular.

Metas
Esperamos que el estudiante logre identificar el papel que juegan la incógnita y el término independiente como elemento de una ecuación lineal.

Formulación

> Solucionen la siguiente situación en parejas y registren en la hoja dada los procesos utilizados. Luego, presenten, al resto de la clase y al maestro lo escrito. Andrés compro un terreno cuadrado de $20m$ de lado y quiere utilizarlo para sembrar árboles. Se sabe que se necesita de un espacio de $1m$ para sembrar un árbol y que la distancia entre cada siembra debe ser de $50cm$, como se muestra en la figura ¿Con qué ecuación podría determinar Andrés la cantidad de árboles que puede sembrar en todo el terreno?



Conceptos y procedimientos
La tarea Siembra permite evidenciar si el estudiante identifica los conceptos de incógnita y término independiente, y los relaciona como términos de una ecuación lineal. Además, el estudiante reconoce conceptos de geometría relacionados con distancias y perímetros.

Sistemas de representación
Para el desarrollo de la tarea identificamos el uso del sistema de representación pictórico, dado que el estudiante puede llenar la imagen dada con figuras que representan los árboles. Evidenciamos el uso del sistema simbólico al representar por medio de letras, signos y números la ecuación lineal que modela la situación.

Contextos
La tarea Siembra se ubica en el contexto profesional, ya que la situación involucra siembra de árboles en un terreno determinado.

Materiales y recursos
Los recursos son la hoja en la que aparece el dibujo del terreno con los espacios de la siembra de árboles. Se permite a los estudiantes dibujar las divisiones entre cada árbol para que tengan una idea de qué tanto espacio puede ser utilizado. Esto permite que los estudiantes interactúen con su compañero sobre la veracidad de los dibujos realizados con la información dada en el texto. Además, promueve la superación de errores asociados a asignar o no una distancia entre árboles que no hace referencia a lo pedido en la formulación y registrar datos incorrectos obtenidos en el proceso de dibujar las distancias.

Agrupamiento e interacción
La tarea se realizará por parejas, para que los estudiantes puedan intercambiar sus apreciaciones sobre el perímetro y la relación entre los elementos no dados por el enunciado. La interacción será entre estudiante-estudiante cuando intercambien y aporten ideas para darle solución a la tarea, estudiante-profesor al momento de la presentación de dudas y estudiante-grupo cuando tengan que argumentar el proceso desarrollado y encontrado por parejas.

Temporalidad
La tarea Siembra esta diseñada para ser desarrollada en 50 minutos. Se distribuirá en cuatro etapas. En la primera, el profesor presenta la tarea a los estudiantes. En la segunda, el profesor da la instrucción de resolver la tarea por parejas. En la tercera, los estudiantes empiezan a desarrollar la tarea con ayuda de los recursos. Por último, se realiza la realimentación de la resolución de la tarea. En este momento los estudiantes sustentan y justifican la solución y procedimientos utilizados.

Grafo de criterios de logro
En la figura 9, presentamos el grafo de criterios de logro del objetivo 1. En el grafo señalamos los criterios de logro que conforman las estrategias de solución para resolver la tarea Siembra. Además, ubicamos los errores asociados a cada criterio, en los que puede incurrir el estudiante al desarrollar estos procedimientos. El listado completo de errores se encuentra en el anexo 5.

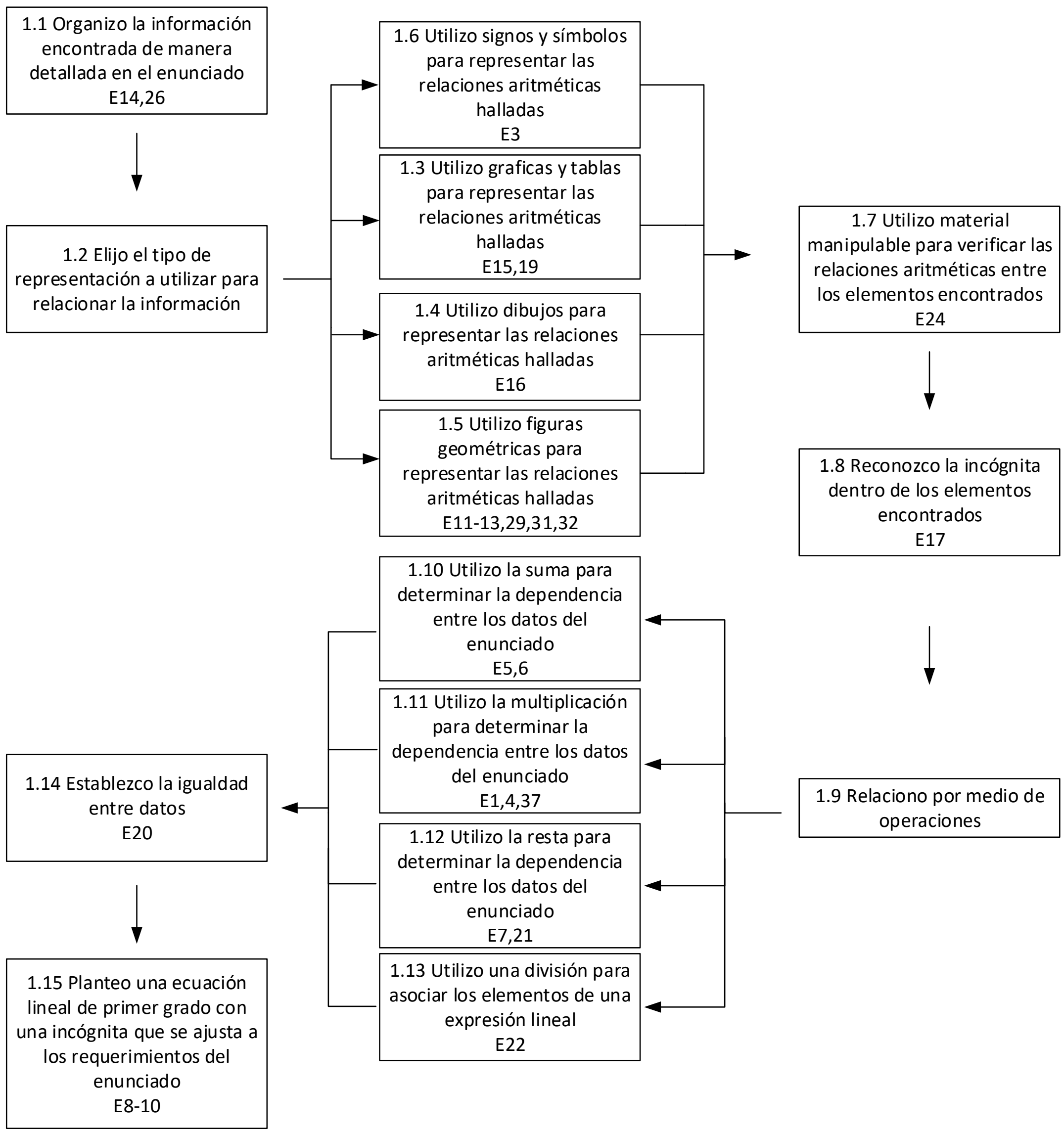


Figura 9. Grafo de criterios de logros de la tarea Siembra

Consideramos que la tarea Siembra contribuye en gran parte a la meta que se espera con la propuesta. La meta está asociada con la importancia de la relación de la incógnita y el término independiente dentro del planteamiento de una ecuación lineal. Como se muestra en el grafo, el estudiante inicia por identificar la información que se le da en la formulación de la tarea. Con esta información, el estudiante elige entre completar la figura al dibujar árboles y/o cuadrados o utilizar signos y símbolos para representar las relaciones. De esta manera, el estudiante reconoce que la incógnita corresponde a la cantidad de arboles a sembrar y la relaciona con la distancia entre los árboles por medio alguna de las operaciones básicas. Finalmente, el estudiante establece la igualdad y con estos elementos hallados plantea la ecuación lineal.

Errores

Cuando el estudiante extrae información de la formulación, él puede incurrir en errores relacionados con omitir datos relevantes que se encuentran en el enunciado. Por lo tanto, incluimos las posibles ayudas que le permiten al estudiante superar el estancamiento o evitar incurrir en un error.

En el momento que el estudiante decida representar los árboles por medio de algún sistema de representación, puede incurrir en errores asociados a determinar las diferentes incógnitas como términos independientes o asignar una distancia de manera inadecuada. El profesor puede brindarle ayudas al estudiante en forma de afirmación o pregunta para que supere el error, las siguientes son algunas posibles ayudas, "¿qué relación hay entre las distancias?", "es necesario mantener una distancia entre cada espacio utilizado por los árboles", "¿es necesario obviar el espacio entre el comienzo del lado de la finca y el hueco para el primer árbol?", y "¿los datos extraídos representan lo mostrado en el dibujo?" Cuando el estudiante reconoce la incógnita puede incurrir en el error de determinar un patrón que no corresponde a la situación. La ayuda que el profesor puede darle al estudiante es la pregunta, "¿se puede excluir la distancia entre cada árbol?" y "¿qué sucede al no tener espacio entre cada árbol?" Cuando el estudiante relaciona por medio de operaciones puede incurrir en errores como escribir una resta en cambio de una suma o utilizar la ley de signos del producto para la suma de términos semejantes. Las posibles ayudas que el profesor puede brindarle a los estudiantes están asociadas con las siguientes oraciones, "¿la cantidad de árboles a utilizar puede ser visto como una relación de resta o división con los espacios necesarios para sembrarlos?", "¿es posible determinar otra relación para el planteamiento de la ecuación?" y "la relación entre las distancias con el lado de la finca puede representar un espacio mayor al determinado en el lado" Finalmente, al establecer la igualdad y plantear la ecuación lineal, el estudiante puede incurrir en errores relacionados con ubicar el signo igual en una posición no adecuada.

Actuación del profesor

Inicialmente el profesor, debe dar a conocer la finalidad de la tarea, en este caso, que el estudiante logre reconocer la incógnita y el término independiente que se encuentran explícitos en el enunciado de la tarea. Además, el profesor debe indicar la manera en que se agruparan los estudiantes para solucionarla. Después, el profesor distribuye la hoja donde se encuentra la formulación de la tarea. El profesor debe estar atento a las dudas que se les pueda presentar a los estudiantes, con el fin de brindar oportunamente las ayudas (ver anexo 6).

Sugerencias metodológicas y aclaraciones

Es necesario que el profesor se dirija de manera constante a los grupos con el fin de verificar que se tengan en cuenta las instrucciones y que se registre en la hoja los pasos realizados para desarrollar la tarea. Sugerimos que se realice una realimentación de la tarea, para que cada grupo tenga la oportunidad de argumentar los procedimientos efectuados para hallar la solución de la tarea.

Evaluación

El profesor debe revisar la producción escrita de la solución de la tarea, con el objeto de verificar si los estudiantes han logrado comprender la situación y junto con los datos suministrado han encontrado la expresión asociada al problema. Además, el profesor puede utilizar el grafo de criterios de logro para verificar en que medida se logró la meta propuesta por la tarea. Para la tarea Siembra, los criterios de logro que permiten evidenciar el buen desarrollo de la tarea son los asociados con utilizar dibujos para representar las relaciones aritméticas halladas, utilizar signos y símbolos para representar las relaciones aritméticas halladas, reconocer la incógnita dentro de los elementos encontrados y utilizar una multiplicación para determinar la dependencia entre los datos del enunciado.

2.3. Almuerzo

La tarea Almuerzo permite exhibir la importancia de la incógnita y el término independiente. La incógnita de la ecuación lineal determinada como elemento que representa un valor desconocido y el término independiente como una cantidad que no depende de ningún factor.

Requisitos

El estudiante debe reconocer las unidades de tiempo específicamente días, semanas y meses, asociar el signo de los números enteros con los conceptos de saldo a favor y deuda, y manipular las operaciones entre números enteros.

Metas

Buscamos que el estudiante reconozca primero la incógnita como valor a encontrar por medio de operaciones y luego un término independiente como resultado de la relación entre dos valores no explícitos en el enunciado de la tarea (número total días de almuerzo y de no almuerzo).

Formulación

> Soluciona la siguiente situación de manera individual. Andrés quiere saber cuánto dinero invierten mensualmente sus padres en el almuerzo escolar. Tiene como referencia que el almuerzo diario cuesta $19.000 pesos y, además, por semana no almuerza dos días. ¿Qué expresión podría utilizar Andrés para determinar el valor que paga por el total de almuerzos consumidos en un mes?

Conceptos y procedimientos

En la tarea almuerzo el estudiante da muestra de las posibles relaciones aritméticas no contempladas en el enunciado, que determinan elementos como coeficientes de una variable. Además, hace parte de una ecuación lineal con una sola incógnita.

Sistemas de representación

Para el desarrollo de la tarea identificamos el uso del sistema de representación simbólico, debido a que, el estudiante puede registrar día a día la deuda por almuerzo y luego, usar la información preliminar y establecer relaciones aritméticas para plantear el coeficiente, la variable y el término independiente.

Contextos
Para la tarea almuerzo determinamos el contexto profesional por su relación con costos entre días que se toma el almuerzo y los días de un mes.

Materiales y recursos
Dentro de los recursos tenemos las hojas en blanco para que el estudiante registre los cálculos realizados sobre la cantidad de días pertenecientes a un mes y la cantidad de días que no almuerza al mes. Así, permitirle al estudiante hallar la relación existente entre los días del mes que almuerza y los que no, con el fin de que determine un valor numérico como término independiente.

Agrupamiento e interacción
La tarea se realizará en tríos, para incentivar el trabajo en equipo y generar discusiones acerca del procedimiento de resolución del problema. Dentro del grupo el profesor ubica grupos de tres estudiantes que se encuentren en diferentes desempeños en la asignatura (Bajo, básico y superior). Con el fin que aquellos estudiantes que se encuentran en los niveles inferiores superen sus dificultades y los de nivel superior se reten al cambiar de roles a medida que resuelven la tarea. Debido a esto, la interacción será entre estudiante-profesor al momento de la presentación de dudas acerca de la redacción de la formulación de la tarea o de los valores que están involucrados en el enunciado, la interacción estudiante – estudiante será durante todo el desarrollo de la tarea para que presenten sus aportes, inquietudes o dudas entre cada grupo y estudiante-grupo cuando los estudiantes expliquen los pasos utilizados para encontrar la ecuación que satisface la situación.

Temporalidad
La tarea está diseñada para ser desarrollada en 50 min distribuidos en cuatro etapas. En la primera, el profesor presenta la tarea a los estudiantes. En la segunda, el profesor da la instrucción de resolver la tarea en grupos de tres. En la tercera, los estudiantes empiezan a desarrollar la tarea con ayuda de los recursos. Por último, se realiza la plenaria de la resolución de la tarea donde los estudiantes sustentan y justifican la solución y procedimientos utilizados.

Grafo de criterios de logro
En la figura 10, prestamos el grafo de criterios de logro del objetivo 2. En el grafo señalamos los criterios de logro que conforman las estrategias de solución para resolver la tarea Almuerzo. Además, ubicamos los errores en los que pueden incurrir el estudiante al desarrollar estos procedimientos. El listado completo de errores se encuentra en el anexo 5.

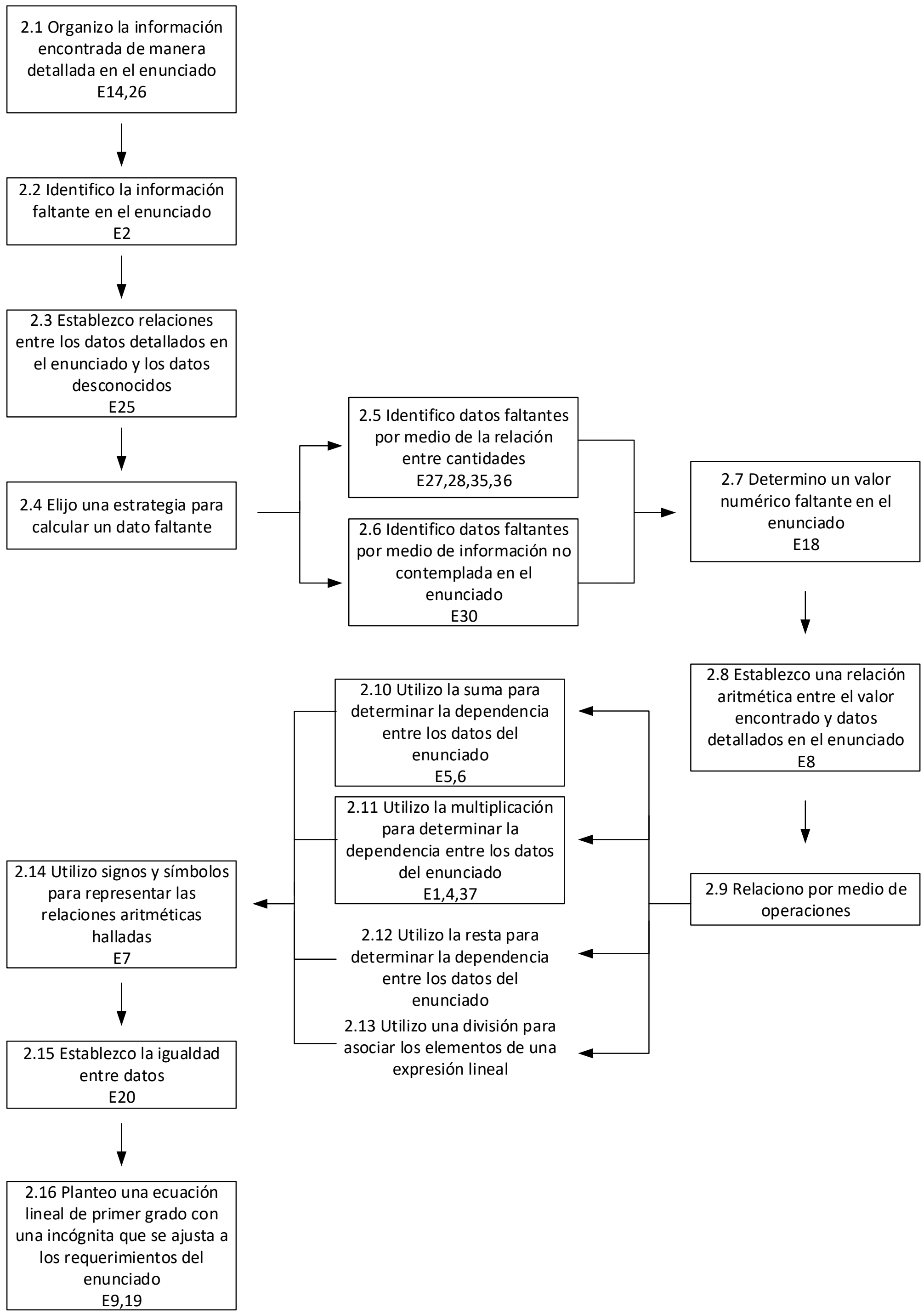


Figura 10. Grafo de criterios de logros de la tarea Almuerzo

Errores

En esta tarea el estudiante debe extraer los datos relacionados con la cantidad de días que almuerza en el colegio y el valor del almuerzo por día. El estudiante puede incurrir en el error de omitir las cantidades supuestas dentro del texto, como los meses que estudia en el año. Por lo que, el profesor puede recurrir a brindarle la ayuda asociada a la pregunta "¿dentro de la situación observas dos o más elementos desconocidos?". Luego de esto, el estudiante le asigna valores a cada uno de los elementos mostrados, puede incurrir en el error de determinar un valor numérico que no corresponde al mostrado en el texto como el mes o el día. El profesor puede dar las siguientes ayudas "¿qué relación hay entre los datos extraídos? y ¿falta algún dato?". Después, el estudiante le asigna una letra al valor del almuerzo por mes o año, puede incurrir en establecer como incógnita otras cantidades como valor diario o cantidad de días que almuerza a la semana. Al percibir este error, el profesor puede recurrir a la siguiente ayuda "¿la relación dada en el contexto se asocia con lo propuesto?". Al tomar la decisión de realizar una adición con el fin de saber la cantidad de días hábiles que tiene un mes, es posible que el estudiante escriba esta relación como una resta para encontrar la cantidad de días hábiles del mes o puede hacer el producto entre los días del mes y los días no almorzados. Por lo que, el profesor puede plantear la pregunta, "¿al emplear una operación diferente a la suma, permanece la relación del enunciado?". También, el estudiante puede emplear una multiplicación para agrupar todos los elementos y en ese procedimiento puede incurrir en los errores de realizar una potenciación para determinar el producto del pago anual del almuerzo y el coeficiente de los días que almorzó en el mes. En este caso, el profesor puede plantear la siguiente ayuda, "¿la cantidad de días a utilizar puede ser visto como una relación de suma o multiplicación con los días del mes mencionados?". Seguido a esto, el estudiante relaciona las cantidades de día por mes, días no almorzados, total pagado y precio por cada almuerzo por medio de símbolos y operaciones y puede escribir dos elementos sin designar una operación entre ellos, a lo que el profesor puede hacer las siguientes preguntas, "¿alguno de los datos mostrados puede determinarse con alguna relación fuera del texto?, ¿hay algún dato que sea necesario averiguar para determinar la cantidad de dinero a cancelar?". Por último, el estudiante sitúa el igual para determinar la equivalencia entre los elementos de la ecuación. El estudiante puede incurrir en un error al ubicar el igual sin tener en cuenta la equivalencia entre las expresiones, para permitir que el estudiante verifique sus procedimientos el profesor puede plantearle las preguntas, "¿la cantidad de dinero se relaciona con los días que no se almuerza?".

Actuación del profesor

Lo primero que el profesor debe hacer es dar a conocer las metas de la tarea que son exhibir la importancia de la incógnita y el término independiente. Luego, el profesor explica la manera como deben organizarse los estudiantes para poder empezar a desarrollar la tarea, para este caso en grupos de tres personas. Después, el profesor debe repartir la hojaen la que aparece la formulación de la tarea. Durante todo el desarrollo de la tarea es importante que el profesor este pendiente de las posibles dudas o estancamientos que puedan suceder durante el desarrollo de la tarea (ver anexo 6).

Sugerencias metodológicas y aclaraciones
El profesor debe verificar de manera constante que los estudiantes registren la información en la hoja dada, según las indicaciones expuestas en la formulación y por parte del profesor antes de empezar el desarrollo de la tarea. Sugerimos que, al terminar el desarrollo de la tarea, se disponga un tiempo de realimentación con todos los estudiantes para verificar y escuchar cada uno de los razonamientos desarrollados por los grupos.

Evaluación
El profesor analiza los datos registrados por el grupo de estudiantes y los procedimientos que realizados para proponer la solución de la tarea. Además, el profesor puede utilizar el grafo de criterios de logro pará verificar en que medida se logró la meta propuesta por la tarea. Para la tarea Almuerzo los criterios de logro que permiten evidenciar el buen desarrollo de la tarea son los asociados con identificar la información faltante en el enunciado, establecer relaciones entre los datos del enunciado y los desconocidos, elegir una estrategia para calcular un dato faltante, utilizar la suma y la multiplicación para determinar la dependencia entre los datos del enunciado.

2.4. Calendario
La tarea Calendario está encaminada a la búsqueda de la incógnita de una ecuación lineal dentro de un enunciado que relaciona datos explícitos e implícitos, por medio de diversas representaciones como la pictórica o el uso de la tabla.

Requisitos
El estudiante debe reconocer conceptos como mora, interés, porcentaje y días hábiles, manejar conversiones entre unidades de tiempo y operaciones entre números racionales.

Metas
Esperamos que el estudiante identifique el término independiente y el coeficiente dentro de una situación en la que los datos no se encuentran explícitos en el enunciado. Además, con dichas relaciones potenciar el reconocimiento de la incógnita a partir de la equivalencia entre dos o más entre términos independientes.

Formulación

> Soluciona la siguiente tarea de forma individual, haciendo uso del calendario 2018 y la información presentada en el enunciado. Luego, sustenta tus resultados con el grupo para verificar la respuesta obtenida y el procedimiento para llegar a esta. En el pago de deudas es importante tener en cuenta los días, por ejemplo, se cobran intereses de mora del 0,54% según la cantidad de deuda, este valor se cobra por cada día que pasa sin efectuar el pago. Además, el día se cobra si al finalizar las 3 pm no se ha recibido el pago en el banco. Si Camila debía pagar el 3 de mayo una deuda de $250.000 pesos y la pago el 13 de junio con un valor de $1.350 correspondiente a los intereses por mora de los días que no pago. ¿Qué expresión puede hallar Camila, que le permita determinar el valor total que debe pagar?

abril

sm	l	m	m	j	v	s	d
13							1
14	2	3	4	5	6	7	8
15	9	10	11	12	13	14	15
16	16	17	18	19	20	21	22
17	23	24	25	26	27	28	29
18	30						

mayo

sm	l	m	m	j	v	s	d
18		1	2	3	4	5	6
19	7	8	9	10	11	12	13
20	14	15	16	17	18	19	20
21	21	22	23	24	25	26	27
22	28	29	30	31			

junio

sm	l	m	m	j	v	s	d
22					1	2	3
23	4	5	6	7	8	9	10
24	11	12	13	14	15	16	17
25	18	19	20	21	22	23	24
26	25	26	27	28	29	30	

Conceptos y procedimientos
En la tarea calendario, el estudiante relaciona conceptos como interés y mora para establecer operaciones aritméticas no contempladas en el enunciado y así determinar elementos independientes de una ecuación lineal.

Sistemas de representación
Para esta tarea determinamos el sistema de representación simbólico y pictórico, para que el estudiante plasme cada una de las indicaciones dadas en el enunciado, en cuanto a días que pasan sin el pago y su relación con el incremento del interés.

Contextos
En esta tarea el contexto involucrado según la formulación es el profesional por su relación con intereses y costos.

Materiales y recursos
Los recursos son una hoja donde aparece el calendario y hojas en blanco. El calendario que le permite al estudiante identificar la cantidad de días transcurridos para el pago de la deuda. Las hojas con el fin de que los estudiantes registren las relaciones establecidas (interés y días de mora) y resultados encontrados.

Agrupamiento e interacción
La tarea se realizará en parejas, allí los estudiantes deben reconocer y relacionar el termino independiente y el coeficiente. La interacción será entre estudiante-estudiante, al momento que se presenten inconvenientes para determinar algunos de los datos implícitos de la situación, estudiante – profesor, si se presenta algún tipo de idificultad durante el desarrollo de la tarea y estudiante-grupo cuando algunos de los estudiantes sustenten el proceso utilizado en la solución del problema.

Temporalidad
La tarea se diseñó para ser desarrollada en 50 min, que se distribuyen en cuatro etapas. En la primera, el profesor presenta la tarea a los estudiantes. En la segunda, el profesor da la instrucción de resolverlo en parejas. En la tercera, los estudiantes empiezan a desarrollar la tarea con ayuda de los recursos. Por último, se realiza la realimentación de la resolución de la tarea donde los estudiantes sustentan y justifican la solución y procedimientos utilizados.

Grafo de criterios de logro

En la figura 11, presentamos el grafo de criterios de logro del objetivo 2. En el grafo señalamos los criterios de logro que conforman las estrategias de solución para resolver la tarea calendario. Además, ubicamos los errores en los que puede incurrir el estudiante al desarrollar estos procedimientos. El listado completo de errores se encuentra en el anexo 5.

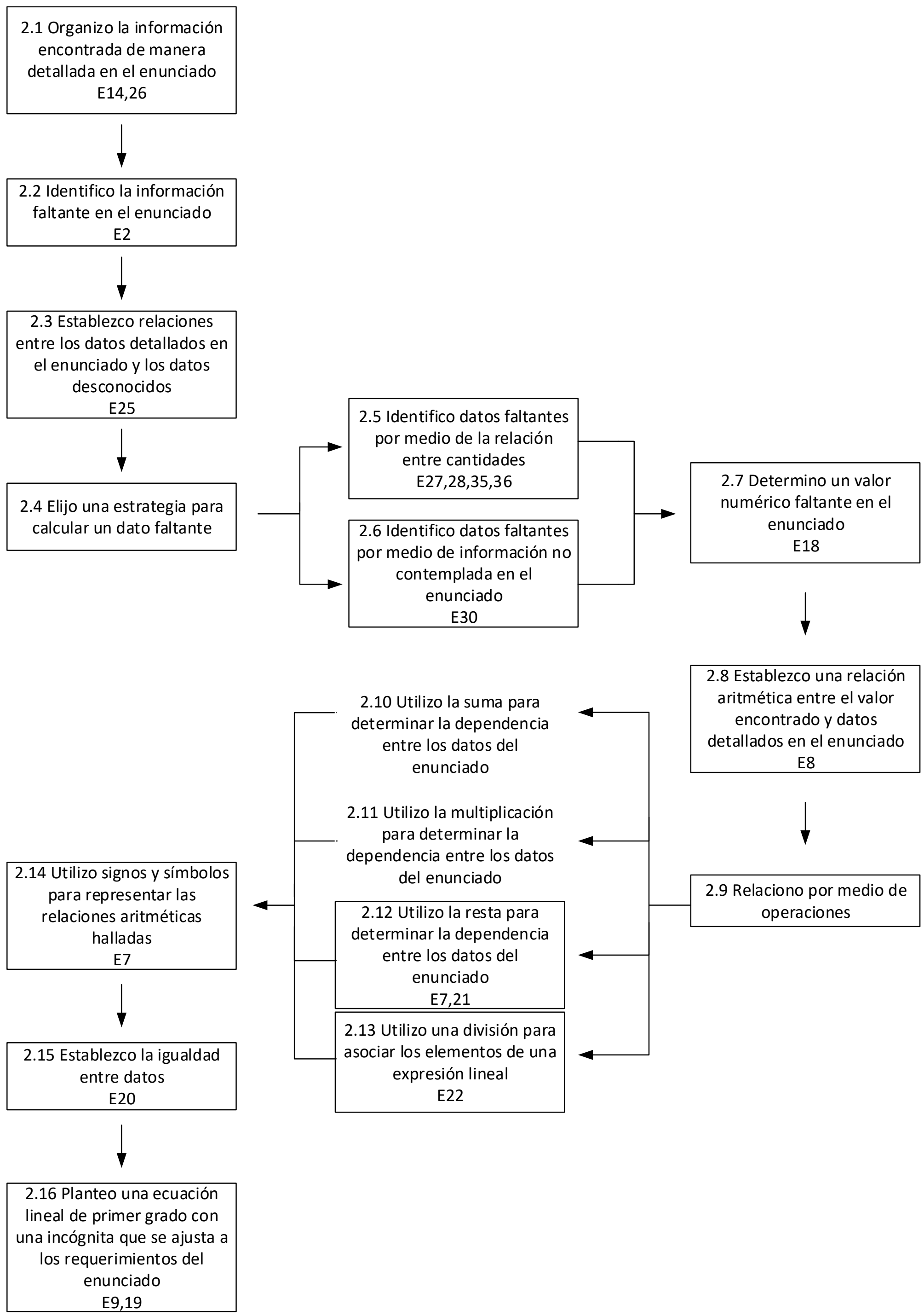


Figura 11. Grafo de criterios de logros de la tarea Calendario

Errores

El estudiante extrae información no detallada como la cantidad de días hábiles por medio de la imagen del calendario 2018, por lo que, puede incurrir en el error de contar días festivos como hábiles. Al ocurrir ese tipo de error el profesor puede recurrir a las ayudas "¿qué relación hay entre el interés que se cobra y los días pasados? y ¿falta algún dato?". Luego, el estudiante toma la decisión de registrar los elementos de la situación mediante una representación, esta representación puede ser pictórica como una línea de tiempo. Lo que puede generar que el estudiante incurra en el error de omitir el aumento del interés. Por lo que el profesor puede intervenir con la siguiente pregunta, "¿la relación dada en el contexto se relaciona con lo propuesto?". Luego, el estudiante ordena secuencialmente el interés según el día, puede allí repetir algún dato ya consignado. Para asignarle una letra al total del pago de la mora es posible que el estudiante omita la relación entre los pagos de mora diario. La ayuda que el profesor podría usar es, "¿la cantidad de días encontrados como están afectando el interés que se cobra mensualmente?". Después, el estudiante relaciona las cantidades de días hábiles por mes, intereses diarios y pago total de la mora por medio de símbolos y operaciones. El estudiante puede incurrir en el error de escribir dos elementos sin designar una operación entre ellos y si el profesor evidencia este tipo de circunstancia puede recurrir a preguntas como, "¿es necesario mantener la cantidad de días después de pasada la fecha? y ¿la relación entre el pago con los días de interés son los necesarios?". Por último, el estudiante ubica el igual para determinar la equivalencia entre los elementos de la ecuación o sitúa el igual sin tener en cuenta la igualdad de las expresiones, por lo que el profesor puede recurrir a preguntas como, ¿alguno de los datos mostrados pueden determinarse con relaciones fuera del contexto?, ¿hay algún dato que sea necesario averiguar para determinar la cantidad de dinero a cancelar, según el interés? y ¿la cantidad de dinero se relaciona con los datos no dados en el contexto del problema?", que indaguen sobre las relaciones planteadas por los estudiantes.

Actuación del profesor

Para comenzar el desarrollo de la tarea, el profesor debe dar a conocer la meta que es el reconocimiento del término independiente y el coeficiente dentro de una situación en la que los datos no se encuentran explícitos en el enunciado. Seguido a esto, el profesor da la indicación para que los estudiantes formen parejas y así poder entregar la hoja con la formulación de la tarea. Durante el desarrollo de la tarea el profesor debe estar pendiente del diligenciamiento de la hoja entregada y de las posibles dudas que surjan para poder plantear algunas de las ayudas (ver anexo7), con esto se permite que los estudiantes solucionen de la mejor manera posible la tarea.

Sugerencias metodológicas y aclaraciones

Se sugiere al profesor estar atento a cualquier estancamiento que pueda ocurrir y a evidenciar que los estudiantes registren cada uno de los procedimientos desarrollados en la hoja asignada. También que, al finalizar el desarrollo de la tarea, se genere un espacio de sustentación por parte de los estudiantes para verificar cada uno de los procesos utilizados y su relación con la tarea expuesta.

Evaluación

El profesor debe revisar la producción escrita de la solución de la tarea, con el objeto de verificar si el estudiante ha logrado comprender la situación y junto con los datos suministrado ha encontrado la expresión asociada al problema. Además, el profesor puede utilizar el grafo de criterios de logro pará verificar en que medida se logró la meta propuesta por la tarea. Para la tarea Calendario los criterios de logro que permiten evidenciar el buen desarrollo de la tarea son los asociados con identificar un valor numérico no dado en el enunciado, utilizar la resta y la división para determinar la dependencia entre los datos del enunciado, utilizar signos y símbolos para representar relaciones halladas y plantear una ecuación lineal de primer grado que se ajuste a los requerimientos de la situación.

3. Evaluación final

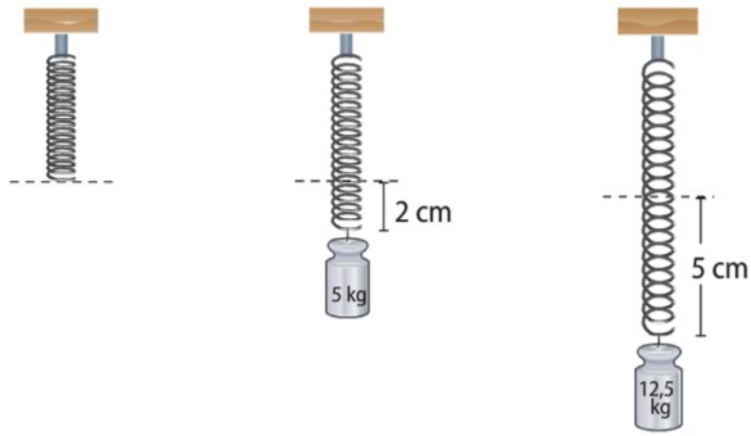
El diseño del examen final cuenta con cinco ítems (ver anexo 4) seleccionados para verificar el desarrollo de cada una de las tareas. En el punto 1, es importante que el estudiante establezca que la elongación de un resorte aumenta directamente proporcional a la masa, y así relacionarlo por medio de una operación con la variable. Este punto permite evidenciar el tipo de relación implícita que debe generarse para asociar la masa con la elongación del resorte.

En cuanto al segundo ítem, esperamos que se use la variable en dos partes de la ecuación lineal. En la primera parte, la incógnita acompañada del coeficiente 10 y en la segunda parte con el número 1 como coeficiente. Debido a que, en el punto dos se muestra la relación de dependencia entre precios al ser uno tantas veces más del otro. Para el tercer ítem, buscamos que el estudiante identifique relaciones entre los caramelos y bombones al representarlas pictóricamente. El contexto de la situación establece que dichos elementos se organizan de una manera específica, lo que permite evidenciar que la representación gráfica representa la misma relación que la representación simbólica. Ya que, en el punto tres las relaciones que pueden ser planteadas no dependen solo de la parte algebraica sino de la posibilidad de evidenciar los elementos de una ecuación lineal desde sus diferentes representaciones. En estos dos ítems, se reconocen los elementos de una ecuación lineal dentro del enunciado y se deben generar relaciones aritméticas entre la incógnita y números, lo que apunta al primer objetivo.

Al igual que en el ítem 3, en el 4, se presenta la relación entre una figura geométrica (triángulo) con las partes de una ecuación lineal. Además, en estos ítems se usa la propiedad de la suma de los ángulos internos de un triángulo y se expresan no como un valor numérico sino como expresiones algebraicas. Lo que permite que el estudiante plantee una ecuación lineal desde coeficientes, términos independientes, igualdad y un segundo término independiente. Se verifica el uso en este caso de la propiedad no planteada dentro del enunciado.

1.1. Formulación

1. Daniela suspende varios pesos en un resorte y mide la distancia que se estira, respecto al punto de equilibrio, como se muestra en la figura 1. Determina una ecuación en la que se permita hallar la longitud de un resorte cuando su peso es de 250 kg (Joya, 2016, p. 72).



2. En una tienda deportiva se vende un combo de bate de béisbol más pelota por $11. Si el bate cuesta 10 veces más que la pelota, ¿cuál de las siguientes opciones determina el valor de una pelota?

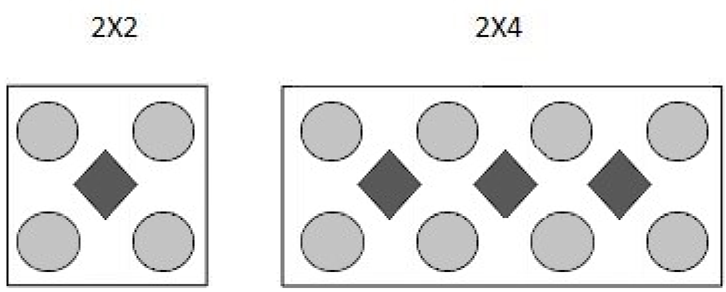
a. $10x + x = 11$

b. $(10 + x) + x = 11$.

c. $x = (11 - 10)/2$

d. $2x = 11 - 10$

3. Una compañía empaqueta cajas de bombones intercalando caramelos y bombones según se muestra en la figura. Los caramelos están representados por los rombos y los bombones representados por los círculos.



Las dimensiones de la caja se indican mediante el número de columnas y de filas de bombones que hay en cada caja. Desarrolla un método para encontrar la cantidad de caramelos en una caja de dimensiones $3x4$.

4. Escribe una ecuación para el siguiente problema geométrico. La suma de las medidas de los ángulos internos de un triangulo es $180º$. Si se conocen las medidas de los ángulos $A = 112x$, el $B = 48x - 2$ y $C = 512x - 70$, ¿con qué ecuación puedo encontrar el valor de x?

5. El largo de un rectángulo es dos veces el ancho. El perímetro del rectángulo es de 30 cm, ¿qué expresión me permite determinar el largo del rectángulo?

a. $a = 6/30$

b. $l = 2(a + a + 2a)/30$

c. $a = \frac{30}{6}$

d. $l = \frac{(a+a+2a)-30}{2}$

1.2. Rúbrica

Para poder asignar un valor numérico a los procedimientos realizados por los estudiantes durante el desarrollo del examen final, planteamos un sistema valorativo. Dicho sistema está contemplado según los procedimientos y planteamientos establecidos en cada una de las sesiones de clase. Por ello, en la tabla 6, damos a conocer la rúbrica de evaluación para cada punto establecido en el examen final de la unidad didáctica.

Tabla 6

Niveles de logro e indicadores para los objetivos

Nivel de logro	Descripción
	Objetivo 1
Bajo	El estudiante incurre en los errores relacionados con la homogeneidad de los elementos (E26), con el registro de datos relevantes (E14) y con la decisión del tipo de representación a utilizar
Básico	El estudiante reconoce los elementos de una ecuación lineal, pero incurre en los errores de determinar una relación que no corresponde a la situación (E17) y asignar valores inadecuados en las representaciones utilizadas (E11, 15 y 16)
Alto	El estudiante plantea relaciones entre los elementos de la ecuación lineal e incurre en el error de escribir el igual como un totalizador (E9)
Superior	El estudiante plantea una ecuación lineal para una situación problema, que contiene los elementos explícitos en el texto. El estudiante puede incurrir en el error de escribir el igual en una posición no apropiada (E10)

Tabla 6
Niveles de logro e indicadores para los objetivos

	Objetivo 2
Bajo	El estudiante se le dificulta asociar los valores explícitos por medio de relaciones no estipuladas en el enunciado (E27). Además, el estudiante incurre en el error de no reconocer los valores implícitos en el enunciado (E25)
Básico	El estudiante determina una relación entre los elementos explícitos de una situación, pero los asocia por medio de una operación no adecuada (E28,35)
Alto	El estudiante extrae los elementos de la ecuación lineal asociados al enunciado de la situación. Sin embargo, el estudiante puede incurre en el error de omitir uno de estos elementos al plantear la ecuación (E30) o en el error de escribir el igual en una posición no apropiada (E10)
Superior	El estudiante plantea una ecuación lineal con una sola incógnita para una situación problema y determina uno o más elementos de esta desde relaciones no dadas en el texto

4. Conclusiones

Nuestra unidad didáctica, la modelación de situaciones problema por medio de ecuaciones lineales, es el resultado de la experiencia y trabajo académico que desarrollamos durante dos años en la Maestría de educación Matemática de la Universidad de los Andes.

Dentro de este documento, realizamos la descripción de la unidad didáctica, la articulación de los contenidos y los aspectos cognitivos. Luego, presentamos la tarea diagnóstica, las tareas de aprendizaje y la tarea de evaluación diseñadas para los dos objetivos. Describimos los elementos de las tareas y proporcionamos algunas ideas que el profesor puede tener en cuenta a la hora de implementarlas. Además, incluimos un listado de anexos para que el profesor se remita a los documentos si desea conocer o profundizar en algunas temáticas relacionadas con las tareas.

La unidad didáctica permite que el estudiante enfrente situaciones asociadas al manejo de una balanza, de una figura que representa terrenos, de calendarios como recursos para determinar una relación entre los intereses y la cantidad de días de la semana para relacionarlos con pagos o costos. Además, posibilita que el estudiante infiera la importancia y el porqué del signo igual como una representación de equivalencia, la incógnita como una variable que representa una cantidad, el término independiente como un valor numérico en relación con la variable y el coeficiente como aquel número que divide o multiplica el valor de la variable. Por otro lado, las tareas se presentan en contextos conocidos para la mayoría de los estudiantes, lo que facilita que ellos hallen la relación de cada elemento con el enunciado.

Por otro lado, al relacionar la temática de la unidad didáctica con el documento de los derechos básicos de aprendizaje, evidenciamos que existe un gran aporte para al menos tres DBA diferentes del documento. Es posible que el profesor implemente la unidad didáctica en los grados de 6°, 7° y 8°, según lo considere. De esta manera, podemos entender que es lo que impide que los estudiantes puedan pasar de un lenguaje natural a uno algebraico, cuáles son sus principales tropiezos y de qué manera los maestros podemos contribuir para que ellos logren modelar todo tipo de situaciones.

Finalmente, consideramos este trabajo como un impacto positivo para guiar nuestra labor docente. Así pues, reconocemos que nuestro papel como profesoras contribuye a la formación de los ciudadanos como personas críticas y con iniciativa, sin dejar de lado los saberes matemáticos indispensables para la vida.

5. LISTADO DE ANEXOS

En este apartado, damos a conocer en detalle cada uno de los documentos anexos. Como lo son las tareas de aprendizaje y el examen final. Los cuales se pueden consultar en los documentos adjuntos.

Tabla 7
Anexos

Anexo	Nombre del anexo	Descripción
1	Criterios de logro	Procedimientos que se desarrollan al enfrentar una situación problema
2	Tarea Diagnóstica	Nueve puntos que permiten verificar los conocimientos previos antes de la implementación
3	Tareas de aprendizaje	Detalle de los apartados necesarios para la implementación de situación planteada, según los requisitos, metas, formulación, agrupación, interacción y tiempo
4	Examen final	Cinco situaciones problema, para verificar la veracidad de las tareas del aprendizaje implementadas
5	Dificultades y errores	Posibles errores en los que puede incurrir un estudiante al desarrollar algún procedimiento
6	Ayudas	Frases o preguntas que permiten que el estudiante supere errores y salga del estancamiento

6. Referencias

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemática, ciencias y ciudadanas*. Bogotá: Autor.

Ministerio de Educación Nacional. (2015). *Derechos básicos de aprendizaje*. Bogotá: Autor.

Ministerio de Educación Cultura y Deporte. (2013). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: matemáticas, lectura y ciencia*. Madrid: Autor.

Páez, C., Melo, R. (2018). *Fichas de las tareas.* Módulo 4 de MAD 6. Documento no publicado. Bogotá: Universidad de los Andes.

Páez, C., Melo, R. (2018). *Listado de análisis cognitivo*. Módulo 4 de MAD 6. Documento no publicado. Bogotá: Universidad de los Andes.

Cañadas, M., Gómez, P. y Pinzón, A. (2018). *Compartir el trabajo con los colegas*. En P. Gómez (Ed.), Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares (pp. 413-425). Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes.

Cifuentes, A., Dimaté, L., Rincón, A., Villegas, M., Pedroza, A., Santoyo, S., Moreno, E., Flores, P., Lupiáñez, J. (2016). *Ecuaciones lineales con una incógnita.* Bogotá: Ediciones SM.

Dalcín, M., Olave M. (2007). *Ecuaciones de primer grado: su historia*. En Crespo, Cecilia Rita (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 156-161). Camagüey, Cuba: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Ortega, A. (2012). *Unidad didáctica: ecuaciones de primer grado*. Trabajo fin de máster, Universidad de Granada, Granada, España.

Sáenz, J. (2014). *Diseño de una unidad didáctica, basada en métodos informales para la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita.* Tesis de maestría. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, Colombia.

Guayacundo, G. (2014). *Proyecto propuesta didáctica de enseñanza en el aula, ecuaciones lineales-cuadráticas y modelos.* Proyecto de grado. Universidad Nacional, Bogotá, Colombia.

Colombia aprendiendo. (2018). *Calendario primer nivel.* Bogotá: Autor.

ICFES. (2013). *Preguntas analizadas*. Matemáticas grado noveno. Bogotá: Autor.

Ochoa, M. (2018). *Martes de prueba. Grado 7mo.* Bucaramanga.

Quintero, L. (2018). *Evaluación de seguimiento académico*. Grado 8vo. Cali: Tres Editores.

Acertijos y más cosas. (2007). *Geometría. Acertijos y enigmas.* Recuperado de https://acertijosyenigmas.wordpress.com/category/geometria/

Perdiguero, E. *Descartes. Expresiones algebraicas.* Recuperado de https://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_1eso_expresiones_algebraicas-JS/cuadernos/1eso_cuaderno_7_cas.pdf

Joya, A., Patiño, O., Buitrago, L., Sabogal, Y., Ortiz, L., Ramírez, M., Sánchez, C. (2016) *Saberes Matemáticas 7*. Bogotá: Santillana.